Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ

В. И. Моссаковский (Днепропетровск)

Пусть на штамп произвольной формы в плане действует сила P и моменты M_x и M_y относительно осей x и y. Для определения напряженного состояния, возникающего в упругом полупространстве под штампом, необходимо найти гармоническую функцию $\varphi(x, y, z)$, которая должна быть равна $f(x, y)$ на верхней и нижней сторонах разреза в пространстве, совпадающего с проекцией площадки касания штампа на плоскость xy. При этом $f(x, y)$ — величина перемещения штампа. Если найдено давление под штампами $p(x, y)$, то $\varphi(x, y, z)$, может быть представлена в виде потенциала простого слоя:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint_\Sigma p(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^4}}$$

где Σ — область соприкосновения штампа с полупространством.

По известному давлению $p(x, y)$ легко находим силу и моменты по формулам

$$P = \iint_\Sigma p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad M_y = \iint_\Sigma \xi p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad M_x = \iint_\Sigma \eta p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

Нахождение $p(x, y)$ представляет для штампа произвольной формы очень трудную задачу. Поэтому естественно ставить вопрос о непосредственном нахождении P, M_x, M_y без предварительного определения $p(x, y)$. Оказывается, справедливо следующее: если найдено распределение давлений под подошвой плоского штампа данной формы в плане, то определение P, M_x и M_y для штампа с любой поверхностью основания, но той же формы в плане сводится к квадратурам.

Пусть поверхность штампа после вдавливания определяется уравнением

$$z = f(x, y)$$

Тогда

$$f(x, y) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint_\Sigma p(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \tag{1}$$

Известна функция $p_0(\xi, \eta)$ такая, что

$$\alpha x + \beta y + \delta = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint_\Sigma p_0(\xi, \eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

При этом, конечно, $p_0(\xi, \eta)$ представлено в виде

$$p_0(\xi, \eta) = \delta p_\delta(\xi, \eta) + \alpha p_\alpha(\xi, \eta) + \beta p_\beta(\xi, \eta)$$

Умножим обе части (1) на $p_0(x, y)\,dx\,dy$ и проинтегрируем по области Σ. В правой части равенства (1) меняем порядок интегрирования:

$$\iint_\Sigma f(x, y)\, p_0(x, y)\, dx\, dy = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \iint_\Sigma p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint_\Sigma \frac{p_0(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} =$$

$$= \iint_\Sigma p(\xi, \eta)(\delta + \alpha\xi + \beta\eta)\, d\xi\, d\eta$$

Отсюда получаем

$$P = \iint_\Sigma p_\delta(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$M_y = \iint_\Sigma p_\alpha(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy, \qquad M_x = \iint_\Sigma p_\beta(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy \tag{2}$$

Рассмотрим в виде примера штамп эллиптической формы в плане. Решение задачи о давлении плоского штампа эллиптической формы в плане получено А. И. Лурье [1] в 1941 г.:

$$p_0(x, y) = \frac{E}{2b(1-\sigma^2)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{s}{\Psi_1(1)} + \frac{\alpha x}{\Psi_2(1)} + \frac{\beta y}{\Psi_3(1)}\right]$$

где

$$\Psi_1(1) = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-e^2)}}, \qquad \Psi_2(1) = \int_1^\infty \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-e^2)}}$$

$$\Psi_3(1) = \int_1^\infty \frac{d\rho}{(\rho^2-e^2)\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-e^2)}}$$

Подставляя $p_\delta(x,y)$, $p_\alpha(x,y)$, $p_\beta(x,y)$ в (2), получаем

$$P = \frac{E}{2(1-\sigma^2)\Psi_1(1)\, b} \iint_\Sigma f(x, y)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} dx\, dy$$

$$M_y = \frac{E}{2(1-\sigma^2)\Psi_2(1) b} \iint_\Sigma f(x, y)\, x\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} dx\, dy$$

$$M_x = \frac{E}{2(1-\sigma^2)\Psi_3(1)\, b\,(1-e^2)} \iint_\Sigma f(x, y)\, y\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2} dx\, dy$$

Эти формулы были получены Л. А. Галиным [2] в 1948 г. другим путем. Заметим попутно, что в формулу Л. А. Галина для M_x вкралась ошибка,— отсутствует множитель $(1-e^2)$ в знаменателе.

Поступила 21 XI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Некоторые контактные задачи теории упругости. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 3.
2. Галин Л. А. Оценка перемещений в пространственных контактных задачах теории упругости. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.