Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ИЗ СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА НА ПЛОЩАДКЕ ТЕКУЧЕСТИ

Ю. Р. Лепик

(Тарту)

В работе решается задача устойчивости пластинок на площадке текучести материала в предположениях, что: 1) напряженное состояние пластинки перед потерей устойчивости является однородным; 2) вариации сил δT_1, δT_2, δS при потере устойчивости равны нулю. Можно показать, что при этом материал пластинки в большинстве случаев деформируется чисто пластически.

Полученные результаты дают возможность оценить влияние сжимаемости материала на критическую гибкость пластинки. Оказывается, что, считая материал несжимаемым, делаем ошибку, которая при $\nu = 0.3$ во всех конкретных случаях, для которых проведены вычисления, не больше 15.5%.

1. Основные уравнения. Обозначения. Для решения поставленной задачи необходимо удовлетворить следующие основные уравнения [1]:

1) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \delta T_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \delta S}{\partial x} + \frac{\partial \delta T_2}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$\delta T_\nu = \delta S_\nu = 0 \tag{1.2}$$

2) условие совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.3}$$

3) уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \delta H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + T_1 \varkappa_1 + T_2 \varkappa_2 + 2S\varkappa_3 = 0 \tag{1.4}$$

Кроме того, в случае, когда потеря устойчивости происходит на площадке текучести материала, между вариациями δT_1, δT_2, δS существует еще одно конечное соотношение, которое легко получить из условия пластичности Мизеса

$$\sigma_i^2 = X_x^2 + Y_y^2 - X_x Y_y + 3X_y^2 = \sigma_s^2 \tag{1.5}$$

Варьируя уравнение (1.5) и деля все члены на интенсивность напряжений σ_i, находим

$$\left(X_x^* - \tfrac{1}{2} Y_y^*\right)\delta X_x + \left(Y_y^* - \tfrac{1}{2} X_x^*\right)\delta Y_y + 3X_y^* \delta X_y = 0$$

из которого после интегрирования по z в пределах от $-h/2$ до $+h/2$ получим искомую связь в виде

$$\left(X_x^* - \tfrac{1}{2} Y_y^*\right)\delta T_1 + \left(Y_y^* - \tfrac{1}{2} X_x^*\right)\delta T_2 + 3X_y^* \delta S = 0 \tag{1.6}$$

---

[1] Все обозначения, смысл которых не указан в настоящей статье, совпадают с обозначениями А. А. Ильюшина [1].

В дальнейшем целесообразно ввести некоторые новые обозначения. Так, условимся обозначать модуль Пуассона при упругой деформации через ν, за пределом упругости через ν'.

Кроме цилиндрической жесткости пластинки D, введем еще новую величину

$$D' = \frac{G'h^3}{6(1-\nu')} \tag{1.7}$$

Дадим формулы, связывающие величины ν и D с ν' и D'. Для этого рассмотрим задачу простого растяжения. В этом случае

$$\begin{aligned} &X_x = \sigma_1, && Y_y = Z_z = X_y = X_z = Y_z = 0 \\ &e_{xx} = e_1, && e_{yy} = e_{zz} = -\nu' e_1, \qquad e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0 \\ &\sigma_i = \sigma_1, && e_i = \frac{2}{3}(1+\nu')e_1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Закон объемной деформации $\frac{1}{3}\sigma = Ke$ получит вид:

$$\frac{1}{3}\sigma_1 = K(1-2\nu')e_1 \tag{1.9}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{e_i} = G' = G(1-\omega), \qquad K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

из уравнений (1.8) и (1.9) находим

$$\nu' = \frac{3\nu + (1-2\nu)\omega}{3-(1-2\nu)\omega} \tag{1.10}$$

Используя (1.10), имеем

$$D' = D\frac{(1-\omega)(1-\nu)[3-(1-2\nu)\omega]}{3(1-\nu)-2(1-2\nu)\omega} \tag{1.11}$$

Для несжимаемого материала (т. е. $\nu = 0.5$) эта формула принимает простой вид:

$$D' = D(1-\omega) \tag{1.12}$$

2. Вариации усилий и моментов. Выражения вариаций усилий и моментов для несжимаемого материала даны А. А. Ильюшиным [1]. Так как вывод этих соотношений для сжимаемого материала принципиально не отличается от пути, указанного А. А. Ильюшиным, то напишем эти формулы без доказательства.

При этом предполагаем, что пластинка находится в чисто пластическом состоянии [1] (т. е. $\lambda = 1$ и $\zeta = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\delta T_1 &= \frac{2G'}{1-\nu'}\left[\varepsilon_1 + \nu'\varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_1{}^*\varepsilon\right] \\ \frac{1}{h}\delta T_2 &= \frac{2G'}{1-\nu'}\left[\nu'\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_2{}^*\varepsilon\right] \\ \frac{1}{h}\delta S &= \frac{2G'}{1-\nu}\left[(1-\nu')\varepsilon_3 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_3{}^*\varepsilon\right] \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= -D'\left[\varkappa_1 + \nu'\varkappa_2 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_1{}^*\varkappa\right] \\ \delta M_2 &= -D'\left[\nu'\varkappa_1 + \varkappa_2 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_2{}^*\varkappa\right] \\ \delta H &= -D'\left[(1-\nu')\varkappa_3 - \frac{1}{2}(1+\nu')F_3{}^*\varkappa\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

---

[1] Возможность такого решения доказывается в п. 3.

В этих формулах ε, $\varkappa$, $F_1{}^*$, $F_2{}^*$, $F_3{}^*$ и F^* обозначают следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{F^*}(F_1{}^*\varepsilon_1 + F_2{}^*\varepsilon_2 + 2F_3{}^*\varepsilon_3) \\ \varkappa &= \frac{1}{F^*}(F_1{}^*\varkappa_1 + F_2{}^*\varkappa_2 + 2F_3{}^*\varkappa_3) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

$$\begin{aligned} F_1{}^* &= \frac{1}{1+\nu'}[(2-\nu')X_x{}^* - (1-2\nu')Y_y{}^*] \\ F_2{}^* &= \frac{1}{1+\nu'}[-(1-2\nu')X_x{}^* + (2-\nu')Y_y{}^*] \\ F_3{}^* &= \frac{3(1-\nu')}{1+\nu'}X_y{}^* \\ F^* &= \frac{1}{1+\nu'}\left[3(1-\nu') - \tfrac{1}{2}(1-2\nu')(X_x{}^* + Y_y{}^*)^2\right] \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Можно доказать, что $F^* \neq 0$. В самом деле, так как

$$|X_x{}^*| = \frac{|X_x|}{\sigma_i} = \frac{|X_x|}{\sqrt{X_x{}^2 + Y_y{}^2 - X_xY_y + 3X_y{}^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - Y_y/X_x + (Y_y/X_x)^2}}$$

и выражение $1 - Y_y / X_x + (Y_y / X_x)^2$ имеет минимальное значение при $X_x = 2Y_y$, то

$$|X_x{}^*|_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad |Y_y{}^*|_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Указанное здесь равенство для $|Y_y{}^*|_{\max}$ находится аналогичным путем.

Так как

$$F_{\min}{}^* = \frac{1}{1+\nu'}\left[3(1-\nu') - \tfrac{1}{2}(1-2\nu')\tfrac{16}{3}\right] = \frac{1+7\nu'}{3(1+\nu')} > 0$$

то наше утверждение доказано.

3. Возможность возникновения чисто пластических деформаций при потере устойчивости пластинки. Из сделанного предположения $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$ следует, что уравнения (1.1) и (1.6) с граничными условиями (1.2) выполняются тождественно. Если предположить, что пластинка, теряя устойчивость на площадке текучести, вся деформируется чисто пластически, то на основании уравнений (2.1) и (2.3) получим для определения величин ε_1, ε_2, ε_3 следующую однородную линейную систему:

$$\begin{aligned} &\left[F^* - \tfrac{1}{2}(1+\nu')F_1{}^{*2}\right]\varepsilon_1 + \left[\nu'F^* - \tfrac{1}{2}(1+\nu')F_1{}^*F_2{}^*\right]\varepsilon_2 - (1+\nu')F_1{}^*F_3{}^*\varepsilon_3 = 0 \\ &\left[\nu'F^* - \tfrac{1}{2}(1+\nu')F_1{}^*F_2{}^*\right]\varepsilon_1 + \\ &\qquad + \left[F^* - \tfrac{1}{2}(1+\nu')F_2{}^{*2}\right]\varepsilon_2 - (1+\nu')F_2{}^*F_3{}^*\varepsilon_3 = 0 \\ &-(1+\nu')F_1{}^*F_3{}^*\varepsilon_1 - (1+\nu')F_2{}^*F_3{}^*\varepsilon_2 + 2[1-\nu')F^* - (1+\nu')F_3{}^{*2}]\varepsilon_3 = 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Легко доказать, что тривиальное решение $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ не годится. В самом деле, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ из формулы (2.3) следует, что $\varepsilon = 0$. Так как относительная толщина пластического слоя определяется по формуле $1 - 2\zeta = \varepsilon / \varkappa^*$ (ср. формулу (3.3) в работе [3]), то из условия $\varepsilon = 0$ следует $\zeta = 0.5$, что противоречит нашему предыдущему предположению $\zeta = 1$.

Таким образом, приходим к выводу, что чисто пластические деформации в пластинке могут возникнуть только тогда, когда решения системы (3.1) одновременно не обращаются в нуль. Но для того чтобы система (3.1) имела отличные от нуля решения, необходимо равенство нулю детерминанта Δ этой системы.

Докажем, что условие $\Delta = 0$ всегда выполнено.

Раскрывая детерминант Δ, после некоторых преобразований получаем

$$X_x^{*2} + Y_y^{*2} - X_x^* Y_y^* + 3X_y^{*2} - 1 = 0$$

или

$$\sigma_i^2 = X_x^2 + Y_y^2 - X_x Y_y + 3X_y^2 \tag{3.2}$$

Условие (3.2) определяет интенсивности напряжений σ_i, а потому всегда выполняется, т. е. действительно $\Delta = 0$. Но было бы неправильным из условия $\Delta = 0$ делать вывод, что при $\lambda = 1$ потеря устойчивости происходит всегда чисто пластически. Выясним это обстоятельство на одном примере.

Для этого рассмотрим цилиндрическую форму потери устойчивости прямоугольной, сжатой в одном направлении пластинки при условии плоской деформации. В таком случае $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $X_y^* = 0$, $Y_y^* = \nu' X_x^*$. Из уравнений (3.1) следует, что $\varepsilon_1 \neq 0$ только тогда, когда выполняются условия

$$F^* - \frac{1}{2}(1 + \nu') F_1^{*2} = 0, \qquad \nu' F^* - \frac{1}{2}(1 + \nu') F_1^* F_2^* = 0 \tag{3.3}$$

Учитывая (2.4), после простых преобразований из (3.3) получим

$$Y_y^* = \frac{1}{2} X_x^*$$

Но условия (3.4) и $Y_y^* = \nu' X_x^*$ совместно выполнены только для *несжимаемого* материала. Отсюда и приходим к выводу, что пластинка из сжимаемого материала при потере устойчивости не может деформироваться чисто пластически.

Отметим еще, что полученное решение является точным только в случае, когда уравнения совместности (1.3) удовлетворены (это условие выполняется, например, при цилиндрической форме потери устойчивости); в противоположном случае решение задачи оказывается приближенным в смысле А. А. Ильюшина (ср. [1], стр. 296).

4. Уравнение устойчивости. Выбираем оси координат x и y так, чтобы X_y^* было равно нулю. Учитывая (2.2), можем уравнению устойчивости (1.4) придать следующий вид:

$$D_1' \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3' \frac{\partial w^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2' \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - h\sigma_s \left(X_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Y_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} D_1' &= \frac{2(1-\nu')}{F^*} D' \left(1 - \frac{3}{4} X_x^{*2}\right) \\ D_2' &= \frac{2(1-\nu')}{F^*} D' \left(1 - \frac{3}{4} Y_y^{*2}\right) \\ D_3' &= \frac{1-\nu'}{2(1+\nu') F^*} D' [(7 - 2\nu') - 3(2 - \nu') X_x^* Y_y^*] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Величина D' определяется по формуле (1.11). Для частного случая $Y_y^* = 0$, $\omega = 0$, $\nu' = \nu$ уравнение (4.1) получено И. П. Кунце [2]. Отметим еще, что уравнение (4.1) формально совпадает с уравнением устойчивости упругой ортотропной пластинки [ср., например, С. Г. Лехницкий [4], формула (71.1)].

Это обстоятельство дает возможность воспользоваться результатами, полученными в теории устойчивости ортотропных пластинок. Для примера рассмотрим прямоугольную бесконечно длинную пластинку, опертую по всем краям и сжатую вдоль длинной стороны. Если ввести безразмерную величину

$$\alpha^2 = \frac{hl^2 \sigma_s}{D} \tag{4.3}$$

то для ортотропной пластинки из уравнения (68.9) из книги С. Г. Лехницкого [4] получим

$$\alpha^2 = \frac{2\pi^2}{D}\left(\sqrt{D_1'D_2'} + D_3'\right) \tag{4.4}$$

Этот результат остается справедливым и за пределом упругости при $\lambda = 1$, если только под D_1', D_2', D_3' понимать величины, данные формулами (4.2). Так как для рассматриваемой задачи $X_x^* = -1$, $Y_y^* = 0$, то из (4.2) получим

$$D_1' = \frac{1-\nu'^2}{5-4\nu'}D', \qquad D_2' = 4\frac{1-\nu'^2}{5-4\nu'}D', \qquad D_3' = \frac{(1-\nu')(7-2\nu')}{5-4\nu'}D'$$

и уравнение (4.4) примет вид:

$$\alpha^2 = \frac{18\pi^2(1-\nu')D'}{(5-4\nu')D} \tag{4.5}$$

5. Применение энергетического метода. Этот метод, широко использованный С. П. Тимошенко в его исследованиях упругой устойчивости пластинок, применим, как показано А. А. Ильюшиным [1], и за пределом упругости, если только предположить, что вариации сил δT_1, δT_2, δS равны нулю.

В случае $\lambda = 1$, $\zeta = 1$, $\nu \neq 0.5$ применение энергетического метода, как показывают несложные вычисления, приводит к следующему уравнению:

$$\alpha^2 = \frac{D'l^2}{D}\frac{\iint[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu'\varkappa_1\varkappa_2 + 2(1-\nu')\varkappa_3^2 - \frac{1}{2}(1+\nu')F^*\varkappa^2]\,dxdy}{-\iint[X_x^* w_x^2 + Y_y^* w_y^2 + 2X_y^* w_x w_y]\,dxdy} \tag{5.1}$$

Здесь α — величина, характеризующая критическую гибкость пластинки, определенная по формуле (4.3), а l — какой-нибудь характерный размер пластинки.

В качестве примера применения уравнения (5.1) рассмотрим задачу устойчивости равномерно сжатых пластинок. В этом случае $X_x^* = Y_y^* = -1$, $X_y^* = 0$, $F_1^* = F_2^* = -1$, $F_3^* = 0$, $F^* = 1$ и формула (5.1), если принять во внимание (1.7), получает вид:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}(1-\nu)(1-\omega)\,l^2\frac{\iint[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 - 2\varkappa_1\varkappa_2 + 4\varkappa_3^2]\,dxdy}{\iint(w_x^2 + w_y^2)\,dxdy} \tag{5.2}$$

Ограничимся в дальнейшем квадратной пластинкой, свободно опертой на краях. Тут граничным условиям удовлетворяет выражение

$$w = a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l} \tag{5.3}$$

Подставляя (5.3) в уравнение (5.2) и вычисляя интегралы, замечаем, что полученное выражение имеет минимум при $m = n = 1$. Таким образом, окончательно получим

$$\alpha^2 = \pi^2(1-\omega)(1-\nu) \tag{5.4}$$

6. Влияние сжимаемости материала на критическую гибкость пластинки. Условимся обозначать величину α для несжимаемого материала символом $\alpha_{0.5}$. Погрешность, которую делаем, считая материал несжимаемым, вычисляется по формуле

$$\delta = 1 - \frac{\alpha_{0.5}}{\alpha} \tag{6.1}$$

Исходя из уравнения (5.1), можно сделать некоторые общие выводы о величине δ. Рассмотрим, например, случай равномерно сжатых пластинок произвольной формы. В этом случае α определяется по формуле (5.2). Из этой формулы можно определить и величину $\alpha_{0.5}$, если только заменить величину $1-\nu$ на 0.5. Таким образом, получим

$$\left(\frac{\alpha_{0.5}}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2(1-\nu)}, \qquad \delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2(1-\nu)}} \tag{6.2}$$

Из формулы (6.2) следует, что при равномерно сжатых пластинках $\delta = \mathrm{const}$ (для $\nu = 0.3$, $\delta = 15.5\%$).

Рассмотрим, наконец, предельный случай, когда $\omega = 1$. Из формул (1.10), (1.11) и (2.4) следует, что тогда

$$\nu' = 0.5, \quad \frac{D'}{D(1-\omega)} = 2(1-\nu), \; F_1{}^* = X_x{}^*, \quad F_2{}^* = Y_y{}^*, \quad F_3{}^* = X_y{}^*, \quad F^* = 1$$

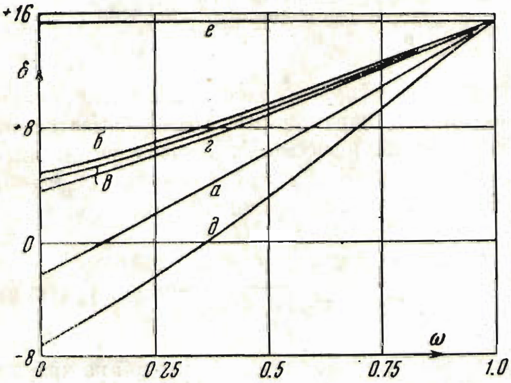
и уравнение (5.1) принимает вид:

$$\frac{\alpha^2}{1-\omega} = 2l^2(1-\nu)\,\frac{\iint[\varkappa_1{}^2 + \varkappa_2{}^2 + \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3{}^2 - 3/4\,\varkappa^2]\,dx\,dy}{-\iint[X_x{}^* w_x{}^2 + Y_y{}^* w_y{}^2 + 2X_y{}^* w_x w_y]\,dx\,dy} \tag{6.3}$$

где

$$\varkappa = X_x{}^*\varkappa_1 + Y_y{}^*\varkappa_2 + 2X_y{}^*\varkappa_3$$

Так как интегралы в равенстве (6.3) не зависят от модуля Пуассона ν, то, образуя отношение $\alpha_{0.5} : \alpha$, как легко показать, опять приходим к соотношениям (6.2). Из этого следует, что при $\omega = 1$ на величину δ вообще не влияет ни форма пластинки, ни вид нагружения.



В целях более детального определения величины погрешности δ автором проведены расчеты в ряде особых случаев. Результаты вычисления даны на фигуре. Буквами *а — е* обозначены кривые, представляющие погрешность δ при различных значениях ω для следующих конкретных задач:

а) прямоугольная, сжатая в одном направлении пластинка с двумя свободными краями; цилиндрический изгиб;

б) длинная, узкая прямоугольная пластинка, опертая по краям и сжатая вдоль длинной стороны;

в) квадратная, свободно опертая пластинка, сжатая в одном направлении;

г) квадратная пластинка с двумя опертыми и двумя заделанными сторонами, сжатая в направлении заделанных краев;

д) квадратная, свободно опертая пластинка под действием касательных усилий;

е) равномерно сжатая пластинка произвольной формы.

Из фигуры следует, что во всех рассмотренных шести случаях погрешность δ не превосходит величины, данной уравнением (6.2).

Поступила 6 I 1951 Тартуский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. ОГИЗ. 1948.
2. Кунце И. П. Устойчивость пластинок из сжимаемго материала за пределом упругости. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.
3. Лепик Ю. Р. Два замечания к теории устойчивости пластинок за пределом упругости с учетом сжимаемости материала. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ОГИЗ. 1947.