Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ ЗАДАННЫХ ВНЕШНИХ СИЛАХ НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА

С. Х. Шаташвили

(Тбилиси)

В работе рассматривается задача об установившихся колебаниях конечного упругого тела с заданными напряжениями на границе. Эта задача была с достаточной полнотой решена В. Д. Купрадзе [1]. Позже А. М. Кусков привел ее к системе сингулярных уравнений [2].

При помощи приема, близко примыкающего к методу, предложенному Д. И. Шерманом [3, 4], здесь строятся некоторые частные решения [5], при помощи которых указанная задача для конечной области, ограниченной выпуклой поверхностью, легко приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма, разрешимой почти для всех значений частоты колебаний. Эта система существенно отлична от системы Фредгольма, полученной В. Д. Купрадзе.

1. Пусть S — выпуклая поверхность, удовлетворяющая условию Ляпунова и ограничивающая область, заполненную упругой средой. Постоянные Ляме обозначим через λ и μ; далее, пусть $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ — соответственно точки области и поверхности в некоторой системе декартовых координат, и n — внутренняя нормаль к S в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

Скорости продольного и поперечного колебаний a и b определяются формулами

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.1}$$

где ρ — плотность упругой среды.

Обозначим через $\Phi(x, y, z)$ и $\Psi(x, y, z)$ соответственно скалярный и векторный потенциалы упругой среды. Как известно, компоненты вектора смещения u, v, w выражаются через скалярный потенциал и составляющие Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z векторного потенциала

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.2}$$

и $\Phi(x, y, z)$ и $\Psi(x, y, z)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\triangle\Phi + k_1^2\Phi = 0, \qquad \triangle\Psi + k_2^2\Psi = 0 \qquad \left(k_1^2 = \frac{\omega^2}{a^2},\ k_2^2 = \frac{\omega^2}{b^2}\right) \tag{1.3}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа, а ω — частота колебания.

Задача определения напряженного состояния в области по заданным поверхностным внешним силам сводится к отысканию решения уравнений (1.3), непрерывного вплоть до поверхности S с частными производными двух первых порядков и удовлетворяющего на S условиям

$$\begin{aligned} \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z &= \mu f_1(Q_0) \\ \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z &= \mu f_2(Q_0) \\ \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z &= \mu f_3(Q_0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $f_1(Q_0)$, $f_2(Q_0)$, $f_3(Q_0)$ — заданные непрерывные в смысле Гельдера функции; $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ — компоненты тензора напряжений, выражаемые через компоненты вектора смещения [6,7]; $\alpha = \cos(n_0, x)$, $\beta = \cos(n_0, y)$, $\gamma = \cos(n_0, z)$ — направляющие косинусы нормали n_0 к поверхности S в точке Q_0.

Для простоты поместим начало координат в точке Q_0 и ось z направим по внешней нормали к S. При этом граничные условия (1.4) принимают вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -f_1(Q_0), \qquad \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = -\mu f_3(Q_0) \\ &\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -f_2(Q_0), \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.5}$$

2. Введем следующие обозначения

$$F_j = \frac{k_1^2}{2}\int_N^\infty \frac{I_0(r\rho)}{\rho\sqrt{\rho^2 - k_j^2}} \exp\left(z\sqrt{\rho^2 - k_j^2}\right) d\rho \quad (r = \sqrt{x^2+y^2},\ z < 0) \tag{2.1}$$
$$(j = 1, 2)$$
$$f^{(j)}(R) = \frac{1}{R}(\exp ik_j R) \qquad (R = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

Здесь значение радикала $\sqrt{\rho^2 - k_j^2}$ следует брать положительным; N — некоторое положительное фиксированное число, превосходящее k_j $(j=1,2)$.

Легко видеть, что выражение F_j $(j=1,2)$ удовлетворяет в полупространстве $z<0$ соответствующему из уравнений (1.3). Используя некоторые интегральные формулы для функции Бесселя [8], можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial y^2} = -\frac{1}{R} + \cdots, \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = \cdots \tag{2.2}$$

где под многоточием подразумеваются непрерывные в замкнутой области функции. Последние свойства интегралов F_1 и F_2 будут существенно использованы при исследовании рассматриваемой задачи.

Будем искать скалярный и векторный потенциалы в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{A}{2\pi}\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\right)\mu_1(Q) + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mu_2(Q) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mu_3(Q)\right] dS$$

$$\Psi_x(x, y, z) = \frac{A}{2\pi}\iint_{(S)}\left[\frac{\partial f^{(2)}}{\partial z}\mu_2(Q) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}\mu_3(Q)\right] dS$$

$$\Psi_y(x, y, z) = \frac{A}{2\pi}\iint_{(S)}\left[\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}\mu_3(Q) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial z}\mu_1(Q)\right] dS \qquad \left(A = \frac{1}{k_1^2 = k_2^2}\right) \tag{2.3}$$

$$\Psi_z(x, y, z) = \frac{A}{2\pi}\iint_{(S)}\left[\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial y} - 2\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)\mu_1(Q) - \left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x} - 2\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)\mu_2(Q)\right] dS$$

где $\mu_1(Q)$, $\mu_2(Q)$, $\mu_3(Q)$ — неизвестные функции, подлежащие определению, а двойные интегралы распространяются на S. Очевидно, что функции (2.3) являются решениями уравнений (1.3).

Пользуясь известными формулами

$$\lim_{p\to Q_0} \iint \mu(Q) \frac{d}{dn}\frac{1}{R}\, dS = 2\pi\mu(Q_0) + \iint \mu(Q)\left(\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\right)_0 dS$$

$$\lim_{p\to Q_0} \iint \mu(Q)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 \frac{d}{dn}\frac{1}{R}\, dS = \frac{2}{3}\pi\mu(Q_0) + \iint \mu(Q)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0^2 \left(\frac{d}{\partial n}\frac{1}{R}\right)_0 dS$$

$$\lim_{p\to Q_0} \iint \mu(Q)\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\, dS = \iint \mu(Q)\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\right)_0 dS$$

и им аналогичными, можно показать, что на основании (1.5) определение функций $\mu_1(Q)$, $\mu_2(Q)$, $\mu_3(Q)$ приводится к решению системы уравнений Фредгольма

$$\mu_j(Q_0) + \sum_{e=1}^{3} \iint_{(S)} K_e^{(j)}(Q_0, Q)\,\mu_e(Q)\, dS = -f_j(Q_0) \qquad (j = 1, 2, 3) \qquad (2.4)$$

где ядра $K_e^{(j)}(Q_0, Q)$ $(j, e = 1, 2, 3)$ абсолютно интегрируемы на S; из них, например,

$$K_1^{(1)}(Q_0, Q) = 3\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0^2 \left(\frac{d}{\partial n}\frac{1}{R}\right)_0 + \cdots$$

$$K_2^{(1)}(Q_0, Q) = 3\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d}{\partial n}\frac{1}{R}\right)_0 + \cdots$$

Аналогичный вид имеют остальные ядра, причем под многоточием здесь подразумеваются слагаемые с особенностью не выше R^{-1}.

Ядра системы (2.4) являются регулярными функциями параметра ω. При $\omega = 0$ из (2.4) получается система уравнений Фредгольма для статической задачи теории упругости. Последняя (если даже опустить существенный вопрос о представимости решения статической задачи в форме соответствующих этой системе потенциалов) будет разрешима лишь в том случае, если заданные внешние силы удовлетворяют условиям статики. Отсюда следует, что $\omega = 0$ является особой точкой резольвенты системы (2.4). Однако поступая, как Д. И. Шерман [9], можно непосредственно доказать разрешимость системы (2.4) для значений параметра ω, лежащих в сколь угодно малой окрестности $\omega = 0$; тем самым на основании теоремы Тамаркина [10] будет установлена разрешимость системы почти для всех значений параметра ω.

Поступила 8 V 1951

Кутаисский педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. 1950.
2. Кусков А. М. Диффракция упругих установившихся колебаний. ДАН СССР. 1950. Т. LXX. № 2.
3. Шерман Д. И. Колебание упругого полупространства при заданных смещениях или внешних сил на границе. Тр. Сейсмологического ин-та 1946. № 118.
4. Шерман Д. И. Об установившихся упругих колебаниях при заданных смещениях на границе среды. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.
5. Шаташвили С. X. Об установившихся колебаниях при заданных смещениях на поверхности упругого тела. ДАН СССР. 1950. Т. LXXI. № 2.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. 1949.
7. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М. 1947.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. 1949.
9. Шерман. Д. И. К задаче Дирихле и Неймана в теории установившихся колебаний. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
10. Tamarkin T. Annals of Mathematics. Second ser. 1927. Vol. 28. No. 2.