Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Е. М. Есипович
(Москва)

В работе проводится исследование устойчивости решений уравнений вида

$$\alpha_0\omega^{(k)}(t) + \alpha_1\omega^{(k-1)}(t) + \cdots + \alpha_k\omega(t) +$$
$$+ \beta_0\omega^{(l)}(t-\tau) + \beta_1\omega^{(l-1)}(t-\tau) + \cdots + \beta_l\omega(t-\tau) = 0 \qquad (0.1)$$

где α, β — постоянные коэффициенты (вообще говоря, комплексные), причем коэффициент при старшей производной и постоянное запаздывание τ предположены положительными. После подстановки $\omega = z^{\lambda t}$ и замены переменных $z = \lambda\tau$ задача сводится к определению числа корней характеристического уравнения

$$a_0z^k + a_1z^{k-1} + \cdots + a_k + (b_0z^l + b_1z^{l-1} + \cdots + b_l)e^{-z} = 0 \qquad (0.2)$$

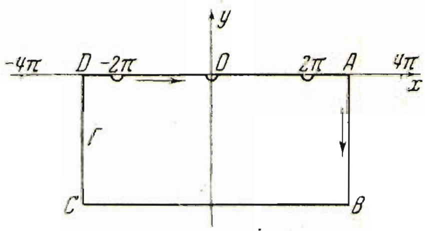
лежащих в правой полуплоскости (в случае устойчивости это число равно нулю).

В § 1 исправляются некоторые ошибки, вкравшиеся в результаты, полученные И. В. Свирским [1]. Кроме того, рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение (0.2) имеет нули на мнимой оси. Доказано далее (§ 2), что в любой фиксированной полосе, параллельной мнимой оси, имеется конечное число корней уравнения (0.2). Предложен алгоритм для оценки ширины δ-полосы между прямыми $x = 0$ и $x = -\delta$, где $\delta > 0$, в которой нет ни одного корня характеристического уравнения (0.2), что позволяет судить не только об устойчивости, но и о степени затухания частных решений дифференциального уравнения (0.1).

§ 1. И. В. Свирский [1] получил простую формулу для подсчета числа лежащих в правой полуплоскости корней функции $f(e^z, z)$, рациональной относительно e^z и z (e^z входит только в первой степени). Заменив z на iz, он переводит корни в нижнюю полуплоскость, а функция $f(e^z, z)$ заменяется при этом функцией

$$F(z) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}z + \varphi(z) + i\psi(z) \qquad (1.1)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — рациональные функции, принимающие вещественные значения при вещественных значениях z. И. В. Свирский рассматривает



Фиг. 1

в нижней полуплоскости последовательность контуров Г в виде вложенных прямоугольников, прилегающих к вещественной оси, причем полюсы $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$ обходятся по малым полуокружностям (фиг. 1). При переходе к пределу длины сторон прямоугольников неограниченно увеличивают, а радиусы полуокружностей устремляют к нулю. В основе исследования — известная теорема о логарифмическом вычете [1]. Однако неточное применение этой теоремы приводит к неверной формуле. В исправленном виде формула И. В. Свирского для подсчета числа нулей у функции $F(z)$ в нижней полуплоскости выглядит так:

$$N = \frac{1}{2}(j - n) + m + p \tag{1.2}$$

Здесь N — искомое число нулей, j — порядок полюса в бесконечно удаленной точке рациональной части $Q(z)$ функции $F(z)$

$$Q(z) = \varphi(z) + i\psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{j} C_k z^k \tag{1.3}$$

причем j — число пересечений вектором $F(z)$ вещественной оси при обходе контура Г вдоль $ABCD$, в то время как n — число пересечений при движении от D к A вдоль прямолинейных отрезков контура Г

$$n = \sum_i \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{\operatorname{Re} F(t)} \frac{d \operatorname{Im} F(t)}{dt}\right\}_{t=t_i} = \sum_i \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{\operatorname{ctg} {}^1/_2\, t + \varphi(t)} \frac{d\psi(t)}{dt}\right\}_{t=t_i} \tag{1.4}$$

где t — вещественные значения z, а t_i — вещественные корни уравнения $\psi(z) = 0$; далее, m — число полюсов $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$, в которых $\psi(2k\pi) < 0$ (при обходе по полуокружности каждого такого полюса получаем два пересечения вещественной оси, т. е. один полный оборот вектора $F(z)$); наконец, p — число полюсов функции $Q(z)$ в нижней полуплоскости.

Существенно предположение об отсутствии нулей и полюсов (кроме полюсов $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$) на вещественной оси. Между тем этот вопрос И. В. Свирским фактически не рассмотрен. Он сообщает только окончательный результат (ошибочный) для случая, когда функция $Q(z)$ на вещественной оси имеет полюсы. Проведем это исследование.

Каждый полюс t_0 порядка q обходим по малой полуокружности. Из того обстоятельства, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют одинаковые знаменатели (см. (2.1)), следует, если $q > 1$, то и мнимая и вещественная часть вектора $F(t)$ имеют в точке t_0 полюс порядка [2] q.

Пусть коэффициенты при первых членах разложений в ряд Лорана в точке t_0 функций $\operatorname{Im} F(t)$ и $\operatorname{Re} F(t)$ равны соответственно C_{-q} и C_{-q}'.

Тогда

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\operatorname{Im} F(t)}{\operatorname{Re} F(t)} = \frac{C_{-q}}{C_{-q}'} \neq 0 \tag{1.5}$$

---

[1] Число нулей мероморфной функции $F(z)$ внутри односвязной области G, ограниченной контуром Г (на контуре функция $F(z)$ не имеет нулей и полюсов), равно числу оборотов, которое сделает вектор $F(z)$, когда конец вектора z один раз обойдет контур Г, плюс число полюсов функции $F(z)$ в области G. Количество оборотов подсчитывается в направлении обхода контура Г. Этот обход совершается у И. В. Свирского по часовой стрелке.

[2] Предполагается, что в точке t_0 ни один из числителей рациональных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ не обращается в нуль. В противном случае исследование следовало бы проводить так же, как и при наличии у функции $F(z)$ вещественных корней. В частности, если предел (1.5) окажется равным нулю, получаем поправку, аналогичную (1.7).

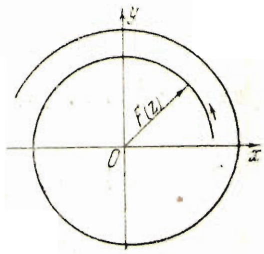
и в то время, как вектор $z - t_0$ сделает полоборота против часовой стрелки, вектор $F(z)$ пересечет q раз вещественную ось, двигаясь по часовой стрелке. Следовательно, формулу (1.2) надо увеличить на $\frac{1}{2}q$ для каждого полюса порядка q (см. примечание 1 на стр. 602).

Если $\varphi(z) + i\psi(z)$ имеет в точке t_0 полюс первого порядка, то следует выделить случай, когда $t_0 = 2k\pi$ и $c_{-1} = -2$, где c_{-1} — коэффициент при первом члене разложения функции $\varphi(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки t_0. В этом исключительном случае аргумент вектора $F(z)$ стремится к $\pm\frac{1}{2}\pi$ и число пересечений при обходе малой полуокружности тоже равно единице. Итак, при обходе каждого полюса t_0 рациональной части $Q(z)$ число пересечений вектором $F(z)$ вещественной оси всегда равно q, где q — порядок полюса t_0.

Пусть t° — вещественный корень функции $F(z)$ и g — порядок нуля. Рассмотрение, аналогичное проведенному, показывает, что если

$$\lim_{t \to t^\circ} \frac{\operatorname{Im} F(t)}{\operatorname{Re} F(t)} \neq 0 \tag{1.6}$$

(в частности, если этот предел бесконечен), то из общей формулы (1.2) нужно вычесть $\frac{1}{2}g$ для каждого нуля t° порядка g.



Фиг. 2

Случай, когда предел (1.6) равен нулю, требует специального рассмотрения. Пусть, например, $\operatorname{Re} F(t^\circ + 0) < 0$ и g нечетно. Тогда, как видно из фиг. 2, число пересечений g уменьшится на одно, если

Таблица 1

	$\operatorname{Re}F(t^\circ+\theta)<0$			$\operatorname{Re}F(t^\circ+0)>0$		
	$\psi(t^\circ-0)$	$\psi(t^\circ+0)$	ν	$\psi(t^\circ-0)$	$\psi(t^\circ+0)$	ν
$g=2p+1$	+	+	−1	−	−	−1
	+	−	0	−	+	0
	−	+	0	+	−	0
	−	−	+1	+	+	+1
$g=2p$	−	+	−1	+	−	−1
	+	+	0	−	−	0
	−	−	0	+	+	0
	+	−	+1	−	+	+1

$\psi(t^\circ - 0)$ и $\psi(t^\circ + 0)$ оба положительны, останется без изменений, если $\psi(t^\circ - 0)$ и $\psi(t^\circ + 0)$ разных знаков, и увеличится на одно, если $\psi(t^\circ - 0)$ и $\psi(t^\circ + 0)$ оба отрицательны. Сведем все возможные комбинации в табл. 1, где ν — число дополнительных пересечений. Тогда легко получить, что (если предел (1.6) равен нулю) для каждого нуля t° общую формулу (1.2) надо увеличить на $\frac{1}{2}G$, где

$$G = \frac{1}{2}\operatorname{sign}\operatorname{Re}F(t^\circ + 0)\left[(-1)^g \operatorname{sign}\psi(t^\circ - 0) - \operatorname{sign}\psi(t^\circ + 0)\right] - g \tag{1.7}$$

Итак, мы получили возможность определять число нулей в нижней полуплоскости и при наличии у функции $F(z)$ вещественных корней [1].

Из всего изложенного ясно, что при равенстве нулю выражения (1.2) имеет место устойчивость. Пользуясь формулой И. В. Свирского и элементарными алгебраическими преобразованиями для уравнений, например, второго порядка, легко исследовать зависимость устойчивости решения от буквенных коэффициентов α, β и запаздывания τ. Кстати, заметим, что данный И. В. Свирским [1] (стр. 61) критерий устойчивости для автоматического регулятора паровой турбины должен иметь следующий вид

$$2\left[\frac{t_1}{2\pi}\right]+1-\operatorname{sign}\left\{\frac{1}{\operatorname{ctg} {}^1/_2\, t_1+\varphi(t_1)}\,\frac{d\varphi(t_1)}{dt}\right\}=0$$

§ 2. Чтобы получить алгоритм для оценки быстроты затухания, изучим распределение корней уравнения (0.2). Заменив z на iz, выразив e^{iz} через $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$ и. уединив котангенс, преобразуем уравнение (0.2) к виду

$$F(z)=\operatorname{ctg}\frac{z}{2}+i\,\frac{[a_0(iz)^k+\cdots+a_k]-[b_0(iz)^l+\cdots+b_l]}{[a_0(iz)^k+\cdots+a_k]+[b_0(iz)^l+\cdots+b_l]}=0 \qquad (2.1)$$

Как заметил И. В. Свирский, из формулы (1.2) следует, что функция $F(z)$ имеет бесконечное число нулей в нижней полуплоскости тогда (добавим, и только тогда), когда $\psi(t)$ отрицательна на бесконечном интервале. Необходимость этого условия вытекает из того, что рациональная функция имеет конечное число нулей и полюсов. Значит, если (см. (1.2)) $N\to\infty$, то необходимо $m\to\infty$. Достаточность очевидна; к тому же она следует из теоремы Л. С. Понтрягина [3]. Отсюда (с учетом величины предела, к которому стремится рациональный член в левой части (2.1), когда $z\to\infty$, оставаясь вещественным), видно, что если запаздывание не входит в старшую производную ($k>l$), то в правой полуплоскости число нулей уравнения (0.2) конечно; если запаздывание входит в старшую производную ($k<l$), то в правой полуплоскости бесконечное число нулей (случай, когда $k=l$, мы не рассматриваем). В дальнейшем мы будем везде полагать $k>l$.

Н. Н. Мейман [2] показал, что функции некоторого класса, к которому, в частности, принадлежит и левая часть уравнения (0.2), в углах

$$\frac{1}{2}\pi-\theta<\arg z<\frac{1}{2}\pi+\theta,\quad -\frac{1}{2}\pi-\theta<\arg z<-\frac{1}{2}\pi+\theta,\quad 0<\theta<\frac{1}{2}\pi \qquad (2.2)$$

имеют бесчисленное множество нулей. Однако для уравнения (0.2) справедлива следующая теорема.

В любой фиксированной полосе, параллельной мнимой оси, число нулей характеристического уравнения (0.2) конечно [2].

[1] Этот случай специально исключается и в работе Л. С. Понтрягина [3].

[2] Для уравнений (0.2) второго порядка с вещественными коэффициентами ($k=2$, $l=0$) аналогичное предложение доказал Н. Волошин [4].

Доказательство проведем для функции $F(z)$ (плоскость z повернута на угол $-\frac{1}{2}\pi$). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} z + i \tag{2.3}$$

Имеем

$$|\Phi(z)| = \left| i \frac{e^{ix} + e^y}{e^{ix} - e^y} + i \right| = \left| \frac{2e^{ix}}{e^{ix} - e^y} \right| \geqslant \frac{2}{1 + e^y} = \gamma(y) \tag{2.4}$$

Задана полоса $Y \leqslant y \leqslant y_0$. Заметим, что

$$\frac{2}{1 + e^{y_0}} = \gamma_0 > 0, \qquad \gamma(y) \geqslant \gamma_0 \quad \text{при} \quad y \leqslant y_0 \tag{2.5}$$

т. е. во всей полуплоскости $y \leqslant y_0$

$$|\Phi(z)| \geqslant \gamma_0 > 0 \tag{2.6}$$

С другой стороны, обозначив рациональную часть функции $F(z)$ через $Q(z)$, согласно (2.1) имеем

$$\lim_{|z| \to \infty} Q(z) = i \tag{2.7}$$

Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $y \leqslant y_0$ найдется такое $X(y) > 0$, что

$$|F(z) - \Phi(z)| = |Q(z) - i| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| \geqslant X \tag{2.8}$$

Достаточно взять $\varepsilon < \gamma_0$ и $X_0 = \sup X(y)$, где $Y \leqslant y \leqslant y_0$. Тогда при $|x| \geqslant X_0$ и $Y \leqslant y \leqslant y_0$ из неравенств (2.8) и (2.6) имеем

$$|F(z)| > |\Phi(z)| - \varepsilon \geqslant \gamma_0 - \varepsilon > 0$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. Для дифференциальных уравнений рассматриваемого типа всегда существует δ-полоса, заключенная между прямыми $x = 0$ и $x = -\delta$, в которой нет ни одного корня характеристического уравнения (0.2).

Предлагаемый способ оценки ширины δ-полосы основан на теореме Руше. Если две функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, аналитические внутри и на контуре Γ, удовлетворяют на Γ условиям

$$|\Phi(z)| \neq 0, \qquad |\Psi(z)| < |\Phi(z)| \tag{2.9}$$

то внутри Γ функции $\Phi(z)$ и $\Phi(z) + \Psi(z)$ имеют одинаковое число нулей.

В качестве функции $\Phi(z)$ возьмем нашу вспомогательную функцию (2.3), которая, как видно из (2.6), в полосе $0 \leqslant y \leqslant y_0$ удовлетворяет первому из условий (2.9). Положим $\Psi(z) = F(z) - \Phi(z) = Q(z) - i$ и потребуем выполнения второго из ограничений (2.9) на любом замкнутом контуре Γ, образованном отрезками прямых

$$y = 0, \quad y = \delta, \quad x = a, \quad x = -a \quad (0 < \delta \leqslant y_0, \ -\infty < a < +\infty) \tag{2.10}$$

При этом полюсы $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$ обходим по малым полуокружностям. На этих полуокружностях условия (2.9) заведомо выполняются. Тогда по теореме Руше внутри контура Г число корней функции $F(z)=\Phi(z)+\Psi(z)$ равно нулю.

В силу требования аналитичности функции $\Psi(z)$ возьмем в качестве y_0 мнимую часть ближайшего к вещественной оси полюса

$$z_0 = x_0 + iy_0 \qquad (y_0 > 0) \tag{2.11}$$

рационального выражения $Q(z)$.

Найдем верхнюю грань δ_0 значений y, при котором неравенство

$$|Q(z) - i| < \frac{2}{1+e^{y_0}} = \gamma_0 \tag{2.12}$$

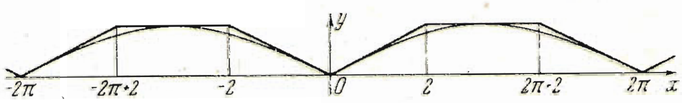
справедливо для всех x. Для этого определим

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |Q(z) - i| = \Lambda(y) \tag{2.13}$$

а затем найдем верхнюю грань значений y из неравенства

$$\Lambda(y) < \gamma_0 \tag{2.14}$$

Это и будет δ_0. Пусть условие (2.12) выполняется для $y=0$ и $y=\delta_0-\varepsilon$. Тогда на горизонтальных отрезках (2.10) контура Г, как видно из неравенства (2.6), выполнены требования теоремы Руше. На вертикальных отрезках (2.10) последние всегда соблюдаются при достаточно больших a в силу неравенств (2.8) и (2.6).



Фиг. 3

Однако из-за того, что в неравенстве (2.9) модуль $|\Phi(z)|$ заменен его минимальным значением γ_0, оценка δ получается слишком жесткая, часто $\delta=0$. Поэтому вместо γ_0 введем функцию, сравнительно точно отражающую изменения $|\Phi(z)|$, но все же позволяющую нам не решать трансцендентных неравенств. Имеем

$$|\Phi(z)| = \frac{2}{\sqrt{1+e^{2y}-2e^{y}\cos x}} = \frac{2}{\sqrt{\mu-\nu+2\nu\sin^2 {}^1\!/_2\, x}} \tag{2.15}$$

где $\mu = 1+e^{2y}$, $\nu = 2e^{y}$. Заметим, что $|\Phi(z)|$ монотонна относительно y, так как

$$\frac{\partial}{\partial y}(1+e^{2y}-2e^{y}\cos x) > 0$$

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию $\varkappa(x)$. По определению:

$$\varkappa(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|k\pi - x| & \text{при } k\pi-2 \leqslant x < k\pi+2 \quad (k=0, \pm 2, \pm 4, \ldots) \\ 1 & \text{при } (k-1)\pi+2 \leqslant x < (k+1)\pi-2 \quad (k=\pm 1, \pm 3, \pm 5\ldots) \end{cases} \tag{2.16}$$

Легко видеть (фиг. 3), что

$$\varkappa(x) \geqslant \left|\sin\tfrac{1}{2}x\right| \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{2.17}$$

Следовательно, в правой части (2.15) можно заменить $\sin^2 \frac{1}{2} x$ через $\varkappa^2(x)$. Кстати, тогда на тех интервалах (2.16), где $\varkappa(x) = 1$, равенство (2.15) автоматически переходит в (2.4), а значит,

$$\frac{2}{1+e^y} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mu - \nu + 2\nu\varkappa^2(x)}} \leqslant |\Phi(z)| \tag{2.18}$$

На основании изложенного в § 1 и 2 предлагается следующая схема оценки ширины δ-полосы.

1°. Уравнение (0.2), заменяя z на iz, преобразуем к виду (2.1).

2°. Проверяем справедливость неравенства

$$|Q(z) - i| < \frac{2}{\sqrt{\mu - \nu + 2\nu\varkappa^2(x)}} \tag{2.19}$$

при $y = 0$. Для этого на тех интервалах, где $|Q(z) - i| \geqslant 1$, нужно заменить правую часть (2.19) через $\varkappa^{-1}(x)$.

3°. Находим в верхней полуплоскости ближайший к вещественной оси полюс $z_0 = x_0 + iy_0$ рационального выражения $Q(z)$.

4°. Решаем неравенство (2.9) при $x = x_0$, положив в правой части $y = y_0$. Пусть (2.9) справедливо при $y < y_1$.

5°. Определяем интервалы Δx_i значений x, для которых не выполняется условие (2.12), где вместо y и y_0 подставим y_1.

6°. На этих интервалах Δx_i рассматриваем неравенство (2.19). Если оно удовлетворяется при $y = y_1$, то y_1 есть искомая оценка.

7°. Обозначим через Δx_j те из отрезков (2.16), где при $y = y_1$ не выполняется (2.19). Найдем на Δx_j верхнюю грань δ_j значений y, для которых выполняется (2.19), полагая при этом $\mu = 1 + e^{2y_1}$, $\nu = 2e^{y_1}$; окончательно $\delta = \min(\delta_j, y_1)$.

Замечание 1. При выполнении 7° необходимо следить, чтобы концы отрезков прямых $y = \delta_j$ на смежных интервалах (2.16) можно было соединить кривой, целиком лежащей в области, определяемой неравенством (2.19). Для этого достаточно, чтобы δ_j и δ_{j+1} принадлежали интервалу значений y, удовлетворяющих неравенству (2.12), где предварительно заменяем y_0 через y_1 и полагаем $x = x_j$, где x_j — общий конец двух интервалов (2.16), на которых определены δ_j и δ_{j+1}. В противном случае нужно потребовать выполнения (2.19) для всей прямой $y = y_k$.

Замечание 2. Оценка ширины δ-полосы уточняется, если при выполнении 4° схемы не ограничиться нахождением y_1. Нужно снова в условие (2.9) подставить $x = x_0$, а в его правую часть $\zeta_1 = 1/2\,(y_1 + y_0)$ вместо y_0. Пусть (2.9) окажется справедливым при $y < y_2$. Опять решаем (2.9), заменив y_0 через $\zeta_2 = 1/2\,(y_2 + \zeta_1)$, и так далее. Из монтонности по отношению к y модуля $|\Phi(z)|$ следует, что $0 \leqslant y_1 < y_k < y_0$.

В остальном схема та же. Только в пунктах 5° — 7° и в замечании 1 вместо y_1 теперь всюду читаем y_k.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\omega'(t) + \frac{1}{3}\omega(t-1) = 0 \quad \text{или} \quad 3\lambda + e^{-\lambda} = 0 \quad (\omega = e^{\lambda t})$$

1°. Преобразуем характеристическое уравнение. Имеем

$$\lambda = iz, \qquad e^{iz} = \frac{\operatorname{ctg} 1/2\, z + i}{\operatorname{ctg} 1/2\, z - i}, \qquad F(z) = \operatorname{ctg}\frac{z}{2} - \frac{3z + i}{1 + 3iz} = 0$$

2°. Устанавливаем неравенство

$$|Q(z)-i| = \frac{2}{\sqrt{(1-3y)^2+9x^2}} \geqslant 1 \quad \text{при } y=0, \text{ если } |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

На этом интервале применяем функцию $\varkappa(x)$. Имеем

$$\frac{2}{\sqrt{1+9x^2}} < \frac{2}{|x|}, \qquad 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Итак на вещественной оси условия (2.9) выполнены.

3°. Единственный полюс рациональной части $z_0 = {}^1/_3\, i$.

4°. Согласно замечанию 2 имеем при $x=0$

$$\frac{2}{\sqrt{(1-3y)^2}} < \frac{2}{\sqrt{(1-e^y)^2}}, \qquad |1-3y| > |e^y - 1|$$

$$y_0 = 0.33, \qquad 1-3y > e^{0.33}-1, \qquad y < 0.20, \qquad y_1 = 0.20$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}(0.20+0.33) \approx 0.26, \qquad 1-3y > e^{0.26}-1, \qquad y < 0.23, \qquad y_2 = 0.23$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2}(0.23+0.26) \approx 0.245 \qquad 1-3y > e^{0.245}-1, \qquad y < 0.24, \qquad y_3 = 0.24$$

5°. Устанавливаем справедливость неравенства

$$\frac{2}{\sqrt{(1-3\cdot 0.24)^2+9x^2}} < \frac{2}{1+e^{0.24}} \qquad \text{при } |x| > 1$$

6°. Для интервала $-1 \leqslant x \leqslant 1$ используем функцию $\varkappa(x)$

$$(1-3\cdot 0.24)^2 + 9x^2 > \mu - \nu + 2\nu\frac{x^2}{4} = 0.074 + 1.27x^2; \qquad |x| \geqslant 0$$

Условия теоремы Руше выполнены на прямых $y=0$ и $y=0.24$. Найденное $\delta = 0.24$ того же порядка, что и расстояние до ближайшего корня (≈ 0.61).

Для дальнейшего уточнения оценки δ можно пойти по пути ослабления условий самой теоремы Руше. Так, например, в геометрически наглядных доказательствах указанной теоремы (см. у Л. С. Понтрягина [3] или Н. Н. Меймана [2]) существенно, чтобы на контуре Γ функция $\Phi(z)+\theta\Psi(z)$ ни при каких θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ не обращалась в нуль, что, как видно, выполняется, если $\arg\Phi(z) \neq \arg\Psi(z)$ на контуре Γ, и только в тех точках, где аргументы совпадают, должно соблюдаться обычно требуемое неравенство модулей.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность Г. Л. Лунцу за ряд ценных советов и указаний.

Поступила 14 X 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Свирский И. В. Определение числа корней, лежащих в правой полуплоскости для функций вида $F(e^z, z)$, где $F(e^z, z)$ — рациональная функция от аргументов e^z и z, и применение результатов. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. 1948. Вып. 1.

2. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды математического института АН СССР. 1949. Т. XXVI.

3. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР, сер. матем. 1942. Т. 6. № 3.

4. Волошин П. Учет явления запаздывания. Автоматика и телемеханика. 1948. Т. IX. № 4.