

**УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ
 (ВЛИЯНИЕ УПРОЧНЕНИЯ)**

Л. М. Качапов
 (Ленинград)

В статье [1] рассмотрена устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости в предположении, что материал полосы следует схеме идеальной пластичности.

В настоящей заметке рассматривается тот же вопрос для случая, когда материал полосы характеризуется линейным упрочнением. В предельных случаях мы получаем решения задач об устойчивости плоской формы изгиба: а) упругих полос, в) полос, материал которых следует схеме идеальной пластичности [1].

1. Основные положения. Схема деформации, развитая в работе [1], сохраняется и для материала с упрочнением. При этом можно, конечно, рассмотреть сложную кривую деформации с площадкой текучести и последующим участком упрочнения; мы ограничимся для простоты случаем линейного упрочнения (фиг. 1).

На участках OO' и $O'O''$ имеем соответственно

$$T = G\Gamma, \quad T = \tau_* + G_*\Gamma \quad (1.1)$$

где T, Γ — интенсивности.

Уравнения теории малых упруго-пластических деформаций при коэффициенте Пуассона, равном $1/3$, для участка $O'O''$ имеют вид (см., например, книгу [2]):

$$\sigma_x = \frac{8}{3} G\epsilon + 2 \left(G_* + \frac{\tau_*}{\Gamma} \right) \left(\epsilon_x - \frac{1}{3} \epsilon \right) \quad \text{и т. д.} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy} = \left(G_* + \frac{\tau_*}{\Gamma} \right) \gamma_{xy} \quad \text{и т. д.}$$

В упругой области (участок OO') справедлив закон Гука, который можно получить из (1.2) при $G_* = G, \tau_* = 0$. Заметим, что значения $G_* = 0, \tau_* = \tau_s$ отвечают случаю идеальной пластичности.

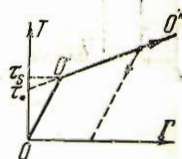
Остановимся кратко на вопросе об изгибе полосы (до потери плоской формы равновесия) моментом L_y . При $|L_y| \leq 2/3 M_s$, где $M_s = \sigma_s b h^2, \sigma_s = \sqrt{3} \tau_s$, полоса испытывает упругую деформацию. При $|L_y| > 2/3 M_s$ в полосе (фиг. 2) возникают зоны пластической деформации $|x| > \xi$.

Нетрудно найти, что граница $\zeta = \xi/h$ ($0 \leq \zeta \leq 1$) определяется уравнением

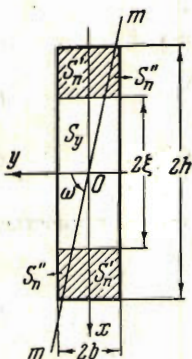
$$k(3 - \zeta^2) + \frac{2(1-k)}{\zeta} = 3M \quad (1.3)$$

где

$$M = \frac{|L_y|}{M_s}, \quad k = \frac{8(G - G_*)}{8G + G_*} \quad (0 \leq k \leq 1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Легко видеть, что $dM/d\zeta < 0$ и, следовательно, ζ однозначно зависит от изгибающего момента; кривые $\zeta = \zeta(M)$ легко вычисляются для фиксированных значений параметра k . Заметим, что

$$\sigma_z = \frac{24G}{8G + G_*} \left(G_* \varepsilon_z + \frac{\sigma_*}{3} \right) \quad (\sigma_* = \sqrt{3\tau_*}) \quad \left(\begin{array}{l} x > \xi \\ \sigma_z > 0 \end{array} \right) \quad (1.4)$$

$$\Gamma = \frac{8\sqrt{3}G}{8G + G_*} \left(|\varepsilon_z| - \frac{\sigma_*}{24G} \right)$$

Для относительного удлинения получаем выражение

$$\varepsilon_z = \pm \rho x = \pm \frac{3}{8} \frac{\sigma_*}{G} \frac{x}{\xi}$$

Рассмотрим теперь бесконечно близкую неплоскую форму равновесия. Как и ранее [1], пренебрегаем компонентами напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} и принимаем, что приращения деформаций $\delta\varepsilon_z$, $\delta\gamma_{xz}$ при выпучивании равны:

$$\delta\varepsilon_z = \kappa_2 x + \kappa_1 y \quad (1.5)$$

$$\delta\gamma_{xz} = -2\kappa_3 y$$

где κ_1 , κ_2 — изменения кривизн, а κ_3 — кручение на единицу длины. Области нагрузки и разгрузки при бесконечно малом выпучивании определяются знаком $T\delta\Gamma$; при этом линией раздела является прямая

$$\kappa_2 x + \kappa_1 y = 0$$

Вариации напряжений $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{xz}$ в упругой области S_y (фиг. 2) и зонах разгрузки равны:

$$\delta\sigma_z = \frac{8}{3} G \delta\varepsilon_z, \quad \delta\tau_{xz} = G \delta\gamma_{xz} \quad (1.6)$$

Варьируя соотношения (1.2), находим, что в зонах нагружения

$$\delta\sigma_z = \frac{24G_*G}{8G + G_*} \delta\varepsilon_z \quad (1.7)$$

$$\delta\tau_{xz} = \left[\frac{G - G_*}{G} \frac{8 + G_*/G}{9|x|/\xi - (G - G_*)/G} + \frac{G_*}{G} \right] G \delta\gamma_{xz} \quad (1.8)$$

2. Положение линии раздела. В статье [1] было показано, что с точностью до величин второго порядка малости справедливо условие

$$\iint \delta\sigma_z x \, dx \, dy = 0 \quad (2.1)$$

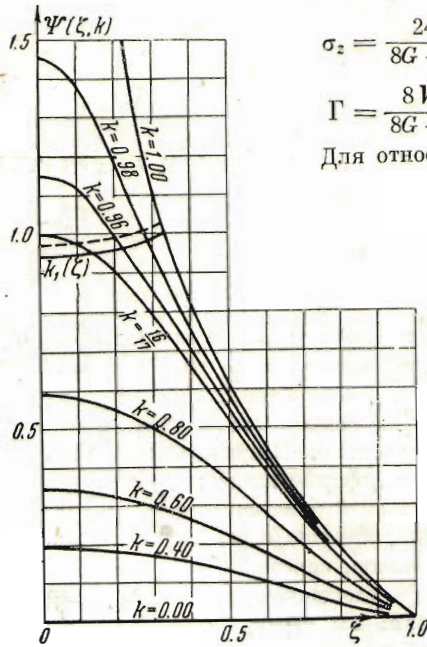
Это условие определяет положение линии раздела в зависимости от распределения пластических зон. Нетрудно убедиться в том, что линия раздела всегда пересекает область пластической деформации $x > \xi$.

Условие (2.1) при помощи (1.7) после простых, хотя и громоздких, вычислений приводит к уравнениям

$$3k(1 - \zeta^4) \Psi^2 - 8(2 - k)(1 + \zeta^3) \Psi + 6k(1 - \zeta^2) = 0 \quad (|\Psi| \leq 1) \quad (2.2)$$

$$3k\zeta^4 \Psi^4 + 8(2 - k)\zeta^3 \Psi^3 + 6k\zeta^2 \Psi^2 + 16(1 - k)\Psi^3 = k \quad \left(1 \leq \Psi \leq \frac{1}{\zeta} \right) \quad (2.3)$$

где $\Psi = \Lambda \operatorname{ctg} \omega$. При $k = 0$ (упругая полоса) имеем $\Psi = 0$.



Фиг. 3

Рассмотрим уравнение (2.2); его решение

$$\Psi = \frac{4}{3} \frac{2-k}{k} \frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^4} - \sqrt{\left(\frac{4}{3} \frac{2-k}{k} \frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^4}\right)^2 - \frac{2}{1+\zeta^2}} \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что $\Psi \geq 0$ и граница $\Psi = 1$ достигается (т. е. линия раздела проходит через вершину прямоугольника сечения) только для значений $16/17 \leq k \leq 1$, что соответствует по (2.2) при $\Psi = 1$ малым значениям ζ ($\zeta \leq 1/3$); кривая $k = k_1(\zeta)$, связывающая значения k и ζ , для которых $\Psi = 1$, показана на фиг. 3.

Заметим, что при $\Psi \leq 1$ дискриминант уравнения (2.2) положителен, так как кривая значений $k = k_2(\zeta)$, для которых дискриминант обращается в нуль, лежит (см. пункт, фиг. 3) выше кривой $k = k_1(\zeta)$. При $k \leq 16/17$ зависимость Ψ от ζ полностью определяется решением (2.4). В интервале $16/17 < k \leq 1$ это решение справедливо лишь для $\Psi \leq 1$. Для больших значений Ψ нужно решать (2.3).

Рассмотрим это уравнение; коэффициенты при степенях Ψ не отрицательны при любых $\zeta \geq 0$; $0 \leq k \leq 1$ и, следовательно, левая часть (2.3) — непрерывная монотонно возрастающая функция Ψ . Ясно, что при достаточно малом ζ и k , близком к единице, существует единственный положительный корень уравнения (2.3); упомянутые значения ζ и k лежат в интервалах

$$0 \leq \zeta \leq \frac{1}{3}, \quad \frac{16}{17} \leq k \leq 1$$

Можно показать, что Ψ ограничено при $\zeta \rightarrow 0$ и $k < 1$. В самом деле, предположим противное; тогда (так как уравнение 4-й степени разрешимо в радикалах) $\Psi \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow 0$, как $A\zeta^{-\alpha}$ ($A > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые числа), но это находится в противоречии с уравнением (2.3). Легко теперь видеть, что

$$\Psi_{\zeta=0} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{k}{2(1-k)}}$$

Корни уравнения (2.3) при заданных значениях ζ и k находятся одним из численных способов.

Можно показать, основываясь на (2.2), (2.3), что Ψ и $d\Psi/d\zeta$ непрерывны при переходе линии $\Psi = 1$. Отметим также, что

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = -\frac{3}{4} \frac{k}{2-k} \quad \text{при } \zeta = 1 \quad \frac{d\Psi}{d\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, k < 1$$

На фиг. 3 показаны кривые $\Psi = \Psi(\zeta, k)$ для некоторых значений k . С возрастанием пластических зон (т. е. с уменьшением ζ) линия раздела все более отклоняется от вертикальной оси x .

3. Основные соотношения. Рассмотрим соотношения

$$L_x = \iint \delta\sigma_z y dx dy, \quad L_z = -2 \iint \delta\tau_{xz} y dx dy \quad (3.1)$$

связывающие вариации моментов с изменениями кривизн и кручения.

Остановимся сначала на первом из этих соотношений. Внесем в него $\delta\sigma_z$ по (1.7) в области нагружения S_{II}' и по (1.6) в упругой области S_y и в области разгрузки S_{II}'' и проведя вычисления, получаем в силу связи между Ψ и ζ , что

$$L_x = A(\zeta, k) \chi_1 \quad (3.2)$$

где

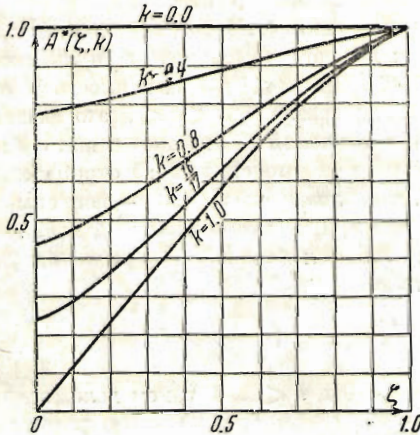
$$A(\zeta, k) = A_0 A^*(\zeta, k), \quad A_0 = \frac{4}{3} E b^4 \Lambda, \quad A^*(1, k) = 1$$

$$A^*(\zeta, k) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{8} k \left[\frac{4}{3} (1-\zeta) - \zeta \left(\frac{1}{2} \zeta^{-1} \Psi^{-1} - \frac{1}{6} \zeta^3 \Psi^3 + \zeta \Psi \right) + \frac{4}{3} \right] & \text{при } \Psi \geq 1 \\ 1 - \frac{3}{8} k \left[\frac{4}{3} (1-\zeta) + (1-\zeta^2) \Psi - \frac{1}{6} (1-\zeta^4) \Psi^3 \right] & \text{при } \Psi \leq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

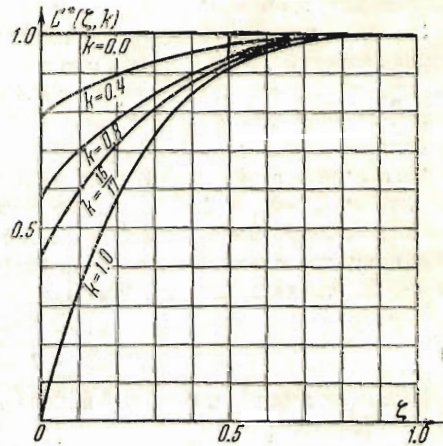
Для упругой полосы $A^*(\zeta, 0) = 1$; для идеально пластического материала $A^*(\zeta, 1)$ совпадает с $A^*(\zeta)$ [см. формулу (4.2)]. Заметим, что

$$\frac{dA^*(\zeta, k)}{d\zeta} = \frac{k}{2} \quad \text{при } \zeta = 0, \zeta = 1, k < 1$$

При $\Psi = 1$ функции A^* и $dA^*/d\zeta$ непрерывны. На фиг. 4 показаны кривые $A^*(\zeta, k)$ для некоторых значений k .



Фиг. 4



Фиг. 5

Обратимся теперь ко второму соотношению (3.1). Здесь в областях S_y и S_{II}'' $\delta\tau_{xx}$ следует брать по (1.6), а в области S_{II}' — по (1.8). Выполняя интегрирование и ряд преобразований, получаем, что в силу связи между Ψ и ζ

$$I_{\Sigma} = C(\zeta, k) \kappa_{\Sigma} \quad (3.4)$$

где

$$C(\zeta, k) = C_0 C^*(\zeta, k), \quad C_0 = 2Eb^4\Delta, \quad C^*(1, k) = 1$$

Функция $C^*(\zeta, k)$ имеет вид:

$$C^*(\zeta, k) = \begin{cases} \frac{8(1-k)}{8+k} + \frac{27k\zeta}{4(8+k)} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \zeta^{-1} \Psi^{-1} + \frac{1}{6} \zeta^3 \Psi^3 \right] + \\ + \frac{36k\zeta}{(8+k)^2} [2 \ln \zeta^\circ - \zeta^3 \Psi^3 \Phi(\zeta^\circ, k^\circ)] & \text{при } \Psi \geq 1 \\ \frac{8(1-k)}{8+k} + \frac{9k}{2(8+k)} \left[(1+\zeta) - \frac{1}{4} (1-\zeta^4) \Psi^3 \right] + \\ + \frac{36k\zeta}{(8+k)^2} \left[(1+\Psi^3) \ln \zeta^\circ - \zeta^3 \Psi^3 \Phi(\zeta^\circ, k^\circ) \right] & \text{при } \Psi \leq 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\Phi(u, k^\circ) = \frac{k^{\circ 3}}{243} \left[\left(\frac{1}{9} + \frac{k^\circ}{2} + k^{\circ 2} \right) - \left(\frac{u^3}{9} + \frac{u^2 k^\circ}{2} + u k^{\circ 2} \right) + \left(\frac{u^3}{3} + u^2 k^\circ + u k^{\circ 2} \right) \ln u \right]$$

$$k^\circ = \frac{8+k}{72} \quad \left(\frac{1}{9} \leq k^\circ \leq \frac{1}{8} \right)$$

$$\zeta^\circ = \frac{8+k}{8} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{k}{8+k} \right) \quad \zeta^\circ = \frac{8+k}{8} \left(\frac{1}{\zeta \Psi} - \frac{k}{8+k} \right)$$

Нетрудно видеть, что $dC^*/d\zeta = 0$ при $\zeta = 1$; далее C^* и $dC^*/d\zeta$ при $\Psi = 1$ непрерывны. На фиг. 5 даны графики $C^*(\zeta, k)$ для некоторых значений k .

Итак, вариации изгибающего L_x и крутящего L_z моментов связаны с изменениями кривизны p и кручения r (мы возвращаемся к прежним обозначениям) соотношениями

$$L_x = A(\zeta, k)p, \quad L_z = C(\zeta, k)r \quad (3.6)$$

При помощи этих соотношений и уравнений Кирхгофа — Клебша задача об устойчивости плоской формы изгиба сводится к проблеме собственных значений для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (в общем случае 4-го порядка) с переменными коэффициентами. Так как $A(\zeta, k)$, $C(\zeta, k)$ — сложные функции координаты s , то разыскание собственных значений проще всего осуществимо при помощи метода Ритца, исходя из вариационной формулировки задачи. Вариационное уравнение задачи можно получить и непосредственно, используя энергетические соображения так же, как это сделано в работе [1]. Сохраняют значение и приемы вычислений, указанные в этой работе.

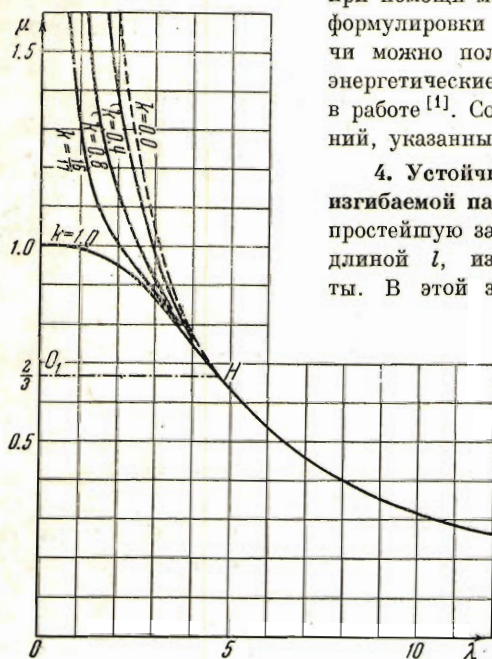
4. Устойчивость плоской формы изгиба полосы, изгибаемой парами. Рассмотрим в качестве примера простейшую задачу об устойчивости прямой полосы длиной l , изгибаемой парами; концы полосы открыты. В этой задаче $L_y = \text{const}$, $\zeta = \text{const}$; поэтому $A(\zeta, k)$, $C(\zeta, k)$ постоянны и решение задачи можно получить просто заменой величин A_0, C_0 в решении соответствующей упругой задачи величинами $A(\zeta, k)$, $C(\zeta, k)$.

Так получаем;

$$\lambda = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{A^*(\zeta, k) C^*(\zeta, k)} \quad (4.1)$$

где введены «параметр [нагрузки]» μ и «гибкость полосы» λ :

$$\mu = \frac{|L_y|}{M_s}, \quad \lambda = \frac{M_s l}{\sqrt{A_0 C_0}}$$



Фиг. 6

Напомним, что величина ζ является функцией k , μ — согласно уравнению (1.3). На фиг. 6 показаны вычисленные границы устойчивости для некоторых значений k . При $\mu \leq 2/3$ справедливо упругое решение, при $\mu > 2/3$ кривые устойчивости для различных k располагаются между упругой ($k=0$, пунктир) и идеально пластической ($k=1$) кривыми.

Поступила 20 I 1951

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Устойчивость плоской формы изгиба за пределом упругости. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
2. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.