Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Васильев

(Иркутск)

В настоящей работе применяется метод А. И. Некрасова к решению линейных интегро-дифференциальных уравнений вида (0.1)

$$L[z(x)] + \lambda\int_a^b \left[K_0(x, y)\, z(y) + K_1(x, y)\frac{dz(y)}{dy} + \cdots + K_m(x, y)\frac{d^m z(y)}{dy^m}\right]dy = 0$$

где λ — параметр, а оператор L определяется так:

$$L[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\, z(x)$$

Уравнение (0.1) назовем обобщенным однородным линейным интегро-дифференциальным уравнением. В дальнейшем рассмотрим два случая.

§ 1. Пусть $m < n$. В этом случае на функции $K_\nu(x, y)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ налагаются обычные условия, каким удовлетворяют ядра линейных интегральных уравнений. Положим

$$\frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\, z(x) = F(x) \tag{1.1}$$

Пользуясь методом вариаций произвольных постоянных, найдем общий интеграл этого уравнения:

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \cdots + c_n z_n(x) + \int^x \frac{\Delta_1(\eta)\, z_1(x) + \cdots + \Delta_n(\eta)\, z_n(x)}{\Delta(\eta)} F(\eta)\, d\eta \tag{1.2}$$

где $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения, $\Delta(x)$— определитель Вронского, $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)$— его миноры, взятые с их знаками, $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные; значок x над знаком интеграла указывает на то, что после интегрирования буква η должна быть заменена на x. Введем обозначение

$$P[x, z(y)] = K_0(x, y)\, z(y) + K_1(x, y)\frac{dz(y)}{dy} + \cdots + K_m(x, y)\frac{d^m z(y)}{dy^m} \tag{1.3}$$

Подставляя значения $z(y)$, $dz(y)/dy, \ldots, d^m z(y)/dy^m$ из формулы (1.2) в выражение (1.3), получим

$$P[x, z(y)] = \{G_\nu(y)\, K_\nu(x, y)\} + \int^y \{H_\nu(\eta, y)\, K_\nu(x, y)\}\, F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \tag{1.4}$$

В уравнении (1.4) функции $G_\nu(y)$ и $H_\nu(y)$ определяются формулами

$$G_\nu(y) = C_1 z_1^{(\nu)}(y) + \cdots + C_n z_n^{(\nu)}(y)$$

$$H_\nu(\eta, y) = \Delta_1(\eta) z^{(\nu)}(y) + \cdots + \Delta_n(\eta) z_n^{(\nu)}(y)$$

причем $z_k^{(\nu)}(y)$ означает производную поряка ν.

Здесь и в дальнейшем условимся в следующем специальном обозначении, а именно, во всех случаях произведение двух величин с одинаковыми индексами, стоящее в фигурных скобках, понимать как сумму произведений этих величин от 0 до m; таким образом, например, в (1.4)

$$\{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} =$$

$$= H_0(\eta, y) K_0(x, y) + H_1(\eta, y) K_1(x, y) + \cdots + H_m(\eta, y) K_m(x, y)$$

На основании выражений (1.4) и (1.1) уравнение (0.1) можно представить в виде

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[\{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F(\eta) \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \right] dy = 0 \quad (1.5)$$

Если из интегрального уравнения (1.5) определить неизвестную функцию $F(x)$ и подставить в общий интеграл (1.2), то тем самым будет найдено решение интегро-дифференциального уравнения (0.1).

Будем решать уравнения (1.5), не накладывая ограничений на параметр λ. Возьмем две функции:

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} \frac{dx_1}{\Delta(x_1)} + \quad (1.7)$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b dy_1 dy_2 \int^{y_1} \int^{y_2} \begin{vmatrix} \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_1, y_2)\} \\ \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_2, y_2)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)} + \cdots$$

$$D(x, y; \lambda) = \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \lambda \int_a^b dy_1 \times \quad (1.8)$$

$$\times \int^{y_1} \begin{vmatrix} \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x, y_1)\} \\ \{G_\nu(y) K_\nu(x_1, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1}{\Delta(x_1)} + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a dy_1 dy_2 \times$$

$$\times \int^{y_1} \int^{y_2} \begin{vmatrix} \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x, y_2)\} \\ \{G_\nu(y) K_\nu(x_1, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_1, y_2)\} \\ \{G_\nu(y) K_\nu(x_2, y)\} & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_2, y_1)\} & \{H_\nu(x_2, y_2) K_\nu(x_2, y_2)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1 dx_2}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)} + \cdots$$

При помощи неравенства Адамара легко показать, что ряды (1.7) и (1.8) абсолютно сходятся при всех λ, причем последний ряд равномерно сходится относительно (x, y) в квадрате $(a \leqslant x \leqslant a,\ a \leqslant y \leqslant b)$.

Из разложения (1.8) непосредственно следует, что $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$ связаны между собой соотношением

$$D(x, s; \lambda) = D(\lambda)\{G_\nu(s) K_\nu(x, s)\} - \lambda \int_a^b dy \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} D(\eta, s; \lambda) \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \tag{1.9}$$

где s — произвольное, но постоянное значение y.

Теорема 1. Если λ не есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$, то уравнение (1.5) имеет решение, определяемое формулой

$$F(x) = -\frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D(x, y; \lambda)\, dy \tag{1.10}$$

Действительно, подставляя функцию $F(x)$ в уравнение (1.5), имеем

$$\int_a^b \Big[D(x, s; \lambda) - D(\lambda)\{G_\nu(s) K_\nu(x, s)\} + \\ + \lambda \int_a^b dy \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} D(\eta, s; \lambda) \frac{d\eta}{\Delta(\eta)} \Big] ds = 0$$

что является тождеством в силу (1.9).

Для удобства исследования решения (1.10) представим выражение $D(x, y; \lambda)$ в другой форме:

$$D(x, y; \lambda) = G_\nu(y)\, Д_\nu(x, y; \lambda)$$

где

$$Д_\nu(x, y; \lambda) = K_\nu(x, y) + \lambda \int_a^b dy_1 \int^{y_1} \begin{vmatrix} K_\nu(x, y) & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x, y_1)\} \\ K_\nu(x_1, y) & \{H_\nu(x_1, y_1) K_\nu(x_1, y_1)\} \end{vmatrix} \frac{dx_1}{\Delta(x_1)} + \ldots$$

Предположим, что при определенном значении λ

$$\int_a^b G_0(y)\, Д_0(x, y; \lambda)\, dy = 0, \ldots, \int_a^b G_m(y)\, Д_m(x, y; \lambda)\, dy = 0 \tag{1.11}$$

и, следовательно,

$$\int_a^b D(x, y; \lambda)\, dy = 0 \tag{1.12}$$

Тогда при $D(\lambda) \neq 0$ уравнение (1.5) имеет решение $F(x) = 0$.

Если в условия (1.11) подставить значения $Д_0(x, y; \lambda), \ldots, Д_m(x, y; \lambda)$ или в выражение (1.12) значение $D(x, y; \lambda)$, то легко заметить, что эти условия будут удовлетворяться только тогда, когда при любом x имеют место следующие соотношения:

$$\int_a^b G_0(y)\,K_0(x, y)\,dy = 0, \ldots, \quad \int_a^b G_m(y)\,K_m(x, y)\,dy = 0 \qquad (1.13)$$

Если $D(\lambda) = 0$ при каком-либо значении параметра λ и выполняются условия (1.13), то, как это видно из соотношения (1.9), уравнение (1.5) будет иметь решение $F(x) = D(x, s; \lambda)$ где s — произвольная постоянная величина. Если $Д_0\ (x, y; \lambda), \ldots, Д_m(x, y; \lambda)$ при определенном λ тождественно равняется нулю, то и $D(x, y; \lambda) \equiv 0$.

Если при этом λ и знаменатель формулы (1.10) равняются нулю, то λ — кратный корень уравнению $D(\lambda) = 0$.

Для отыскания решения в этом случае составим функцию

$$D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x_1, y_1)\} & \{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x_1, y_2)\} \\ \{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x_2, y_1)\} & \{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x_2, y_2)\} \end{vmatrix} + \lambda \int_a^b dy_2 \times$$

$$\times \int^{y_2} \begin{vmatrix} \{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x_1, y_1)\} & \{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x_1, y_2)\} & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_1, y_3)\} \\ \{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x_2, y_1)\} & \{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x_2, y_2)\} & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_2, y_3)\} \\ \{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x_3, y_1)\} & \{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x_3, y_2)\} & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_3, y_3)\} \end{vmatrix} \frac{dx_3}{\Delta(x_3)} + \ldots \qquad (1.14)$$

Функции (1.8) и (1.14) связаны между собой соотношением

$$D\begin{pmatrix} x & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} = D(x_2, y_2; \lambda)\{G_\nu(y_1)\,K_\nu(x, y_1)\} - D(x_2, y_1; \lambda)\{G_\nu(y_2)\,K_\nu(x, y_2)\} -$$

$$- \lambda \int_a^b dy \int^y \{H_\nu(\eta, y)\,K_\nu(x, y)\}\,D\begin{pmatrix} \eta & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} d\eta \qquad (1.15)$$

Из формулы (1.15) следует, что если $D(x, y; \lambda) \equiv 0$, то при выполнении условий (1.13) интегральное уравнение (1.5) имеет два решения:

$$F_1(x) = D\begin{pmatrix} x & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix}, \qquad F_2(x) = D\begin{pmatrix} x_1 & x & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 — произвольные постоянные. Так как $F_1(x_2) = 0$ и $F_2(x_1) = 0$, то эти решения линейно независимы между собой.

Преобразуем функцию $D(\lambda)$, определенную формулой (1.14), и найдем вторую производную от $D(\lambda)$:

$$D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} = \sum_{q=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m} G_q(y_1)\,G_\nu(y_2)\,Д_{q\nu}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix}$$

где

$$Д_{q\nu}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \lambda \\ y_1 & y_2 & \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K_q(x_1, y_1) & K_\nu(x_1, y_2) \\ K_q(x_2, y_1) & K_\nu(x_2, y_2) \end{vmatrix} +$$

$$+ \lambda \int_a^b dy_3 \int^{y_3} \begin{vmatrix} K_q(x_1, y_1)\,K_\nu(x_1, y_2) & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_1, y_3)\} \\ K_q(x_2, y_1)\,K_\nu(x_2, y_2) & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_2, y_3)\} \\ K_q(x_3, y_1)\,K_\nu(x_3, y_2) & \{H_\nu(x_3, y_3)\,K_\nu(x_3, y_3)\} \end{vmatrix} \frac{dx_3}{\Delta(x_3)} + \ldots$$

Вторая производная от $D(\lambda)$ может быть приведена к виду

$$D''(\lambda)=\int\limits_a^b\int\limits_a^b dy_1 dy_2 \int^{y_1}\int^{y_2}\sum_{q=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{m} H_q(x_1, y_1) H_\nu(x_2, y_2) Д_{q\nu}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\lambda\Bigr) \frac{dx_1\, dx_2}{\Delta(x_1)\Delta(x_2)}$$

Если не все $Д_{q\nu}$ равны нулю, то и

$$D\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\lambda\Bigr)\neq 0$$

а также не равна нулю $D''(\lambda)$. Тогда λ — двукратный корень уравнения $D(\lambda)=0$, а функции (1.16) — два линейно независимых решения, соответствующие этому корню.

Если $D(\lambda)=0$ и все $Д_q$ и $Д_{q\nu}$ тождественно равны нулю, то λ — корень уравнения $D(\lambda)=0$ кратности выше второй. В этом случае для отыскания решения уравнения (1.5), отличного от нуля, нужно обращаться к минорам третьего порядка и т. д.

§ 2. Пусть $m \geqslant n$. Положим $m=n+p$, где p — любое целое число или нуль. На функции $K_\nu(x, y)$ $(\nu=0, 1, \ldots, m)$ помимо общих условий § 1 наложим одно дополнительное условие: эти функции можно дифференцировать $p+1$ раз по x.

Взяв от уравнения (0.1) производную $p+1$-го порядка, получим уравнение, в котором $m<n$:

$$\frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left[\frac{d^n z(x)}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1} z(x)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x) z(x)\right]+$$

$$+\lambda\int\limits_a^b\left[\frac{\partial^{p+1} K_0(x, y)}{\partial x^{p+1}}+\frac{\partial^{p+1} K_1(x, y)}{\partial x^{p+1}}\frac{dz(y)}{dy}+\cdots+\frac{\partial^{p+1} K_m(x, y)}{\partial x^{p+1}}\frac{d^m z(y)}{dy^m}\right]dy=0$$

Применяя к этому уравнению те же рассуждения, что и в § 1, придем к интегральному уравнению

$$F(x)+\lambda\int\limits_a^b\left[\{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\}+\int^y\{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F^{(p+1)}(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}\right]dy=0 \tag{2.1}$$

где функции $G_\nu(y)$, $H_\nu(\eta, y)$, $\Delta(\eta)$ будут несколько иными, но такой же структуры, что и выше, а $F^{(p+1)}(\eta)$ — производная $p+1$-го порядка от неизвестной функции. Таким образом, в этом случае вопрос о решении интегро-дифференциального уравнения (0.1) сводится к решению интегрального уравнения (2.1).

Введем две функции $D^*(\lambda)$ и $D^*(x, y; \lambda)$, определенные формулами (1.7) и (1.8), в которых вместо ядер K_ν будут стоять производные от этих ядер по аргументу x с соответствующим значком, например вместо $K_\nu(x_1, y_1)$ будет соответственно $\partial^{p+1} K_\nu(x_1, y_1) / \partial x_1^{p+1}$. При этом в формуле (1.8) первое слагаемое и первые строки определителей сохраняются.

Нетрудно заметить, что функции $D^*(\lambda)$ и $D^*(x, y; \lambda)$ связаны между собой соотношением, аналогичным (1.9), но только вместо $D(\eta, s; \lambda)$ будет стоять производная $(p+1)$ порядка по η.

Очевидно будет иметь место теорема, аналогичная теореме 1.

§ 3. Рассмотрим обобщенное неоднородное линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) z(x) +$$

$$+\lambda\int_a^b \left[K_0(x, y) z(y) + K_1(x, y)\frac{dz(y)}{dy} + \cdots + K_m(x, y)\frac{d^m z(x)}{dy^m}\right] dy = \varphi(x) \tag{3.1}$$

Если $m < n$, решение этого уравнения сводится к решению интегрального уравнения (1.5). Положим в уравнении (3.1)

$$\frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}z(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x) z(x) = F(x) + \varphi(x)$$

Тогда оно примет вид

$$F(x) + \lambda\int_a^b \left[K_0(x, y) z(y) + K_1(x, y)\frac{dz(y)}{dy} + \cdots + K_m(x, y)\frac{d^m z(y)}{dy^m}\right] dy = 0$$

После таких же преобразований, как и для уравнения (0.1), в случае, когда $m < n_y$, имеем

$$F(x) + \lambda\int_a^b \left[\{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)} +\right.$$

$$\left. + \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\}\varphi(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}\right] dy = 0$$

Введя обозначение

$$G_\nu(y) + \int^y H_\nu(\eta, y)\varphi(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)} = M_\nu(y)$$

получим уравнение типа (1.5):

$$F(x) + \lambda\int_a^b \left[\{M_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \int^y \{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}\right] dy = 0$$

Если $m \geqslant n$, то, рассуждая так же, как в § 2, получим уравнение типа (2.1), в котором функция $G(y)$ будет определяться формулой

$$G_\nu(y) = F_\nu(y) + \int^y H_\nu(\eta, y)\varphi^{(p+1)}(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}.$$

Поступила 4 IX 1950

Иркутский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. Труды ЦАГИ. 1934.

2. Назаров Н. Н. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений. Труды Института матемитики и механики АН УзССР. 1948. Вып. 4.