Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ОТ ЧЕТЫРЕХЧЛЕННЫХ АРГУМЕНТОВ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

С. А. Савин

(Харбин)

1. Условие независимости двух четырехчленных аргументов. Трехмерное уравнение Лапласа $\nabla^2 F(x, y, z) = 0$ будем решать при помощи функции $F(k_0, k)$ сперва от двух четырехчленных аргументов:

$$k_0 = \alpha_0 x + \varepsilon_0 y + \nu_0 z + \rho_0 r, \quad k = \alpha x + \varepsilon y + \nu z + \rho r \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \tag{1.1}$$

Составив якобиан для переменных k_0, k, r, легко убедиться, что условием независимости их будет

$$\alpha_0 : \varepsilon_0 : \nu_0 \neq \alpha : \varepsilon : \nu \tag{1.2}$$

Точно так же, составив функциональную матрицу для двух аргументов k_0 и k, нетрудно получить условие их независимости [1]

$$\left(\alpha_0 + \rho_0 \frac{x}{r}\right) : \left(\varepsilon_0 + \rho_0 \frac{y}{r}\right) : \left(\nu_0 + \rho_0 \frac{z}{r}\right) \neq \left(\alpha + \rho \frac{x}{r}\right) : \left(\varepsilon + \rho \frac{y}{r}\right) : \left(\nu + \rho \frac{z}{r}\right) \tag{1.3}$$

2. Общая формула лапласьяна функции двух аргументов. Образовав производные $\partial^2 F / \partial x^2$, $\partial^2 F / \partial y^2$ и $\partial^2 F / \partial z^2$ от $F(k_0, k)$ двух аргументов и сложив их, получаем

$$\nabla^2 F(k_0, k) = R \frac{\partial^2 F}{\partial k_0^2} + 2S \frac{\partial^2 F}{\partial k_0 \partial k} + T \frac{\partial^2 F}{\partial k^2} + P \frac{\partial E}{\partial k_0} + Q \frac{\partial F}{\partial k} \tag{2.1}$$

Здесь переменные коэффициенты R, S, T представляют собой [2]:

дифференциальные параметры первого рода

$$R(k_0) = \left(\frac{\partial k_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k_0}{\partial z}\right)^2, \qquad T(k) = \left(\frac{\partial k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial z}\right)^2 \tag{2.2}$$

дифференциальные параметры второго рода

$$S(k_0, k) = \frac{\partial k_0}{\partial x}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k_0}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{\partial k_0}{\partial z}\frac{\partial k}{\partial z} \tag{2.3}$$

Подставляя в эти формулы значения частных производных от аргументов (1.1) и принимая во внимание зависимости

$$\alpha_0 x + \varepsilon_0 y + \nu_0 z = k_0 - \rho_0 r, \qquad \alpha x + \varepsilon y + \nu z = k - \rho r$$

получаем значения дифференциальных параметров для аргументов (1.1):

$$R = \gamma_0 + \frac{2\rho_0 k_0}{r}, \qquad S = \beta + \frac{1}{r}(\rho k_0 + \rho_0 k), \qquad T = \gamma + \frac{2\rho k}{r} \tag{2.4}$$

Здесь γ_0, β, γ обозначают неопределенные постоянные величины

$$\gamma_0 = \alpha_0^2 + \varepsilon_0^2 + \nu_0^2 - \rho_0^2, \quad \beta = \alpha_0\alpha + \varepsilon_0\varepsilon + \nu_0\nu - \rho_0\rho, \quad \gamma = \alpha^2 + \varepsilon^2 + \nu^2 - \rho^2 \tag{2.5}$$

Коэффициенты P, Q в (2.1) представляют лапласьяны аргументов k_0 и k:

$$P = \nabla^2 k_0 = \frac{2\rho_0}{r}, \qquad Q = \nabla^2 k = \frac{2\rho}{r} \tag{2.6}$$

3. Первый вариант решения уравнения Лапласа и его характеристики. Пользуясь произвольностью восьми коэффициентов в аргументах (1.1), принимаем для них в обозначениях (2.5) зависимости

$$\gamma_0 = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0 \tag{3.1}$$

Тогда, приравняв нулю выражение лапласьяна (2.1) и сократив на общий множитель $2/r$, не равный нулю, получаем уравнение Лапласа

$$R\frac{\partial^2 F}{\partial k_0^2} + 2S\frac{\partial^2 F}{\partial k_0\,\partial k} + T\frac{\partial^2 F}{\partial k^2} + P\frac{\partial F}{\partial k_0} + Q\frac{\partial F}{\partial k} = 0 \tag{3.2}$$

где согласно (2.4) и (2.6)

$$R = \rho_0 k_0, \qquad 2S = \rho k_0 + \rho_0 k, \qquad T = \rho k, \qquad P = \rho_0, \qquad Q = \rho \tag{3.3}$$

Дифференциальное уравнение (3.2) второго порядка с коэффициентами (3.3), зависящими от двух аргументов (1.1), решается согласно Э. Гурса [3] при помощи дифференциального уравнения характеристик его

$$R\,(dk)^2 - 2S dk_0\,dk + T\,(dk_0)^2 = 0 \tag{3.4}$$

Разделив это уравнение на $(dk_0)^2$, получаем квадратное уравнение

$$R\lambda^2 - 2S\lambda + T = 0 \qquad (\lambda = dk\,/\,dk_0)$$

После подстановки сюда значений коэффициентов (3.3) находим два корня:

$$\lambda_1 = \frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \lambda_2 = \frac{k}{k_0} \tag{3.5}$$

Используя эти корни, квадратное уравнение (3.4) разлагаем на два множителя и получаем дифференциальные уравнения двух характеристик:

$$\rho\,dk_0 - \rho_0\,dk = 0, \qquad \frac{dk_0}{k_0} = \frac{dk}{k}$$

Имея в виду условие независимости (1.3), интегрируем эти уравнения. Получим

$$\rho k_0 - \rho_0 k = C_0, \qquad \frac{k_0}{k} = C_1 \tag{3.6}$$

4. Приведение уравнения (3.2) к каноническом форме и решение его. Приняв полученные интегралы (3.6) за новые переменные

$$u = \rho k_0 - \rho_0 k, \qquad v = \frac{k_0}{k} \tag{4.1}$$

уравнение (3.2) отнесем к его характеристикам.

Тогда будем иметь $F\,(k_0,\ k) = \theta\,(u,\ v)$, и уравнение (3.2) преобразуется:

$$R_1\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + 2S_1\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + T_1\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + P_1\frac{\partial\theta}{\partial u} + Q_1\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \tag{4.2}$$

Для получения выражений переменных коэффициентов этого уравнения образуем от $F\,(k_0,\ k) = \theta\,(u,\ v)$ пять частных производных:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial k_0^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial k_0 \partial k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial k^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial k_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial k}$$

умножим их соответственно на прежние коэффициенты $R,\ 2S,\ T,\ P,\ Q$ согласно (2.1) и результаты сложим. Таким образом, для коэффициентов в (4.2) получим

$$R_1 = R\left(\frac{\partial u}{\partial k_0}\right)^2 + 2S\frac{\partial u}{\partial k_0}\frac{\partial u}{\partial k} + T\left(\frac{\partial u}{\partial k}\right)^2$$

$$S_1 = R\frac{\partial u}{\partial k_0}\frac{\partial v}{\partial k_0} + S\left(\frac{\partial u}{\partial k_0}\frac{\partial v}{\partial k} + \frac{\partial v}{\partial k_0}\frac{\partial u}{\partial k}\right) + T\frac{\partial u}{\partial k}\frac{\partial v}{\partial k}$$

$$T_1 = R\left(\frac{\partial v}{\partial k_0}\right)^2 + 2S\frac{\partial v}{\partial k_0}\frac{\partial v}{\partial k} + T\left(\frac{\partial v}{\partial k}\right)^2$$

$$P_1 = R\frac{\partial^2 u}{\partial k_0^2} + 2S\frac{\partial^2 u}{\partial k_0 \partial k} + T\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + P\frac{\partial u}{\partial k_0} + Q\frac{\partial u}{\partial k}$$

$$Q_1 = R\frac{\partial^2 v}{\partial k_0^2} + 2S\frac{\partial^2 v}{\partial k_0 \partial k} + T\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} + P\frac{\partial v}{\partial k_0} + Q\frac{\partial v}{\partial k}$$

Подставляя сюда значения прежних коэффициентов из (3.3) и производных о новых переменных (4.1), находим значения новых коэффициентов:

$$R_1 = T_1 = P_1 = Q_1 = 0, \qquad S_1 = -\left[\rho^2\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 + \rho_0^2\right] = -(\rho^2 v^2 + \rho_0^2)$$

Тогда уравнение (4.2) приводится к канонической форме

$$(\rho^2 v^2 + \rho_0^2)\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$$

гиперболического типа. Отсюда видим согласно (4.1), что интегралом рассматриваемого уравнения Лапласа будет выражение

$$F(k_0, k) = F_0(\rho k_0 - \rho_0 k) + F_1(k_0 / k) \tag{4.3}$$

где F_0 и F_1 — произвольные функции, k_0 и k — четырехчленные в общем случае аргументы, определяемые по формулам (1.1), в которых произвольные постоянные коэффициенты связаны условиями (3.1) согласно обозначениям (2.5).

5. Примеры интегралов, удовлетворяющих условиям (3.1). Согласно (2.5) условия (3.1) для аргументов (1.1) будут

$$\alpha_0^2 + \varepsilon_0^2 + \nu_0^2 = \rho_0^2, \quad \alpha^2 + \varepsilon^2 + \nu^2 = \rho^2, \quad \alpha_0\alpha + \varepsilon_0\varepsilon + \nu_0\nu = \rho_0\rho \tag{5.1}$$

Этим условиям удовлетворяют аргументы, например, следующих функций

$$F\left(\frac{x \pm r}{x \pm iy + z \pm r}\right), \quad F\left(\frac{z - r}{x \pm iy - z + r}\right), \quad F\left(\frac{r\cos\varphi \pm iy - z\sin\varphi}{x\sin\varphi + z\cos\varphi \mp r}\right)$$

В первом интеграле двойные знаки взаимно соответственны. В третьем интеграле φ — произвольная постоянная; частный вид этого интеграла при $\varphi = 0$ указан Донкином [4].

6. Второй вариант решения уравнения Лапласа при помощи функции от одного четырехчленного аргумента. В этом случае на основании (2.1) получаем

$$\nabla^2 F(k) \equiv T\frac{\partial^2 F}{\partial k^2} + Q\frac{\partial F}{\partial k} = 0 \qquad \left(T = \gamma + \frac{2\rho k}{r}, \; Q = \frac{2\rho}{r}\right) \tag{6.1}$$

где $k = \alpha x + \varepsilon y + \nu z + \rho r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, выражения для T и Q указаны согласно (2.5) и (2.6) и $\gamma = \alpha^2 + \varepsilon^2 + \nu^2 - \rho^2$ согласно (2.4).

Для интегрирования уравнения (6.1), умножая на dk, преобразовываем его:

$$\frac{\partial^2 F / \partial k^2}{\partial F / \partial k} dk + \frac{Q}{T} dk = 0$$

и затем коэффициенты аргумента k, входящего в дробь Q / T, подчиняем условию

$$\gamma = 0 \quad \text{или} \quad \alpha^2 + \varepsilon^2 + \nu^2 = \rho^2 \tag{6.2}$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial^2 F / \partial k^2}{\partial F / \partial k} dk + \frac{dk}{k} = 0$$

Интегрируя это уравнение по k дважды, имеем

$$F = C \ln k = C \ln (\alpha x + \varepsilon y + \nu z + \rho r) \tag{6.3}$$

где постоянные коэффициенты четырехчленного аргумента связаны условием (6.2)

Этому условию удовлетворяет, например, аргумент k:

$$k = x \cos\varphi \cos\psi + y \cos\varphi \sin\psi + z \sin\varphi \pm r$$

где φ и ψ — произвольные постоянные.

Полагая поочередно в формуле (6.3) коэффициенты равными:

$$(\pm\alpha = \rho = 1,\ \varepsilon = \nu = 0), \quad (\pm\varepsilon = \rho = 1,\ \nu = \alpha = 0), \quad (\pm\nu = \rho = 1,\ \alpha = \varepsilon = 0)$$

получаем три пары интегралов уравнения Лапласа:

$$F = \ln (r \pm x), \qquad F = \ln (r \pm y), \qquad F = \ln (r \pm z)$$

которые Буссинеск назвал функциями трехмерного логарифмического потенциала [5]. Функция $F = \ln (r + z)$ была использована Буссинеском для решения уравнений равновесия теории упругости [6]. Она применяется в выражениях перемещений в задаче Буссинеска о распределении напряжений от действия сосредоточенной силы на упругий массив [7].

7. Об интеграле F_0. В формуле (4.3) был получен согласно обозначению (4.1) интеграл F_0 трехмерного уравнения Лапласа:

$$F_0(u) = F(\rho k_0 - \rho_0 k)$$

Раскрывая этот аргумент, согласно (1.1) имеем

$$u = (\rho\alpha_0 - \rho_0\alpha)\, x + (\rho\varepsilon_0 - \rho_0\varepsilon)\, y + (\rho\nu_0 - \rho_0\nu)\, z$$

т. е. получаем трехчленный аргумент, в котором восемь неопределенных постоянных коэффициентов связаны условиями (5.1).

Для решения трехмерного уравнения Лапласа при помощи функции от более простого трехчленного агрумента может быть применен аргумент k, положив коэффициент $\rho = 0$, и тогда вместо условия (6.2) получаем зависимость $\alpha^2 + \varepsilon^2 + \nu^2 = 0$.

Этому условию, например, удовлетворяет интеграл

$$F(k) = F(x \cos\varphi \pm iy + z \sin\varphi)$$

где φ — неопределенный постоянный угол в радианах.

Интеграл с функцией от одного трехчленного аргумента, подчиненного условию (7.1.), был применен Б. Г. Галеркиным в работе 1930 г. для решения уравнений равновесия Навье-Коши [8].

Поступила 25 IX 1950 Харбинский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Гос. изд. Украины. 1922.
2. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris. 1866. P. 69.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. ГТТИ. 1933. Т. III. Ч. I. Стр. 71—74.
4. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа. ГТТИ. 1934. Ч. II. Гл. XVIII. Стр. 228.
5. Pigeaud G. Résistance des matériaux et élasticité. Paris. 1928. P. 667—668.
6. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат. 1947. Стр. 154.
7. Савин С. А. Обобщение функций Герца и Буссинэ. Известия и труды Харбинского политехнического института. 1931. Т. IV. № 6.
8. Galerkin B. G. Contribution à la solution général du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions. Comptes Rendus de l'Académie. 1930. T. 190. № 18.