Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАИМЕНЬШЕГО ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ЧИСЛА ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А. М. Летов
(Москва)

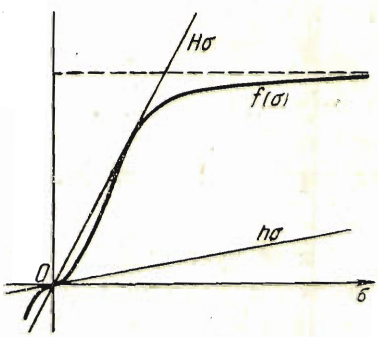
Рассматриваемый вопрос имеет непосредственное отношение к проблеме качества регулирования. Эта проблема может формулироваться различно в зависимости от того, какие требования к качеству регулирования предъявляются.

В данном случае проблема качества регулирования формулируется как проблема наименьшего характеристичного числа данной регулируемой системы [1, 2]. Такая постановка проблемы качества не является общей, но во многих случаях бывает вполне достаточной. В частности, именно такая частная постановка, связанная с понятием степени устойчивости, получила в последнее время широкое распространение в литературе по исследованию линейных регулируемых систем [3, 4].

1. Рассмотрим нелинейные регулируемые системы вида [5, 6].

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$\dot{\xi} = f(\sigma), \qquad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha - \xi \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь η_k — координаты, $b_{k\alpha}$ — постоянные параметры объекта регулирования, ξ — координата, n_k — постоянные параметры регулирующего органа, p_α — параметры регулятора, $f(\sigma)$ — данная непрерывная, ограниченная функция аргумента σ, обладающая свойствами $f(0) = 0$, $f(\sigma)\sigma > 0$ (фиг. 1). Для сокращения будем называть такие функции функциями класса A.

Иногда будем говорить о подклассе функций A' в классе A, обладающих в дополнение к сказанному свойствами

$$1) \quad \left[\frac{df}{d\sigma}\right]_{\sigma=0} = h \quad (h \neq 0), \qquad 2) \quad \varphi(\sigma) = f(\sigma) - h\sigma, \quad \sigma\varphi(\sigma) > 0$$

Для функций подкласса A' рассматривается также и другое положение $H\sigma$ луча $h\sigma$, при котором последний касается кривой $f(\sigma)$, для $\sigma > 0$, сверху.

Следовательно, все функции подкласса A' изображаются кривыми $y = f(\sigma)$, расположенными между лучами $y = h\sigma$, $y = H\sigma$ (фиг. 1). Очевидно, всюду в рассматриваемом по σ диапазоне регулирования $df/d\sigma$ удовлетворяет условию

$$h \leqslant \frac{df}{d\sigma} \leqslant H$$

К функциям подкласса A' относится также функция $f(\sigma) = |f(\sigma)| \operatorname{sgn} \sigma$. Так как эта функция имеет две общие точки с лучом $y = h\sigma$, абсциссы которых $\pm\sigma_*$, то в этом случае будем рассматривать только такие процессы регулирования, для которых $|\sigma| \leqslant |\sigma_*|$; для этих функций принимается $H = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi$. В частном случае может быть, что $|\sigma_*| = 0$. Последнее, наверное, будет иметь место при так называемом идеальном регуляторе, т. е. таком регуляторе, у которого скорость перестановки регулирующего органа бесконечно велика; диапазон регулирования по σ в этом случае стягивается в точку $\sigma = 0$.

Во всех случаях проблемы параметры регулятора p_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ выбираются таким образом, что очевидное решение уравнений (1.1)

$$\eta_k^* = 0, \qquad \xi^* = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

является устойчивым при любых возмущениях и любой функции $f(\sigma)$ подкласса A', т. е. система вида (1.1) считается абсолютно устойчивой.

Обозначим через S область параметров регулятора p_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$, в которой регулируемая система (1.1) абсолютно устойчива. Всякая такая система обладает в S наименьшим характеристичным числом [1, 2] λ^*.

Если R^2 означает квадрат расстояния изображающей точки фазового пространства переменных η_k, ξ $(k = 1, \ldots, n)$, то можно написать

$$R^2(t) < R^2(0)\, e^{-2\lambda^* t} \tag{1.3}$$

Определим время t, в течение которого величина $R(t)$ станет в e раз меньше $R(0)$, и назовем его временем условного затухания процесса регулирования. Очевидно,

$$t^* \leqslant \frac{1}{\lambda^*} \tag{1.4}$$

Как следует из равенства (1.4), наименьшее характеристичное число λ^* в любой регулируемой системе определяет собой меру быстроты сходимости процесса регулирования. С этой точки зрения число λ^* можно считать выражением качества регулятора, и тот из них назовем лучшим, для которого оно будет наибольшим.

Ниже приводится вычисление границ наименьшего характеристичного числа λ^* по методу Ляпунова [1, 2] и оценка его предельных значений.

2. Формулируем первую задачу: для данной регулируемой системы (1.1) и области S ее абсолютной устойчивости требуется определить всюду в S границы наименьшего характеристичного числа λ^*.

Приведем уравнения (1.1) к канонической форме [6]. С этой целью введем новое переменное σ, определенное равенством

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha - \sigma \tag{2.1}$$

и, обозначая

$$b_{k\alpha}{}^{\circ} = b_{k\alpha} + n_k p_\alpha \qquad (k, \alpha = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

перепишем первые n уравнений (1.1) в форме

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}{}^{\circ} \eta_\alpha - n_k \sigma \tag{2.3}$$

Далее, дифференцируя (2.1) и обозначая

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha b_{k\alpha}^\circ = p_k^\circ, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha n_\alpha = \rho \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2.4}$$

в совокупности с уравнениями (2.3), найдем

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}^\circ \eta_\alpha - n_k \sigma, \qquad \dot{\sigma} = \sum p_\alpha^\circ \eta_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma) \tag{2.5}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \eta_\alpha \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.6) при помощи уравнений (2.5), найдем

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \left[\sum_{\alpha=1}^{n} b_{\alpha\beta}^\circ \eta_\beta - n_\alpha \sigma \right] \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.7}$$

Если постоянные преобразования $C_\alpha^{(s)}$ определить соотношениями

$$-\rho_s C_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} b_{\alpha\beta}^\circ, \qquad -1 = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} n_\alpha \qquad (s,\beta=1,\ldots,n) \tag{2.8}$$

где ρ_s — корни уравнения

$$\Delta(\rho) = | b_{\alpha\beta}^\circ + \delta_{\alpha\beta}\rho | = 0 \tag{2.9}$$

то уравнениям (2.7) можно придать вид:

$$\dot{x}_s = -\rho_s x_s + \sigma$$

Допустим, что корни уравнения (2.9) все различные и обладают свойством $\operatorname{Re}\rho_s > 0$ $(s=1,\ldots,n)$. Поскольку коэффициенты уравнения (2.9) содержат постоянные p_α регулятора, то всегда возможно их выбрать так, чтобы означенное условие выполнялось. Очевидно, в этом случае постоянные регулятора должны выбираться согласно неравенствам

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0 \tag{2.10}$$

где Δ_k $(k=1,\ldots,n)$ — определители Гурвитца, составленные для уравнения (2.9). Неравенства (2.10) суть обычные условия Гурвитца, определяющие область S для регулируемой системы (1.1), поддерживаемой идеальным регулятором.

В случае регулятора с конечной скоростью исполнительного органа они являются необходимыми условиями устойчивости регулируемой системы (1.1). Когда объект регулирования устойчив сам по себе при выключенном регуляторе, условия (2.10) становятся тривиальными.

При этих допущениях преобразование (2.6) будет неособым, и уравнения (2.5) можно привести к канонической форме:

$$\dot{x}_s = -\rho_s x_s + \sigma, \quad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha x_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.11}$$

где β_α — постоянные коэффициенты, определяемые по ходу выполнения самого преобразования (в уравнениях (2.11) все величины безразмерные).

3. Допустим, что все ρ_k суть действительные числа. Функция

$$V = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{1}{2}\sigma^2$$

представляет половину квадрата расстояния изображающей точки M фазового пространства переменных $x_1, \ldots, x_n, \sigma$ до начала координат; она является знакоопределенной и всюду положительной функцией.

Поскольку в соответствие с уравнениями (2.11) задача о движении регулируемой системы свелась к изучению движения изображающей точки M в фазовом пространстве, то в задаче качества регулирования естественно наблюдать за скоростью изменения этого расстояния, определяемого функцией $2V$. Ее полная производная, согласно (2.11), такова:

$$\dot{V} = -\sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k^2 - \rho\sigma^2 - \sigma f(\sigma) + \sum_{k=1}^{n} (1+\beta_k) x_k \sigma$$

или

$$\dot{V} = -\sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k^2 - (\rho + h)\sigma^2 + \sum_{k=1}^{n} (1+\beta_k) x_k \sigma - \sigma\varphi(\sigma)$$

Рассмотрим дискриминант формы $-[\dot{V} + \sigma\varphi(\sigma)]$ — определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}(1+\beta_1) \\ 0 & \rho_2 & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}(1+\beta_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \rho_n & -\frac{1}{2}(1+\beta_n) \\ -\frac{1}{2}(1+\beta_1) & -\frac{1}{2}(1+\beta_2) & \cdots & -\frac{1}{2}(1+\beta_n) & \rho + h \end{vmatrix}$$

и все его диагональные миноры

$$\Delta_{11} = \rho_1, \quad \Delta_{22} = \rho_1\rho_2, \ldots, \Delta_{nn} = \Delta_{n-1,\, n-1}\,\rho_n \tag{3.1}$$

Достаточные условия знакоположительности функции $-V$ будут

$$\Delta_{11} > 0, \ldots, \Delta_{nn} > 0, \qquad \Delta = \Delta_{nn}\left[\rho + h - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(1+\beta_k)^2}{\rho_k}\right] > 0 \tag{3.2}$$

Их выполнение гарантирует монотонное убывание квадрата расстояния $2V$, какова бы ни была функция $f(\sigma)$ подкласса A'. Следовательно, для регулируемой системы вида (1.1) выполнение условий (3.2) гарантирует существование некоторого наименьшего характеристичного числа $\lambda^* > 0$.

4. Произведем вычисление границ числа λ^*. С этой целью подвергнем канонические переменные λ преобразованию, положив

$$y_k = x_k e^{\lambda t}, \qquad \mu = \sigma e^{\lambda t} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

после чего получим

$$\dot{y}_k = -(\rho_k - \lambda)\, y_k + \mu, \qquad \dot{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha y_\alpha - (\rho - \lambda)\mu - F(\mu) \tag{4.2}$$

где обозначено

$$F(\mu) = e^{\lambda t} f(\mu e^{-\lambda t})$$

Пусть λ^* — наименьшее характеристичное число любой группы функций канонических переменных, преобразуемых по формулам (4.1). Если параметр преобразования λ возрастает от нуля, принимая множество вещественных и положительных значений, то при прохождении им через сечение множества λ^* происходит потеря устойчивости очевидного решения

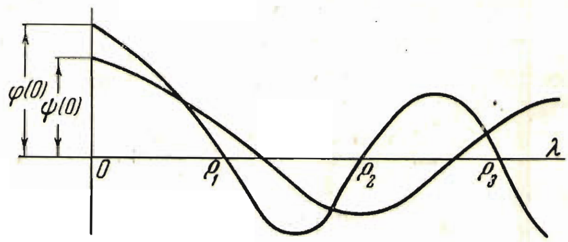
$$y_1^* = 0, \ldots, y_n^* = 0, \qquad \mu^* = 0 \tag{4.3}$$

λ преобразованных уравнений. Но последнему должно предшествовать нарушение условий устойчивости решения (4.3).

Если в качестве функции Ляпунова принять

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \tag{4.4}$$

то интересующие нас условия можно получить из (3.2) заменой ρ_k, $\rho + h$ соответственно на $\rho_k - \lambda$, $\rho + h - \lambda$. Таким образом, будем иметь



Фиг. 2

$$\Delta_{11}(\lambda) = \rho_1 - \lambda > 0, \ldots, \Delta_{nn}(\lambda) = \Delta_{n-1,\,n-1}(\lambda)(\rho_n - \lambda) > 0$$

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{nn}(\lambda)\left[\rho + h - \lambda - \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{(1+\beta_\alpha)^2}{\rho_\alpha - \lambda}\right] > 0 \tag{4.5}$$

При $\lambda = 0$ условия (4.5) обращаются в условия (3.2); при непрерывном возрастании λ нарушению какого-либо неравенства (4.5) должно предшествовать его обращение в равенство. Допустим, что $\rho_1 < \rho_2, \ldots, \rho_n < \rho_{n+1}$, причем $\rho_{n+1} = \rho + h$. Рассмотрим корни уравнения

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) \tag{4.6}$$

где

$$\varphi(\lambda) = 4(\rho_1 - \lambda)\cdots(\rho_n - \lambda)(\rho_{n+1} - \lambda) \tag{4.7}$$

$$\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(\rho_1 - \lambda)\cdots(\rho_{k-1} - \lambda)(1 + \beta_k)^2(\rho_{k+1} - \lambda)\cdots(\rho_n - \lambda) \tag{4.8}$$

Докажем *лемму*: *уравнение* (4.6) *имеет только вещественные корни, причем при соблюдении условий* (3.2) $[\varphi(0) > \psi(0)]$ *они все положительные, а наименьший из них* $\lambda_1 < \rho_1$.

Рассмотрим функции $\varphi(\lambda), \psi(\lambda)$; точки $\rho_k = \lambda$ ($k = 1, \ldots n$) являются нулями функции $\varphi(\lambda)$; нули функции $\psi(\lambda)$ лежат в интервалах $(\rho_1\rho_2), \ldots, (\rho_{n-1}\rho_n)$; обозначим их через $\rho_1^*, \ldots, \rho_{n-1}^*$.

Кроме того, все нули функций $\partial\varphi / \partial\lambda$ лежат между нулями функции $\varphi(\lambda)$, а нули функции $\partial\psi / \partial\lambda$ — между нулями функции $\psi(\lambda)$; следовательно, в интервалах $(-\infty, \rho_1)$, $(\rho_{n+1}, +\infty)$ функция $\varphi(\lambda)$, а в интервалах $(-\infty, \rho_1^*)$, $(\rho_{n-1}, +\infty)$ функция $\psi(\lambda)$ являются монотонными.

Корни уравнения соответствуют точкам (фиг. 2) пересечения кривых $y = \varphi(\lambda)$, $y = \psi(\lambda)$; при $\varphi(0) > \psi(0)$ они лежат в интервалах $(0, \rho_1)$, $(\rho_1^*\rho_2), \ldots, (\rho_{n-1}^*, \rho_n)$, $(\rho_{n+1}, +\infty)$.

Может оказаться, что абсолютная устойчивость регулируемой системы (1.1) будет достигаться за счет выполнения каких-либо других достаточных условий, например тех, какие даются в работах [5, 6], причем неравенство $\varphi(0) > \psi(0)$ будет нарушено. Однако, как нетрудно установить, и в этом случае доказанная лемма остается справедливой.

Следовательно, первое нарушение условий (4.5), при котором уже нельзя гарантировать устойчивости очевидного решения (4.3) уравнений (4.2), произойдет при $\lambda = \lambda_1$. В обоих случаях корень λ_1 служит нижней границей наименьшего характеристического числа [1, 2].

Аналогично определяется и верхняя граница числа λ^*. Попрежнему рассмотрим функцию W. Пользуясь уравнениями (2.10), имеем

$$\dot{W} = \sum (\lambda - \rho_k) y_k{}^2 + (\lambda - r_{n+1}) \mu^2 + \sum_{k=1}^{n} (1 + \beta_k) y_k \mu - \mu \Phi(\mu).$$

где

$$r_{n+1} = \rho + H, \qquad \Phi(\mu) = f(\mu) - H\mu \tag{4.9}$$

В силу определения H имеем $\mu\Phi(\mu) < 0$ для любого $\mu \neq 0$.

Составим дискриминант формы $\dot{W} + \mu\Phi(\mu)$ — определитель

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \lambda - \rho_1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2}(1+\beta_1) \\ 0 & \lambda - \rho_2 & \ldots & 0 & \frac{1}{2}(1+\beta_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - \rho_n & \frac{1}{2}(1+\beta_n) \\ \frac{1}{2}(1+\beta_1) & \frac{1}{2}(1+\beta_2) & \ldots & \frac{1}{2}(1+\beta_n) & \lambda - r_{n+1} \end{vmatrix} \tag{4.10}$$

и его главные диагональные миноры

$$\Delta_{11}^* = \lambda - \rho_1, \ldots, \Delta_{nn}^* = \Delta_{n-1,\, n-1}^* (\lambda - \rho_n) \tag{4.11}$$

Соблюдение неравенств

$$\Delta_{11}^* > 0_1, \ldots, \Delta_{nn}^* > 0, \qquad \Delta^* > 0 \tag{4.12}$$

служит необходимым и достаточным условием знакоположительности функции $\dot{W}$ для любых значений переменных y_k, μ и любой функции $f(0)$ подкласса (A'). Рассмотрим уравнение

$$\Delta^*(\lambda) = 0 \tag{4.13}$$

Легко установить, что оно отличается от уравнения (4.6) лишь своим свободным членом, в котором вместо ρ_{n+1} стоит r_{n+1} (4.9).

Нетрудно доказать, что корни λ_k^* уравнения (4.13) при вещественных ρ_k $(k = 1, \ldots, n)$ будут вещественные положительные, причем всегда наибольший корень $\lambda_{n+1}^* > \rho_{n+1}$.

В силу (4.11) неравенства (4.12) выполняются при $\lambda \geqslant \lambda_{n+1}^*$. Следовательно, λ_{n+1}^* есть верхняя граница множества характеристичных чисел системы (1.1). Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1: для системы (1.1) множество ее характеристичных чисел заключено в интервале $(\lambda_1, \lambda_{n+1}^*)$, где λ_1, λ_{n+1}^* суть меньший и больший вещественные корни уравнений (4.6), (4.13) соответственно.

5. Теорема 1 позволяет поставить и решить следующую вторую задачу: найти в S геометрические места точек, на которых λ_1 достигает своего верхнего, предельного значения, т. е. своего максимума λ_m.

Если это предельное значение существует, то вместо (1.3) можно писать

$$R^2(t) < R^2(0)\, e^{-2\lambda_m t}$$

Число λ_m характеризует предельные возможности регулятора в том смысле, что в соответствии с формулой (1.4) время условного затухания процесса регулирования будет не больше, чем λ_m^{-1}. Из рассмотрения фиг. 2 видно, что λ_1 достигает своей верхней границы $\lambda_1 = \rho_1$ в двух случаях: либо когда $\varphi(0) \to \infty$, либо когда $\psi(0) \to 0$.

В первом случае при любых выбранных в S параметрах регулятора $\varphi(0) \to +\infty$ лишь при $h \to \infty$, т. е. при беспредельном увеличении «крутизны» характеристики $f(\sigma)$ исполнительного органа. Указанный предел достигается при $h = \infty$, т. е. при идеальном регуляторе.

С другой стороны, для этого случая нижняя граница наименьшего характеристичного числа совпадает с самим числом $\lambda^* = \rho_1$.

Во втором случае можно получить тот же результат для λ_1, если требовать выполнения соотношений

$$\psi(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+\beta_k)^2}{\rho_k} = 0 \qquad (h + \rho > \rho_1) \tag{5.1}$$

В силу положительности вещественных чисел ρ_k $(k = 1, \ldots, n)$ соотношения (5.1) эквивалентны соотношениям

$$1 + \beta_1 = 0, \ldots, 1 + \beta_n = 0 \qquad (h + \rho > \rho_1) \tag{5.2}$$

При их соблюдении все условия (4.5) выполняются для $0 \leqslant \lambda < \rho_1$; при $\lambda \geqslant \rho_1$ условия (4.5) нарушаются. Следовательно, $\lambda_1 = \rho_1$ есть нижняя граница наименьшего характеристичного числа.

Полученный результат можно формулировать в виде двух теорем.

Теорема 2. Нижняя граница λ_1 наименьшего характеристичного числа λ^* регулируемой системы (1.1) достигает своего верхнего предельного значения (самого числа $\lambda^* = \rho_1$) в случае идеального регулятора, каковы бы ни были при этом определенные в S его параметры p_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$.

Теорема 3. Нижняя граница λ_1 наименьшего характеристичного числа λ^* регулируемой системы (1.1) достигает своего верхнего, предельного значения ρ_1, если параметры регулятора определены в S согласно соотношениям (5.2), какова бы ни была при этом функция $f(\sigma)$ подкласса (A'), «крутизна» которой ограничена снизу числом h, удовлетворяющим неравенству (5.2); при этом $\lambda^* \geqslant \rho_1$.

Сравнивая обе теоремы, можно подумать, что в случае идеального регулятора мы всегда получим наименьшее характеристичное число λ^* меньшим по значению, чем наименьшее характеристичное число в случае регулятора с ограниченной скоростью исполнительного органа. Однако последнее зависит от совместности условий (2.10), (5.2).

6. В качестве примера рассмотрим уравнения Б. В. Булгакова [7]

$$T^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + U \frac{d\psi}{dt} + k\psi + \mu = 0$$

$$\frac{d\mu}{dt} = f^*(\sigma), \quad \sigma = a\psi + E\frac{d\psi}{dt} + G^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{l}\mu$$

где T, U, a, E, G, l — положительные постоянные, тогда как величина k может быть постоянной любого знака. Полагая

$$\psi = \eta_1, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{r}\eta_2, \quad \mu = m\xi, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{r}}, \quad p = \frac{u}{T^2}$$

$$q = \frac{k}{T^2}, \qquad r = \frac{m}{T^2}, \qquad m = \frac{lT^2}{T^2 + lG^2}, \quad f(\sigma) = \frac{1}{m\sqrt{r}} f^*(\sigma) \quad (6.1)$$

$$b_{21} = -\frac{q}{r}, \quad b_{22} = -\frac{p}{\sqrt{r}}, \quad p_1 = a - qG^2, \quad p_2 = \sqrt{r}\,(E - pG^2)$$

приведем уравнения к нормальной форме

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 = \xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi$$

Здесь точка обозначает дифференцирование безразмерных переменных по безразмерному времени τ. Исключая из этих уравнений ξ согласно формуле $\xi = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \sigma$, получим

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = b_{21}^\circ\eta_1 + b_{22}^\circ\eta_2 + \sigma, \quad \dot{\sigma} = p_1^\circ\eta_1 + p_2^\circ\eta_2 - \rho\sigma - f(\sigma) \quad (6.2)$$

где обозначено

$$b_{21}^\circ = b_{21} - p_1, \; b_{22}^\circ = b_{22} - p_2, \; p_1^\circ = b_{21}^\circ p_2, \; p_2^\circ = p_1 + b_{22}^\circ p_2, \; \rho = -p_2 \quad (6.3)$$

Для преобразования к каноническим переменным полагаем

$$x_s = C_1^{(s)}\eta_1 + C_2^{(s)}\eta_2 \qquad (s = 1, 2)$$

Уравнения для определения параметров преобразования ρ_s и постоянных $C_\alpha^{(s)}$ имеют вид:

$$-\rho_s C_1^{(s)} = b_{21}^\circ C_2, \qquad -\rho_s C_2^{(s)} = C_1^{(s)} + b_{22}^\circ C_2^{(s)}, \qquad C_2^{(s)} = 1 \quad (6.4)$$

$$\rho^2 - \frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}\rho + \frac{k + al}{l} = 0 \quad (6.5)$$

Эти уравнения определяют следующие формулы перехода к каноническим переменным:
$$x_1 = \rho_2\eta_1 + \eta_2, \qquad x_2 = \rho_1\eta_1 + \eta_2 \quad (6.6)$$

Очевидно, чтобы корни ρ_1, ρ_2 уравнения (6.6) обладали свойством $\operatorname{Re}\rho_k > 0$ $(k = 1, 2)$, необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$k + al > 0 \quad (6.7)$$

Канонические уравнения имеют вид:

$$\dot{x}_1 = -\rho_1 x_1 + \sigma, \quad \dot{x}_2 = -\rho_2 x_2 + \sigma, \quad \dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 - \rho\sigma - f(\sigma) \quad (6.8)$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}[p_1^\circ - \rho_1 p_2^\circ], \quad \beta_2 = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}[-p_1^\circ + \rho_2 p_2^\circ], \quad \rho = -p_2 \quad (6.9)$$

Первоначально рассмотрим случай идеального регулятора. Неравенство (6.7) определяет область S абсолютной устойчивости регулируемой системы (6.2). По теореме 2 верхнее значение наименьшего характеристичного числа таково:

$$\lambda = \operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\rho_1$$

где

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}} - \sqrt{\frac{1}{4}\frac{(U + lE)^2}{l(T^2 + lG^2)} - \frac{k + al}{l}} \tag{6.10}$$

Это число определяет предельные возможности регулятора в смысле гарантии наибольшего времени условного затухания процесса. Предельного значения λ^* достигает при выполнении единственного условия:

$$(U + lE)^2 = 4(T^2 + lG^2)(k + al) \tag{6.11}$$

В этом случае получаем

$$\lambda^* = \rho_1 = \frac{1}{2}\frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}} \tag{6.12}$$

Если регулятор жесткого выключателя не содержит ($l = \infty$), то

$$\lambda^* = \frac{1}{2}\frac{E}{G} \tag{6.13}$$

Теперь допустим, что регулятор не идеальный, и рассмотрим вопрос о достижении числом λ^* своей верхней границы. Условия (5.2) в случае вещественных ρ_1, ρ_2 имеют вид:

$$h > \rho_1 + \sqrt{r}(E - pG^2), \qquad 1 + \beta_1 = 0, \qquad 1 + \beta_2 = 0 \tag{6.14}$$

Первоначально обратимся к двум последним равенствам. Им, наверное, можно удовлетворить, если можно удовлетворить соотношениям

$$p_1^\circ - \rho_1 p_2^\circ < 0, \qquad -p_1^\circ + \rho_2 p_2^\circ < 0, \qquad 2p_1^\circ = (\rho_1 + \rho_2)p_2^\circ \tag{6.15}$$

Рассмотрим плоскость переменных p_1°, p_2°. Легко построить область значений p_1°, p_2°, где условия (6.15) выполняются; существование этой области гарантируется соблюдением лишь двух неравенств:

$$p_1^\circ = -\frac{(k + al)(E - pG^2)}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}} < 0, \quad p_2^\circ = a - qG^2 - \frac{(U + lE)(E - pG^2)}{T^2 + lG^2} < 0 \tag{6.16}$$

В силу неравенства (6.7) первое неравенство (6.16) упрощается. Имеем

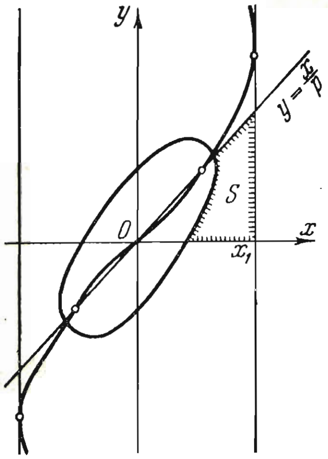
$$E - pG^2 > 0$$

Следовательно, в случае регулятора с конечной скоростью исполнительного органа область S абсолютной устойчивости регулируемой системы определяется неравенствами

$$k + al > 0, \qquad E - pG^2 > 0, \qquad h > \rho_1 + \sqrt{r}(E - pG^2) \tag{6.17}$$

$$\frac{(U + lE)(E - pG^2)}{T^2 + lG^2} > a - qG^2 \tag{6.18}$$

Легко понять, что эта область содержит бесчисленное множество параметров a, l, E, G^2, удовлетворяющих этим неравенствам.



Фиг. 3

Действительно, например, в случае регулятора, не содержащего жесткого выключателя ($l = \infty$), построим кривые

$$x = py \tag{6.19}$$

$$x^2 + qy^2 - pxy = a \qquad (q > {}^1/_4\, p^2) \tag{6.20}$$

где обозначено $x = E / G$, $y = G$ (фиг. 3). Очевидно, область S занимает ту часть первого квадранта плоскости xy, которая лежит вне эллипса (6.20) и ограничивается прямой (6.19) и осью x.

Геометрическое место точек, на котором $\lambda_1 = \rho_1$, определяется равенством (6.15). В рассматриваемом случае оно приводит к уравнению следующего вида

$$qxy^2 + p(2a - x^2)y + x(x^2 - 3a) = 0 \tag{6.21}$$

Эта кривая определена в полосе $|x| < x_1$, где

$$x_1 = +\left(\frac{2a\sqrt{(p^2-3q)^2 + p^2(4q-p^2)} - 2a(p^2-3q)}{4q-p^2}\right)^{1/2} > 0 \tag{6.22}$$

касается границ полосы и имеет асимптоту $x = 0$. Поскольку она пересекается с прямой (6.19) при $y = \pm\sqrt{a/q}$, то она нигде не проходит в S.

Следовательно, при настройке регулятора согласно соотношениям (6.14) нижняя граница наименьшего характеристичного числа λ_1, хотя и существует, нигде не достигает своего верхнего предельного значения. Это обстоятельство заставляет предполагать, что наименьшее характеристичное число данной задачи всегда достигает наибольшего значения в случае идеального регулятора (6.13); для регулятора с ограниченной скоростью исполнительного органа $\lambda_1 < \lambda^* < \rho_1$.

Поступила 8 II 1951

Институт автоматики и телемеханики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ. Гостехиздат. 1946.
3. Цыпкин Я. З. и Бромберг П. В. Степень устойчивости линейных систем. Труды НИСО. № 9. Изд. БНТ. 1946.
4. Булгаков Б. В. Колебания. ГИТТЛ. 1949. Т. I.
5. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
6. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 2.
7. Булгаков Б. В. Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3