Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ

Н. Ф. Лебедев
(Новозыбков)

Задача о распространении ударной упруго-пластической волны в однородном стержне, правый конец которого удален в бесконечность, рассмотрена Х. А. Рахматулиным [1]; в его постановке предполагалось, что закон изменения напряжения на торце стержня представлен аналитической функцией. В этой заметке напряжения на волне Рахматулина, которая в работе [1] названа волной разгрузки, определятся значением напряжения на торце стержня в моменты времени, соответствующие вершинам характеристической ломаной. Решение дается быстро сходящимся рядом, остаточный член которого оценивается.

1. Преобразуем несколько уравнения характеристик волнового уравнения, соответствующих области разгрузки [2]

$$dv = \pm a_* \, d\varepsilon_*, \qquad dx = \pm a_* \, dt \qquad \left(a_* = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\right) \tag{1.1}$$

Здесь v — скорость сечений, a_* — скорость распространения упругих волн, ε_* — упругая деформация, x — лагранжева координата, t — время.

Вместо деформаций будем рассматривать напряжения σ, предполагая известной зависимость $\varepsilon(\sigma)$. Очевидно

$$\varepsilon_* = \frac{\sigma^б + \sigma^о}{E} = \frac{\sigma^б + \sigma^о}{\rho a_*^2} \tag{1.2}$$

где индексами *б* и *о* обозначены соответственно напряжения бегущей и отраженной волны. Введем, кроме того, понятие «остаточной» скорости сечения v^*, которая получится, если в сечении напряжение $\sigma^б$ возрастало до напряжения σ_0 на волне Рахматулина и затем упало до нуля при условии отсутствия отраженной волны. (Предполагается, что до удара стержень находился в состоянии покоя.)

Так как скорость распространения волны нагрузки

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$$

при пластических деформациях отлична от скорости a_*, то, пользуясь интегралом Римана [1] для бегущей волны

$$v = -\int_0^\varepsilon a(\varepsilon)\, d\varepsilon \equiv -\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\rho a(\sigma)}$$

получим значение остаточной скорости

$$v^* = -\int_0^{\sigma_0} \frac{d\sigma}{\rho a} + \frac{\sigma_0}{\rho a_*} = v^*(\sigma_0) \tag{1.3}$$

Общая скорость сечения при разгрузке определится уравнением

$$v = v^* - \frac{\sigma^б - \sigma^о}{\rho a_*} \tag{1.4}$$

Заменяя в уравнениях (1.1) значения $d\varepsilon_*$ из (1.2) и значение dv из (1.4) с учетом соотношения (1.3), получим, что:

вдоль характеристики бегущей волны

$$d\sigma^б = -\frac{1}{2}\left(\frac{a_*}{a} - 1\right)d\sigma_0, \qquad dx = a_* dt \tag{1.5}$$

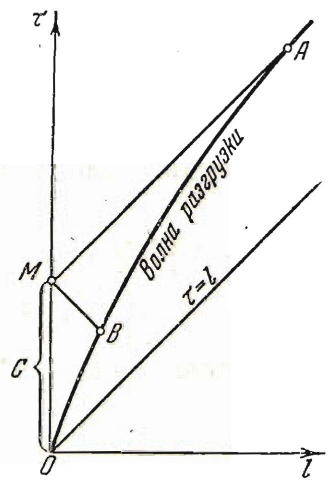
вдоль характеристики отраженной волны

$$d\sigma^о = \frac{1}{2}\left(\frac{a_*}{a} - 1\right)d\sigma_0, \quad dx = -a_* dt \tag{1.6}$$

Введем безразмерные величины

$$p = \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_s}, \qquad l = \frac{x}{L}, \qquad \tau = \frac{t}{T}$$

Здесь σ_s — предел упругости, L и T — единицы длины и времени — выбраны

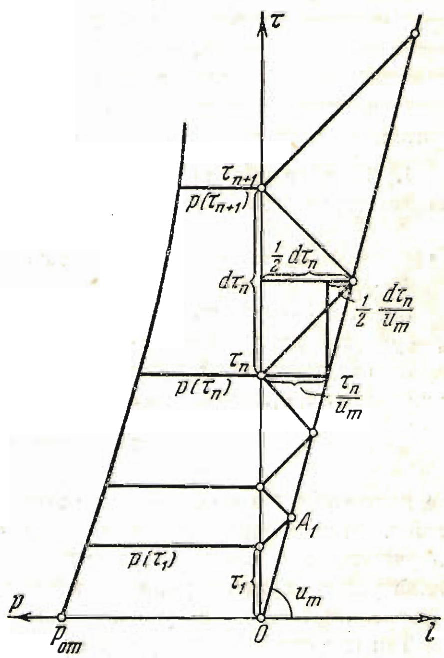


Фиг. 1

таким образом, что $L / T = a_*$.

Кроме того, будем пользоваться величинами

$$u = \frac{a_*}{a}, \qquad e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$$



Фиг. 2

Поскольку известна зависимость $\varepsilon(\sigma)$, то определится и зависимость $u = u(p)$. Вместо уравнений (1.5), (1.6) будем иметь

$$dp^б = -\frac{1}{2}(u-1)\,dp_0, \qquad dl = d\tau \tag{1.7}$$

$$dp^о = \frac{1}{2}(u-1)\,dp_0, \qquad dl = -d\tau \tag{1.8}$$

На основании (1.7), (1.8) легко устанавливается связь между напряжением на торце стержня в момент времени $\tau = c$ и напряжениями на волне разгрузки в точках A и B пересечения (фиг. 1) с характеристиками $\tau = MA = l + c$ и $\tau = MB = -l + c$

$$p(c) = p_0(A) - \frac{1}{2}\int\limits_{p_0(A)}^{p_0(B)} (u-1)\,dp \tag{1.9}$$

Для этого достаточно учесть, что в точке $M(0, c)$

$$p(c) = p^б + p^о$$

В точках же пересечения характеристик $\tau = \pm l + c$ с волной Рахматулина

$$p^б = p_0\,, \qquad p^о = 0$$

2. Рассмотрим случай линейного упрочнения. Пусть напряжение на торце стержня

$$p = p(\tau)\,, \qquad l = 0 \tag{2.1}$$

заданная функция, убывающая на всем промежутке времени соударения $0 \leqslant \tau \leqslant \tau'$, так что

$$p(0) = p_{0m} \tag{2.2}$$

соответствует максимальному напряжению, которое одновременно является максимальным напряжением на волне Рахматулина.

Аппроксимируем зависимость $e = e(p)$ линейной функцией, что всегда можно сделать в интервале изменения p

$$p' \leqslant p \leqslant p_{0m}$$

если $p_{0m} \gg 0$ и $p_{0m} - p'$ мало. Тогда

$$u = \sqrt{\frac{de}{dp}} = u_m = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

Поскольку функция $p(\tau)$ убывающая, то на участке, где можно принять $u = u_m$ не зависящим от изменения p, волна разгрузки в плоскости $l\tau$ представится отрезком прямой $\tau = u_m l$ (фиг. 2).

Предположим, что для некоторого момента τ_1 напряжение на торце стержня $p(\tau_1)$ и напряжение на волне разгрузки p_{01}, соответствующее вершине характеристической ломаной A_1, известны. Построим $n+1$ вершину характеристической ломаной. На основании уравнения (1.9) с учетом (2.3) для $(n+1)$-го звена ломаной получим

$$p(\tau_{n+1}) = p_{0(n+1)} - \frac{1}{2}(u_m - 1)(p_{0n} - p_{0(n+1)})$$

Отсюда

$$p_{0(n+1)} = \frac{2}{u_m + 1}\, p(\tau_{n+1}) + q p_{0n} \tag{2.4}$$

Здесь через q обозначена постоянная величина

$$q = \frac{u_m - 1}{u_m + 1} < 1$$

Последовательное вычисление $p_{0(n+1)}$ по формуле (2.4) дает

$$p_{0(n+1)} = \frac{2}{u_m + 1}\left[p(\tau_{n+1}) + q p(\tau_n) + \cdots + q^k p(\tau_{n+1-k}) + \cdots + \right.$$
$$\left. + q^{n-1} p(\tau_2)\right] + q^n p_{01} \tag{2.5}$$

Последовательность τ_{n+1} легко определяется при сделанном ограничении (2.3). Действительно, из чертежа (фиг. 2) видно, что

$$\frac{1}{2} d\tau_n = \frac{\tau_n}{u_m} + \frac{1}{2}\frac{d\tau_n}{u_m}$$

Отсюда

$$\tau_{n+1} = \tau_n + d\tau_n = \frac{\tau_n}{q}$$

Следовательно

$$\tau_{n+1} = \frac{\tau_1}{q^n} \tag{2.6}$$

Подставляя полученное значение τ_{n+1} в уравнение (2.5), придем к выражению следующего вида:

$$p_{0(n+1)} = \frac{2}{u_m + 1}\left[p\left(\frac{\tau_1}{q^n}\right) + qp\left(\frac{\tau_1}{q^{n-1}}\right) + \cdots + q^k p\left(\frac{\tau_1}{q^{n-k}}\right) + \cdots + \right.$$

$$\left. + q^{n-1} p\left(\frac{\tau_1}{q}\right)\right] + q^n p_{01}$$

Положим

$$\frac{\tau_1}{q^n} = \tau, \qquad \frac{\tau_1}{q^{n-k}} = q^k \tau$$

Устремим теперь τ_1 к нулю, тогда $n \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} q^n p_{01} = 0$$

Таким образом, получим выражение $p_{0(n+1)} = p_0$ через значения напряжений на торце стержня в вершинах характеристической ломаной

$$p_0 = \frac{2}{u_m + 1} \sum_{n=0}^{n=\infty} q^n p(q^n \tau) \tag{2.7}$$

Остаточный член ряда r_n легко оценивается

$$r_n < \frac{2p_{0m}}{u_m + 1} \frac{q^n}{1 - q} = p_{0m} q^n \tag{2.8}$$

В частности, если функцию $p(\tau)$ для некоторого начального интервала времени можно считать линейной

$$p(\tau) = p_{0m} - k\tau$$

то получаем, что

$$p_{0m} - p_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{u_m}\right)[p_{0m} - p(\tau)]$$

Таким образом, мы можем получить значение напряжения в точке, отстоящей на конечном расстоянии от начала стержня. Для определения волны разгрузки в области, где кривизна кривой $e(p)$ значительна, можно применить метод, предложенный в работе [2].

Поступила 31 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 1.
2. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.