Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ПЕРВОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Д. З. Авазашвили

(Тбилиси)

Как известно, первую граничную задачу электродинамики для конечной области можно сформулировать следующим образом: *требуется определить электромагнитное поле в области V, ограниченной замкнутой поверхностью S, по заданным на ней тангенциальным составляющим электрического вектора.*

Эта задача была решена Я. Фельдом[1] в 1944 г. для таких поверхностей S, для которых известны электрический и магнитный составляющие векторы вспомогательного поля $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, в предположении, что поверхность S имеет непрерывную касательную плоскость и непрерывную кривизну.

Ниже эта задача исследуется для полупространства; при этом, как и в [1], рассматриваются только гармонические колебания с угловой частотой ω.

§ 1. Пусть верхнее полупространство T $(z>0)$, представляющее собой однородное электромагнитное поле, ограничено плоскостью S $(z=0)$. Обозначим через векторы $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ и $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$ электрическую и магнитную составляющие электромагнитного поля, через ε, σ, μ — соответственно диэлектрическую постоянную, коэффициент проводимости и магнитную проницаемость.

На основании классической теории электродинамики поставленная задача приводится к следующей математической задаче.

Построить вектор-функции $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ и $\mathbf{H}(H_x, H_y, H_z)$, удовлетворяющие условиям:

$$1)\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma-i\varepsilon\omega}{c}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}\qquad (\text{внутри } T)\tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{4\pi}{-4\pi\sigma+i\varepsilon\omega}\operatorname{div}\mathbf{J},\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0$$

$$2)\qquad E_x^+=f,\quad E_y^+=g\qquad (\text{на } S)$$

$$3)\qquad \frac{d\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{dR}-ik\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=e^{ikR}\,o(R^{-1})\qquad (\text{в бесконечности})$$

В случае вещественного k условие 3 заменяется условием

$$\frac{d\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}}{dR}-ik\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=o(R^{-1})$$

Здесь введены следующие обозначения:

$\mathbf{J}(J_x, J_y, J_z)$ — заданный непрерывный и до известного порядка непрерывно дифференцируемый вектор в полупространстве T (источник электромагнитных колебаний);

E_x^+, E_y^+ — граничные значения касательных компонент вектора $\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$ на плоскости S;

$f(x, y)$, $g(x, y)$ — известные непрерывные ограниченные функции на всей плоскости S;

c — скорость распространения света в пустоте;

k — волновое комплексное число; R — радиус-вектор

$$k^2=\frac{\omega^2\varepsilon\mu+i4\pi\omega\mu\sigma}{c^2},\quad \operatorname{Im}k>0,\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Наконец, $o(R^{-1})$ обозначает величину, произведение которой на R стремится к нулю при $R \to \infty$.

Задача (1.1) для системы однородных дифференциальных уравнений Максвелла ($\mathbf{J} \equiv 0$) в случае вещественного k ($\sigma = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$) была решена Люнебергом [2]. В работе Люнеберга на $f(x, y)$ и $g(x, y)$ налагаются дополнительные условия:

$$|f| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < \frac{A}{R}$$
$$|g| < \frac{B}{R}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| < \frac{B}{R}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < \frac{B}{R} \qquad \text{(на бесконечности)} \qquad (1.2)$$

где A и B — постоянные, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, а компоненты E_x, E_y, E_z вектора $\mathbf{E}$ удовлетворяют условиям на бесконечности (1.3)

$$|u| < \frac{C}{R}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial R}\right| < \frac{C}{R}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial R} - iku\right| < \frac{D}{R^2} \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \qquad (u = E_x,\ E_y,\ E_z)$$

C, D — постоянные, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Так как в рассматриваемом случае k — комплексная постоянная, то условия (1.2) можно заменить непрерывностью и ограниченностью заданных функций f и g, а условия (1.3) — условием 3.

§ 2. Используя некоторые результаты И. Н. Векуа [3], можно доказать [4], что задача (1.1) имеет единственное решение, т. е. соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. Переходим к решению задачи (1.1).

Из (1.1) вытекает, что E_x и E_y удовлетворяют следующим условиям:

$$1)\quad \Delta E_x + k^2 E_x = -4\pi\varphi_x, \qquad \Delta E_y + k^2 E_y = -4\pi\varphi_y \qquad \text{(внутри } T\text{)}$$
$$2)\quad E_x^+ = f, \qquad E_y^+ = g \qquad \text{(на } S\text{)} \qquad (2.1)$$
$$3)\quad \frac{dE_x}{dR} - ikE_x = e^{ikR} o(R^{-1}), \qquad \frac{dF_y}{dR} - ikE_y = e^{ikR} o(R^{-1}) \qquad \text{(в бесконечности)}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\varphi_x = \frac{i\omega\mu}{c^2} J_x + \frac{1}{4\pi\sigma - i\varepsilon\omega} \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\mathbf{J}), \qquad \varphi_y = \frac{i\omega\mu}{c^2} J_y + \frac{1}{4\pi\sigma - i\varepsilon\omega} \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\mathbf{J})$$

Легко доказать, что условиям (2.1) удовлетворяют следующие функции

$$E_x(M) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S f(N) \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) ds + \iiint\limits_T \varphi_x(N)\, G\, d\tau$$
$$E_y(M) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \text{[illegible]}\, G\, d\tau \qquad G = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \qquad (2.2)$$

где G есть функция Грина для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в полупространстве [5], $N(\xi, \eta, \zeta)$ — точка интегрирования, $M(x, y, z)$ — произвольная точка области T,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \qquad r_1 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}$$

Заметим, что в данном случае внутренняя нормаль области T совпадает с положительным направлением оси z и потому

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = -\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

Введем следующие обозначения:

$$P(M) = \iiint\limits_T \varphi_x(N)\, G\, dl, \qquad Q(M) = \iiint\limits_T \varphi_y(N)\, G\, dl \qquad (2.3)$$

Ясно, что интегралы существуют, так как $\operatorname{Im} k > 0$, а функции φ_x и φ_y ограничены.

Для определения E_z напишем третье уравнение (1.1) в развернутом виде

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{4\pi}{-4\pi\sigma + i\varepsilon\omega} \operatorname{div} \mathbf{J}$$

Отсюда легко получим

$$E_z(M) = \int \left[\frac{4\pi}{-4\pi\sigma + i\varepsilon\omega} \operatorname{div} \mathbf{J} - \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] dz \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2) в (2.4), после некоторых преобразований получим

$$E_z(M) = -\frac{1}{2\pi} \int \left[f(N) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) + g(N) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] ds + L(M) \tag{2.5}$$

где

$$L(M) = \int \left[\frac{4\pi}{-4\pi\sigma + i\varepsilon\omega} \operatorname{div} \mathbf{J} - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right] dz$$

Для нахождения компонент H_x, H_y, H_z вектора $\mathbf{H}$ спроектируем второе равенство (1.1) на оси x, y, z; получим

$$H_x = a\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right), \quad H_y = a\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \quad H_z = a\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \quad \left(a = \frac{c}{i\omega\mu}\right) \tag{2.6}$$

Подставим в (2.6) E_x, E_y, E_z из (2.2) и (2.5). После преобразований получим

$$H_x(M) = \frac{a}{2\pi} \iint_S \left[f(N) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - g(N) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - k^2 g(N) \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds + W_1(M)$$

$$H_y(M) = \frac{a}{2\pi} \iint_S \left[f(N) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - g(N) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) + k^2 f(N) \frac{e^{ikr}}{r} \right] ds + W_2(M)$$

$$H_z(M) = \frac{a}{2\pi} \iint_S \left[f(N) \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - g(N) \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \xi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] ds + W_3(M) \tag{2.7}$$

где

$$W_1 = a\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \quad W_2 = a\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial L}{\partial x}\right), \quad W_3 = a\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Формулы (2.2), (2.5) и (2.7) дают решение задачи (1.1).

Замечание. Если вся плоскость S $(z = 0)$ идеально проводящая, за исключением отверстия S_0, ограниченного произвольной кривой Γ, то в (2.2), (2.5) и (2.7) двойные интегралы будут распространены только на отверстие S_0, так как касательная компонента электрического вектора $\mathbf{E}$ равна нулю на идеально проводящей поверхности [5]. В этом случае k может быть как вещественной, так и комплексной постоянной, а $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — непрерывные функции на всем отверстии S_0.

Поступила 16 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Граничная задача электродинамики и интегральные уравнения некоторых задач диффракции. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1944. Т. XIV. Вып. 9. Стр. 130—141.
2. Luneberg R. K. Mathematical theory of optics. Proceedings, Brown University. 1944 (mimeographed).
3. Векуа И. Н. О метагармонических функциях. Труды Тбилисского математического института. 1943. Т. XII. Стр. 105—174.
4. Авазашвили Д. З. Теорема единственности решения электромагнитных уравнений Максвелла в неоднородной бесконечной среде. Труды Тбилисского математического института. 1940. Т. VIII. Стр. 109—134.
5. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики (русский перевод). ОНТИ. 1937.