КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

ОБ ОШИБКЕ В. ВОЛЬТЕРРА, ДОПУЩЕННОЙ ИМ ПРИ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев

(Горький)

В настоящей работе показывается, что при выводе уравнений движения неголономной системы Вольтерра исходил из допущения, справедливого только для голономной системы. Далее показывается, что найденные В. В. Добронравовым на основе ошибочного допущения Вольтерра новые уравнения движения неголономных систем и соответствующее обобщение метода интегрирования Гамильтона — Якоби на неголономные системы неправильны. [1,2]

1. С. А. Чаплыгин [1] в 1897 г. указал, что во многих примерах консервативных неголономных систем можно выбрать независимые обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ так, что ни в коэффициенты B_s^{m+k} кинематических связей

$$\dot{q}_{m+k} = \sum_{s=1}^{m} B_s^{m+k} \dot{q}_s \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{1.1}$$

ни в выражение функции Лагранжа L, составленного без учета связей (1.1), координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ не войдут (такие системы будем называть системами Чаплыгина), и показал, что их уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L^*}{\partial q_s} + \sum \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial B_k^i}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s^i}{\partial q_k}\right) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

где L^* обозначает функцию, полученную из L исключением зависимых обобщенных скоростей $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$ при помощи уравнений (1.1). Заметим, что динамические уравнения (1.2) Чаплыгина, число которых равно числу степеней свободы системы, позволяют независимо от кинематических связей (1.1), найти $q_1(t), \ldots, q_m(t)$, после чего из (1.1) можно найти остальные координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$.

В другой работе [2] Чаплыгин указал способ получения для некоторого класса неголономных систем обычных канонических уравнений и дал обобщение на такие системы метода интегрирования Гамильтона — Якоби.

2. В работе Вольтерра [3] 1898 г. (стр. 454) даются уравнения движения неголономной системы в так называемых квази-координатах. Вывод этих уравнений основывается на выполнении для всех декартовых координат точек системы условий переместимости

$$d\delta x_i - \delta d x_i = 0 \tag{2.1}$$

которые имеют место только для голономных систем. Проще всего в этом убедиться, показав несовместимость соотношений (2.1), например, для неголономной системы, состоящей из двух точек M и N, могущих перемещаться по плоскости xoy, но только так, чтобы скорость точки M была направлена все время по прямой MN, соединяющей точки M и N. Действительно, если обозначить через x_1, y_1 и x_2, y_2 декартовы координаты точек M и N, то уравнение такой связи запишется в виде

$$\frac{\dot{x}_1}{x_2 - x_1} = \frac{\dot{y}_1}{y_2 - y_1} \tag{2.2}$$

---

[1] Надлежит отметить, что ошибку В. В. Добронравова значительно позднее (1942) повторил Лампариелло (G. Lampariello).

[2] Как стало известно авторам после корректуры, на неправильность прямого переноса теоремы Гамильтона-Якоби в квазикоординатах на неголономные системы в работе [7] В. В. Добронравова указал А. Пиньедоли [10].

Из (2.2) следует, что для двух допустимых ее перемещений dx_1, dy_1, dx_2 dy_2 и δx_1, δy_1, δx_2, δy_2 [т. е. перемещений, совместимых со связями; в данном случае с неголономной связью (2.2)] имеют место соотношения

$$dx_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} dy_1, \qquad \delta x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \delta y_1 \tag{2.3}$$

Теперь покажем, что соотношения (2.3) и условия переместимости Вольтерра

$$d\delta x_1 - \delta dx_1 = \delta dy_1 - d\delta y_1 = d\delta x_2 - \delta dx_2 = d\delta y_2 - \delta dy_2 = 0 \tag{2.4}$$

образуют систему, не совместную с произвольностью dy_1, dx_2, dy_2 и δy_1, δx_2, δy_2, следующей из (2.3). Из (2.3) находим δdx_1 и $d\delta x_1$, а затем составляем разность

$$d\delta x_1 - \delta dx_1 = \frac{1}{(y_2 - y_1)^2} \{(y_2 - y_1)\,\delta x_2 dy_1 - (x_2 - x_1)(\delta y_2 - \delta y_1)\,dy_1 -$$
$$- (y_2 - y_1)\,\delta x_1\,dy_1 - (y_2 - y_1)\,dx_2\,\delta y_1 + (x_2 - x_1)(dy_2 - dy_1)\,\delta y_1 +$$
$$+ (y_2 - y_1)\,dx_1\,\delta y_1\}$$

Выражая в этом равенстве dx_1 и δx_1 через dy_1 и δy_1 согласно (2.3) и замечая, что согласно (2.4) $d\delta x_1 - \delta dx_1 = 0$, придем к уравнению

$$(y_2 - y_1)(\delta x_2\,dy_1 - dx_2\,\delta y_1) + (x_2 - x_1)(dy_2\,\delta y_1 - \delta y_2 dy_1) -$$
$$- (y_2 - y_1)\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\delta y_1 dy_1 + (y_2 - y_1)\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} dy_1 \delta y_1 =$$
$$= (y_2 - y_1)(\delta x_2 dy_1 - dx_2 \delta y_1) + (x_2 - x_1)(dy_2 \delta y_1 - \delta y_2 dy_1) = 0$$

которое не может выполняться для любых, допускаемых связью (2.2) перемещений системы dx_1, dy_1, dx_2, dy_2 и δx_1, δy_1, δx_2, δy_2.

Получаемые Вольтерра условия переместимости для квазикоординат (стр. 454)

$$\sum \xi_{is}\left(\delta p_s - \frac{d\delta w_s}{dt}\right) = \sum \xi_{hr}\frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h}(p_r \delta w_s - p_s \delta w_r)$$

также неверны и образуют противоречивую систему. Так как, например, для системы предыдущего примера при постоянстве расстояния между точками M и N (накладывается еще одна новая связь) для угла φ отрезка MN с осью x и пройденной точкой M дугой s эти условия суть

$$(x_2 - x_1)(\delta ds - d\delta s) = -(y_2 - y_1)(d\varphi\,\delta s - \delta\varphi\,ds)$$
$$(y_2 - y_1)(\delta ds - d\delta s) = (x_2 - x_1)(d\varphi\,\delta s - \delta\varphi\,ds)$$
$$(y_2 - y_1)(\delta d\varphi - d\delta\varphi) = 0$$
$$(x_2 - x_1)(\delta d\varphi - d\delta\varphi) = 0$$

Однако полученные Вольтерра после ряда выкладок на основании неверных перестановочных соотношений уравнения движения в квазикоординатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum a_{sk}^{(r)} \frac{\partial T}{\partial p_r} p_k + T_s + P_s \tag{2.5}$$

все же применимы и для неголономных систем.

Как известно, в квазикоординатах возможна общая для голономных и неголономных систем форма записи. Фактически случайным образом именно к такой форме принадлежат и уравнения Вольтерра.

3. Правильный вывод уравнений Вольтерра был дан в 1901 г. в работе Маджи [4], который, как и Чаплыгин в работе [1] 1897 г., исходил из уравнения

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}-Q_\alpha\right)\delta q_\alpha=0$$

В работах Больтцмана [5] 1902 г. и особенно Гамеля [6] 1904 г. было дано систематическое использование квазикоординат для написания уравнений движения. Так называемые уравнения Больтцмана — Гамеля в форме, общей для голономной и неголономной систем, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}^s}-\frac{\partial L}{\partial \pi}+\sum \gamma_{sk}^l\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}^l}\,\dot{\pi}^k=0 \quad (s=1,\ldots,m) \tag{3.1}$$

$$\dot{\pi}^{m+1}=\ldots=\dot{\pi}^n=0 \tag{3.2}$$

Здесь $\dot{\pi}^1,\ldots,\dot{\pi}^n$ — независимые линейные комбинации обобщенных скоростей

$$\dot{\pi}^s=\sum \alpha_k^s\dot{q}^k, \qquad \dot{q}^s=\sum \beta_k^s\dot{\pi}^k \tag{3.3}$$

и такие, что в силу неголономных связей $\dot{\pi}^{m+1}=\ldots=\dot{\pi}^n=0$; коэффициенты γ_{sk}^l определяются через α_k^s и β_k^s

$$\gamma_{sk}^l=\sum\left(\frac{\partial \alpha_i^l}{\partial q^h}-\frac{\partial \alpha_h^l}{\partial q^i}\right)\beta_s^i\beta_k^h \tag{3.4}$$

затем, L — функция Лагранжа, выраженная через $q^1,\ldots,q^n$, $\dot{\pi}^1,\ldots,\dot{\pi}^n$ и составленная без учета неголономных связей, а символы (квазикоординаты) $\pi^1,\ldots,\pi^n$ введены для сокращения записи согласно формуле

$$\sum\frac{\partial L}{\partial q^k}\beta_s^k=\frac{\partial L}{\partial \pi^s} \tag{3.5}$$

В уравнениях (3.1) нужно положить $\dot{\pi}^{m+1}=\ldots=\dot{\pi}^n=0$ *только после дифференцирования*. Эти уравнения для систем С. А. Чаплыгина, если квазикоординаты $\pi^1,\ldots,\pi^m$ являются истинными координатами, т. е. если

$$\dot{\pi}^1=\dot{q}^1,\ldots,\dot{\pi}_m=\dot{q}_m, \qquad \dot{\pi}^{m+k}=\dot{q}^{m+k}-\sum B_s^{m+k}\dot{q}_s$$

переходят в уравнения (1.2). Заметим, что интеграция уравнений (3.1) и (3.2) может проводиться раздельно [сначала (3.1), затем (3.2)] лишь для систем Чаплыгина.

В переменных q_k и $p_k=\partial L^*/\partial\dot{q}_k$ уравнения Чаплыгина (1.2) могут быть записаны в виде

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H^*}{p\partial_k},\quad \dot{p}_k=-\frac{\partial H^*}{\partial q_k}-\sum\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}l}\left(\frac{dB_s^{m+l}}{\partial q_k}-\frac{\partial B_k^{m+l}}{\partial q_s}\right) \tag{3.6}$$

где $H^*=\sum p_k\dot{q}_k-L$ и выражена через $q_1,\ldots,q_m$, $p_1,\ldots,p_m$. Аналогично уравнения (3.1) можно привести к виду [5]

$$\dot{\pi}^k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial \pi^k}+\sum\gamma_{sk}^l\frac{\partial H}{\partial p_l}p_s \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{3.7}$$

где

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}^k},\quad H=\sum\dot{\pi}^k p_k-L$$

4. В работе [7] 1939 г. В. В. Добронравов дает обобщение метода интегрирования Гамильтона — Якоби на неголономные системы. Сначала он находит вид уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби в квазикоординатах для голономной консервативной системы. Именно, он пишет (стр. 483):

«. . . Можно доказать теперь следующее предложение. Зная полный интеграл уравнения [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H(\beta_i(v),\ q_i,\ t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

т. е. имея функцию $v(q_i, a_i, t)$, где $a_i = \text{const}$, удовлетворяющую уравнению (4.1), мы получим общее решение канонических уравнений в квазикоординатах, т. е. уравнений (3.7) [см. уравнение (3.7) настоящей статьи], полагая

$$\frac{\partial v}{\partial a_i} = b_i, \qquad p_i = \beta_i(v) \qquad (b_i = \text{const})» \tag{4.2}$$

Это утверждение правильно. Однако несколько далее В. В. Добронравов пишет: «Поскольку уравнения Больцтмана—Гамеля, написанные в форме [см. уравнения (3.1)], имеют место и для систем с неголономными линейными связями, то и предлагаемое обобщение теоремы Гамильтона — Якоби должно быть приложимо для неголономных систем. В этом случае из уравнений (4.2) надо взять все равенства первой группы, т. е. $\partial v / \partial a_i = b_i$, а из уравнений второй группы необходимо взять только те равенства, которые соответствуют индексам голономных координат, т. е. $p_\nu = \beta_\nu(v)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$».

Это заключение ошибочно. Полная система уравнений движения Больтцмана — Гамеля для неголономной системы состоит из уравнений (3.1) и уравнений связей (3.2), в то время как для голономной системы только из уравнений (3.1), где $m = n$, т. е. вид полной системы уравнений движения *разный* для голономных и неголономных систем. Затем это неверное утверждение подкрепляется В. В. Добронравовым ссылкой на то, что его метод в применении к задаче С. А. Чаплыгина привел к решению, совпадающему с решением С. А. Чаплыгина.

Применим изложенный метод к задаче С. А. Чаплыгина о плоском неголономном движении [1]. «Представим себе твердое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость тремя точками; две из этих точек представляют простые свободно скользящие ножки; третья есть точка прикосновения острого колесика, горизонтальная ось которого неизменно вкреплена в движущееся тело. Допустим, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Положение тела определяем горизонтальными координатами ξ, η точки прикосновения A колесика и углом φ, который составляет плоскость колесика с осью 0ξ. Горизонтальная проекция центра тяжести тела определяется ее координатами α и β по подвижным осям xAy».

Ограничимся частным случаем $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, т. е. случаем, когда проекция центра масс на плоскость $\xi 0 \eta$ совпадает с точкой прикосновения колесика. В этом случае, очевидно, имеем

$$L = T = \tfrac{1}{2}\left[\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + k^2\dot\varphi^2\right]$$

и неголономная связь будет

$$\dot\eta = \dot\xi \operatorname{tg}\varphi \tag{4.3}$$

Введем (нормальные) квазикоординаты

$$\dot\pi^1 = \dot\xi\cos\varphi + \dot\eta\sin\varphi, \qquad \dot\pi^2 = k\dot\varphi, \qquad \dot\pi^3 = \dot\xi\,\text{sni}\,\varphi - \dot\eta\cos\varphi \tag{4.4}$$

Тогда найдем, что

$$T = \tfrac{1}{2}m\left[(\dot\pi^1)^2 + (\dot\pi^2)^2 + (\dot\pi^3)^2\right]$$

причем в силу (4.3) $\dot\pi^3 \equiv 0$.

---

[1] Под $\beta_i(v)$ понимается

$$\beta_i(v) = \frac{\partial v}{\partial \pi^i} = \sum \frac{\partial v}{\partial q^k}\beta_i^k$$

(Примечание авторов)

Если ввести обозначения $q^1 = \xi$, $q^2 = \varphi$, $q^3 = \eta$, то матрица коэффициентов β^r_k, т. е. матрица преобразования обратного матрице $\| \alpha^r_k \|$ преобразования (4.4), будет

$$\| \beta^k_r \| = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \end{Vmatrix}$$

Введем канонические переменные

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}^1} = m\dot{\pi}^1, \qquad p_2 = m\dot{\pi}^2, \qquad p_3 = m\dot{\pi}^3$$

и найдем функцию

$$H = \frac{1}{2m} \{ {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 \}$$

Заменяя p_i на $\partial V / \partial \pi$, в данном случае p_1, p_2, p_3 соответственно на

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} \operatorname{const} \varphi + \frac{\partial V}{\partial \eta} \sin\varphi, \qquad \frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \xi} \sin\varphi - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cos\varphi$$

составляем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} = 0$$

полным интегралом которого будет функция

$$V = -\frac{h}{2m} t + a\xi + b\eta + k\sqrt{h - a - b}\,\varphi$$

Решение задачи теперь должно даваться формулами

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{t}{2m} + \frac{k}{2\sqrt{h - a - b}} \varphi = -\frac{t_6}{2m}$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \xi - \frac{k\varphi}{2\sqrt{h - a - b}} = \xi_0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \eta - \frac{k\varphi}{2\sqrt{h - a - b}} = \eta_0$$

что неверно и *отлично* от решения

$$\varphi = \omega t, \qquad x = R \sin \omega t, \qquad y = R \cos \omega t$$

полученного С. А. Чаплыгиным (стр. 36—37).

Во второй работе [8] 1949 г. В. В. Добронравов рассматривает применение метода Гамильтона—Якоби уже только к системам С. А. Чаплыгина, отмечая невозможность его применения к любой неголономной системе. Он дает вывод новых уравнений движения неголономной системы в квазикоординатах, опирающийся на неверные перестановочные соотношения Вольтерра, на которых основывается все дальнейшее. Эти уравнения имеют вид (формула (48), стр. 167).

$$\frac{d\pi^s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \pi^s} + \gamma^k_{ls}\, p_k \frac{\partial H}{\partial p_l} \tag{4.5}$$

и отличаются от таких же по форме уравнений (3.7) определением величин γ^k_{ls} и тем, что суммирование по индексам k и l происходит от 1 до m, а не от 1 до n.

Если $\dot{q}^k = \beta^k_s \dot{\pi}^s$, то коэффициенты В. В. Добронравова γ^s_{rf} согласно выводу определяются по формулам

$$\gamma^s_{rf} = \alpha^s_k \left(\beta^h_r \frac{\partial \beta^k_f}{\partial q^h} - \beta^h_f \frac{\partial \beta^k_r}{\partial q^h} \right)$$

где суммирование по всем индексам происходит от 1 до m, а коэффициенты α_k^s находятся из условий (стр. 165 и 166 работы [8])

$$\alpha_k^s \beta_j^k = \delta_j^s$$

Функция H в них отлична от такой же функции H в уравнениях (3.7). Именно, в уравнениях В. В. Добронравова она уже выражена через независимые импульсы. (Заметим, что это второе отличие исчезает в так называемых нормальных координатах, к которым В. В. Добронравов в дальнейшем прибегает.)

Эти уравнения, которые В. В. Добронравов назвал уравнениями Вольтерра-Синджа [1], неверны или, точнее, не применимы к неголономным системам и верны для голономных систем. Для того чтобы это обнаружить, достаточно написать их в обычных координатах. Действительно, при частном выборе квазикоординат

$$\dot{\pi}^1 = \dot{q}^1, \ldots \dot{\pi}^m = \dot{q}^m, \qquad \dot{\pi}^{m+k} = \dot{q}^{m+k} - \sum B_l^{m+k} \dot{q}^l \qquad (k = 1, \ldots, n-m)$$

в силу того, что в этом случае $\alpha_s^s = \beta_s^s = 1$ и $\alpha_k^s = \beta_k^s = 0$ при $k \neq s$ находим, что

$$\gamma_{sl}^k = 0 \quad (k \leqslant m, \quad s \leqslant m, \quad l \leqslant m)$$

а следовательно, уравнения (4.4) будут в этом случае иметь вид

$$\dot{q}^s = \frac{\partial H^*}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H^*}{\partial q^s}$$

что отлично от уравнений (3.7) и неверно, так как к неголономным системам неприменимы обычные канонические уравнения.

Описываемый далее В. В. Добронравовым правильный метод интегрирования системы уравнений (4.5) не имеет отношения к рассматриваемой неголономной системе и приводит к неверным результатам в самых простых задачах.

В подтверждение рассмотрим задачу о качении однородного шара по горизонтальной плоскости. Решая эту задачу, В. В. Добронравов приходит к следующему уравнению в частных производных (стр. 173, формула (78) работы [8]).

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A^2}\left[\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\sin\psi}{\sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\cos\psi - \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos\theta\sin\psi}{\sin\theta}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{A^2}\left[-\frac{\partial V}{\partial \varphi}\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\sin\psi + \frac{\partial V}{\partial \psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{\sin\theta}\right]^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2\right\} = 0$$

и находит его полный интеграл в виде

$$V = -\frac{ht}{2A^2} + a_1\varphi + a_3\psi + f(\theta)$$

где

$$f(\theta) = \int \sqrt{h\sin^2\theta + a_3{}^2(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta) + 2a_1a_3\cos\theta}\,\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

После этого В. В. Добронравов пишет: . . . «Легко показать, что $f(\theta)$, а следовательно, и полный интеграл уравнения, выражается в элементарных функциях. Применяя теперь теорему, выражающуюся равенствами [2], мы получим решение всей задачи в элементарных функциях. Это будет вопросом техники выкладок и квадратур. Мы только укажем на один замечательный результат, который получается здесь методом Якоби и который является одним из косвенных доказательств физической правильности всей изложенной теории. Дело идет об одном интеграле уравнений движения, а именно: найдем по теореме Якоби третий неголономный

---

[1] Эти уравнения не совпадают ни с уравнениями Вольтерра ни с уравнениями Синджа.

[2] См. цитату, приведенную выше.

импульс p_3. Согласно общей теории будем иметь

$$p_3 = \frac{\partial V}{\partial \pi^3}, \quad \text{или} \quad p_3 = \frac{\partial V}{\partial \varphi}\beta_3^1 + \frac{\partial V}{\partial \theta}\beta_3^2 + \frac{\partial V}{\partial \psi}\beta_3^3$$

Но

$$\beta_3^1 = 0, \quad \beta_3^2 = 0, \quad \beta_3^3 = 1; \qquad \frac{\partial V}{\partial \psi} - a_3 = \text{const}$$

Таким образом, получаем, что $p_3 = \text{const}$, откуда $k^2 r = \text{const}$»... (r — вертикальная составляющая мгновенной угловой скорости шара). Этот результат, конечно, верен. Но найдем r, исходя из формулы Эйлера $r = \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta$.

Подставим вместо φ, ψ, θ решение, даваемое для этого случая формулами В. В. Добронравова (формула (49), стр. 167). Имеем

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{t}{2A^2} + \int \frac{1}{S}\sin\theta\, d\theta = b_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} = \varphi + \int \frac{a_3}{S}\cos\theta\, d\theta = b_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_3} = \psi - \int \frac{1}{S}[a_3(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta) - a_1\cos]\, d\theta = b_3$$

где

$$S = \sqrt{h\sin^2\theta - a_3{}^2(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta) + 2a_1a_3\cos\theta}$$

Из этих формул после дифференцирования по t находим

$$\dot\theta = \frac{s}{A^2\sin\theta}, \qquad \dot\varphi = \frac{a^3}{s}\dot\theta\cos\theta, \qquad \dot\psi = -\frac{a_3}{s}\dot\theta[a_3(\cos^2\theta + \lambda\sin^2\theta) - a_1\cos\theta]$$

и после подстановки в выражение для r найдем

$$r = \frac{a_3}{A^2\sin^2\theta}\left[\lambda\sin^2\theta - \frac{a_1}{a_3}\cos\theta\right] \neq \text{const}$$

т. е. решение неверно.

Поступила 9 VII 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Тр. отд. физ. наук Об-ва люб. естествознания. 1897. Т. IX. Собр. соч. 1948. Т. I.
2. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. Математ. сб. 1911. Т. 28. Вып. 2. Собр. соч. 1948. Т. I.
3. Volterra V. Sopra una classe di equazioni dinamiche. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino. 1898. Vol. 33. P. 451—475.
4. Maggi G. A. Di alcune nuove forme delle equazioni della Dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. 1901. Vol. 10. Ser. 5.
5. Boltzmann L. Über die Form Lagrange'schen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Coordinaten. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 111 (2a). 1902. S. 1603—1614.
6. Hamel G. Die Lagrange-Eulerischen Gleichungen der Mechanik. Zeitschr. für Math. und Phys. 1904. T. 50.
7. Добронравов В. В. Обобщение теоремы Гамильтона-Якоби на квазикоординаты. ДАН СССР, 1939. Т. 22. № 8.
8. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Ученые записки МГУ. 1949. Т. II. Вып. 122. стр. 77—183.
9. Шульгин М. Ф. Об. интегрировании динамических уравнений С. А. Чаплыгина. Труды Института математики и механики АН УзССР. 1949. Вып. 5.
10. Pignedoli A. Sull' applicabilità del metodo di Jacobi della Meccanica ai sistemi anolonomi. Atti del seminaro Matematico e Fisico dell' Università di Modena. 1946—1947. Vol. I; 1947—1948. Vol. II.