Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

И. Г. Малкин
(Свердловск)

В настоящей работе дается решение задачи устойчивости для установившихся движений в двух критических случаях. В первом случае предполагается, что характеристическое уравнение первого приближения имеет n корней с отрицательными вещественными частями и две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i$ и $\pm\lambda_2 i$. Во втором случае предполагается, что характеристическое уравнение имеет n корней с отрицательными вещественными частями, один нулевой корень и пару чисто мнимых корней.

Этими задачами занимался Г. В. Каменков [1]. Однако предложенный Г. В. Каменковым метод решения этих задач очень сложен и требует большого числа громоздких вычислений. В работе [2] мы указали новый способ решения задачи устойчивости для классического критического случая, когда характеристическое уравнение имеет одну пару чисто мнимых корней. Развивая этот способ, можно получить решение задачи устойчивости и для двух указанных выше критических случаев. При этом вычисления получаются простыми и делаются элементарными в случаях, когда задача решается членами третьего порядка.

§ 1. Постановка задачи. Уравнения возмущенного движения в интересующих нас случаях могут быть представлены в следующем виде:

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \cdots + q_{jk}y_k + Y_j, \quad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad \begin{pmatrix} j=1,\ldots,k \\ s=1,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Здесь $k = 4$ в первом случае и $k = 3$ во втором случае. При этом в первом случае уравнение

$$\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} & \cdots q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda & \cdots q_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots q_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i$ и $\pm\lambda_2 i$, а во втором случае его корнями будут нуль и $\pm\lambda i$. Уравнение же

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\rho & p_{12} & \cdots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\rho & \cdots p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots p_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Функции Y_j и X_s содержат все $n+k$ переменных $y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n$ и разлагаются в окрестности начала координат в ряды по степеням этих переменных. Эти разложения начинаются членами не ниже второго порядка. Коэффициенты этих разложений либо постоянны, если рассматривается устойчивость установившихся движений, либо являются непрерывными периодическими функциями времени с одним и тем же периодом ω, если рассматривается устойчивость периодических движений.

В работе [3] показано, что задача устойчивости для системы $n+k$-го порядка (1.1), если она решается конечным числом членов, приводится к той же задаче для системы k-го порядка. Это приведение делается следующим образом. Допустим сначала, что мы имеем дело с установившимся движением и, следовательно, функции Y_j, X_s не содержат явно t. Составим систему уравнений с частными производными:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_s}{\partial y_j}\left(q_{j1}y_1 + \cdots + q_{jk}y_k + Y_j\right) = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Эти уравнения можно всегда удовлетворить формальными рядами вида

$$x_s = x_s^{(2)}\left(y_1, \ldots, y_k\right) + x_s^{(3)}\left(y_1, \ldots, y_k\right) + \cdots$$

где $x_s^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных y_j. Этими рядами заменим величины x_s в первых k уравнениях (1.1). В полученной таким образом системе k-го порядка относительно y_j отбросим все члены выше некоторого достаточно высокого порядка N и присоединим к ним некоторые функции $f_j\left(t, y_1, \ldots, y_k\right)$. Таким образом, получится система

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + q_{j2}y_2 + \cdots + q_{jk}y_k + Y_j^{(2)}(y) + \cdots + Y_j^{(N)}(y) + f_j(t, y) \quad (1.3)$$

где $Y_j^{(m)}(y)$ — формы m-го порядка относительно $y_1, \ldots, y_k$.

Относительно функций f_j предполагается, что они зависят от t, аналитичны относительно y_j и удовлетворяют неравенствам

$$\left| f_j\left(t, y_1, \ldots, y_k\right)\right| < A\left\{|y_1| + \cdots + |y_k|\right\}^{N+1} \quad (1.4)$$

где A — некоторая постоянная. Если существует такое достаточно большое число N, что невозмущенное движение $y_1 = \cdots = y_k = 0$ для уравнений (1.3) устойчиво, или асимптотически устойчиво, или неустойчиво при любом выборе функций f_j, удовлетворяющих указанным выше условиям, то и невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_k = 0$ исследуемой системы (1.1) будет соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Аналогичным образом поступаем и для случая периодических движений. Составляем систему уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_s}{\partial y_j}\left(q_{j1}y_1 + \cdots + q_{jk}y_k + Y_j\right) = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s$$

Этой системе всегда можно удовлетворить (формально) рядами вида

$$x_s = x_s^{(2)}(t, y) + x_s^{(3)}(t, y) + \cdots$$

где $x_s^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных y_j с периодическими (периода ω) коэффициентами. Заменяя этими рядами величины x_s в первых k уравнениях (1.1) и поступая затем так же, как и для случая установившихся движений, приведем задачу к исследованию системы k-го порядка вида

$$\frac{dy_j}{dt} = q_{j1}y_1 + \cdots + q_{jk}y_k + Y_j^{(2)}(t, y) + \cdots + Y_j^{(N)}(t, y) + f_j(t, y) \qquad (1.5)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k)$$

где $Y_j^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных $y_1, \ldots, y_k$ с периодическими коэффициентами, а $f_j(t, y)$ — функции такого же вида, как и в уравнениях (1.3).

Таким образом, в первом интересующем нас случае задача сводится к исследованию системы четвертого порядка, для которого характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней, а во втором случае — к системе третьего порядка, у которой характеристическое уравнение имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней. Нам понадобится, однако, сначала некоторые результаты, относящиеся к системе второго порядка, у которой характеристическое уравнение имеет двойной нулевой корень. Эти результаты, полученные в работе [4], здесь приводим без доказательства. Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{du}{dt} = U^{(m)}(u, v) + \cdots + U^{(N)}(u, v) + U(t, u, v)$$

$$\frac{dv}{dt} = V^{(m)}(u, v) + \cdots + V^{(N)}(u, v) + V(t, u, v) \qquad (1.6)$$

где $m \geqslant 2$, $U^{(l)}$, $V^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных u и v с постоянными коэффициентами, а U, V — функции такого же вида, как и функции f_j в уравнениях (1.3). Характеристическое уравнение первого приближения для этой системы имеет, очевидно, двойной нулевой корень с простыми элементарными делителями.

Составим две формы порядка $m + 1$

$$P(u, v) = uU^{(m)} + vV^{(m)}, \qquad G(u, v) = vU^{(m)} - uV^{(m)}$$

При решении задачи устойчивости для системы вида (1.6) приходится различать два случая в зависимости от того, является ли форма $G(u, v)$ знакоопределенной или нет, т. е. в зависимости от того, существуют или не существуют в плоскости (u, v) вещественные прямые, удовлетворяющие уравнению

$$G(u, v) = 0 \qquad (1.7)$$

Нас будет здесь интересовать тот случай, когда форма G не является знакоопределенной. Имеет место следующее предложение.

Если на всех прямых, определяемых уравнением (1.7), форма P может принимать только отрицательные значения, то невозмущенное движение для системы (1.6) асимптотически устойчиво при любом N и при любом выборе функций U, V, удовлетворяющих указанным для них условиям. При тех же условиях относительно U и V невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы на одной из прямых, определяемых уравнением (1.7), форма P может принимать положительные значения.

Если ни на одной прямой (1.7) форма P не может принимать положительные значения, но на некоторых из этих прямых она может тождественно обращаться в нуль, то для решения задачи устойчивости необходимо в уравнениях (1.6) рассмотреть члены порядка выше m. На этих случаях мы здесь не останавливаемся.

§ 2. Критический случай двух пар чисто мнимых корней для установившихся движений. Допустим, что в уравнениях (1.3) $k=4$ и характеристическое уравнение (1.2) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i$ и $\pm\lambda_2 i$. Будем предполагать, что число λ_1/λ_2 иррационально. Переменные могут быть выбраны таким образом, чтобы линейная часть системы (1.3) имела канонический вид. Тогда, обозначая переменные через x_1, y_1, x_2, y_2, эту систему можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt}&=i\lambda_j x_j+X_j^{(2)}+\cdots+X_j^{(N)}+f_j(t,x_1,y_1,x_2,y_2)\\ \frac{dy_j}{dt}&=-i\lambda_j y_j+Y_j^{(2)}+\cdots+Y_j^{(N)}+F_j(t,x_1,y_1,x_2,y_2)\end{aligned}\qquad (j=1,\,2)\qquad(2.1)$$

где $X_j^{(m)}$ и $Y_j^{(m)}$ — формы m-го порядка переменных x_1, y_1, x_2, y_2.

Переменные x_j и y_j являются здесь комплексно сопряженными, вследствие чего последние два уравнения могут быть получены из первых двух заменой i на $-i$, x_j на y_j и y_j на x_j.

Введем в уравнения (2.1) вместо переменных x_j, y_j переменные u_j, v_j при помощи подстановки:

$$\begin{aligned}x_j&=u_j+u_j^{(2)}(u_1,v_1,u_2,v_2)+\cdots+u_j^{(N)}(u_1,v_1,u_2,v_2)\\ y_j&=v_j+\overline{u}_j^{(2)}(v_1,u_1,v_2,u_2)+\cdots+\overline{u}_j^{(N)}(v_1,u_1,v_2,u_2)\end{aligned}\qquad (j=1,\,2)\qquad(2.2)$$

Здесь $u_j^{(m)}$ — подлежащие еще определению формы m-го порядка переменных u_1, v_1, u_2, v_2. Черта над буквами означает комплексную сопряженность, так что формы $\overline{u}_j^{(m)}(v_1,u_1,v_2,u_2)$ получаются из форм $u_j^{(m)}(u_1,v_1,u_2,v_2)$ заменой i на $-i$, u_j на v_j и v_j на u_j. Преобразование (2.2) постараемся подобрать таким образом, чтобы уравнения (2.1) приняли вид:

$$\begin{aligned}\frac{du_j}{dt}&=\lambda_j i u_j+\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)}U_j^{(2k+1)}(u_1,v_1,u_2,v_2)+\Phi_j(t,u_1,v_1,u_2,v_2)\\ \frac{dv_j}{dt}&=-\lambda_j i v_j+\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(N-1)}\overline{U}_j^{(2k+1)}(v_1,u_1,v_2,u_2)+\Psi_j(t,v_1,u_1,v_2,u_2)\end{aligned}\qquad (j=1,\,2)\qquad(2.3)$$

Здесь Φ_j и Ψ_j начинаются членами не ниже $N+1$-го порядка (число N предполагаем нечетным), $U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ и $\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2)$ — формы m-го порядка вида

$$
\begin{gathered}
U_j^{(m)}(u_1, v_1, u_2, v_2) = \sum A_j^{(m_1m_2n_1n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2} \\
\overline{U}_j^{(m)}(v_1, u_1, v_2, u_2) = \sum \overline{A}_j^{(m_1m_2n_1n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2} \\
(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m)
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где постоянные $A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ удовлетворяют условиям

$$
\begin{aligned}
A_1^{(m_1m_2n_1n_2)} &= 0, \quad \text{если} \quad (n_1 - n_2)^2 + (m_1 - m_2 - 1)^2 \neq 0 \\
A_2^{(m_1m_2n_1n_2)} &= 0, \quad \text{если} \quad (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2 - 1)^2 \neq 0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

так что из всех коэффициентов $A_1^{(m_1m_2n_1n_2)}$ отличными от нуля являются лишь те, для которых одновременно $n_1 = n_2$ и $m_1 = m_2 + 1$, а из коэффициентов $A_2^{(m_1m_2n_1n_2)}$ отличными от нуля будут лишь те, для которых одновременно $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2 + 1$.

Покажем, что эти условия могут быть удовлетворены и что они определяют как формы $u_j^{(m)}$, так и коэффициенты $A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$, причем все эти величины определяются крайне простыми вычислениями, так как для каждого коэффициенты форм $u_j^{(m)}$ и для каждого коэффициента $A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ получится линейное алгебраическое уравнение с одной неизвестной.

Заметим прежде всего, что подстановка (2.2) выбрана так, что переменные u_j и v_j получаются комплексно сопряженными, вследствие чего последние два уравнения (2.3) должны получиться из первых двух заменой i на $-i$, u_j на v_j и v_j на u_j. Так как уравнения (2.3) этим свойством действительно обладают, то отсюда ясно, что если удастся подобрать преобразование (2.2) так, чтобы первые два уравнения (2.3) имели нужный вид, то то же самое будет справедливо и для последних двух уравнений (2.3).

Заменяя в первой группе уравнений (2.1) x_j и y_j их выражениями (2.2) и принимая во внимание (2.3), получим

$$
\begin{gathered}
i\lambda_j u_j + U_j^{(3)} + \cdots + \sum_{\beta=2}^{N} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial u_\alpha} (\lambda_\alpha i u_\alpha + U_\alpha^{(3)} + \cdots) + \right. \\
\left. + \frac{\partial u_j^{(\beta)}}{\partial v_\alpha} (-i\lambda_\alpha v_\alpha + \overline{U}_\alpha^{(3)} + \cdots) \right\} = i\lambda_j (u_j + u_j^{(2)} + \cdots) + \\
+ X_j^{(2)}(u_1 + \cdots, \cdots, v_2 + \cdots) + \cdots
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Задавшись произвольным числом $m < N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2}$, где $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Тогда, полагая

$$
u_j^{(m)} = \sum B_j^{(m_1m_2n_1n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2} \quad (j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m) \tag{2.7}
$$

и принимая во внимание (2.4), получим для определения коэффициентов $B_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ следующие уравнения:

$$[(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j] B_j^{(m_1m_2n_1n_2)} + \alpha A_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = C_j^{(m_1m_2n_1n_2)} \qquad (2.8)$$

где $\alpha = 0$ при m четном и $\alpha = 1$ при m нечетном.

Здесь $C_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ — целые рациональные функции от тех коэффициентов $A_s^{(m_1m_2n_1n_2)}$ и $B_s^{(m_1m_2n_1n_2)}$, для которых $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 < m$. Допустим, что все эти коэффициенты уже определены и, следовательно, $C_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ известны. Тогда будем различать два случая. Первым из них будет тот, когда при $j = 1$ одновременно выполняются условия $m_1 = m_2 + 1$, $n_1 = n_2$, а при $j = 2$ условия $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2 + 1$. Этот случай возможен лишь при m нечетном. В этом случае коэффициент при $B_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ в уравнении (2.8) обращается в нуль, и мы получим вполне определенные значения для $A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$:

$$A_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = C_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$$

Коэффициент $B_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ остается произвольным, и мы его можем положить равным нулю.

Во втором случае указанные выше условия относительно индексов не выполняются. В этом случае коэффициент при $B_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ в уравнении (2.8) не обращается в нуль, так как по условию отношение λ_1 / λ_2 является числом иррациональным. Мы можем тогда положить

$$A_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = 0, \qquad B_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = \frac{C_j^{(m_1m_2n_1n_2)}}{(m_1 - m_2)\lambda_1 + (n_1 - n_2)\lambda_2 - \lambda_j}$$

Если теперь учесть, что при $m = 1$ коэффициенты $C_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ являются известными величинами, то из сказанного выше вытекает, что мы можем действительно определить преобразование (2.2), приводящее систему (2.1) к виду (2.3), причем для коэффициентов $A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}$ будут выполняться условия (2.5). Самое определение преобразования, как мы видели, весьма просто и сводится к составлению уравнений (2.8), что требует лишь развертывания левых и правых частей уравнений (2.6).

Положим теперь в преобразованных уравнениях (2.3)

$$u_j = \rho_j(\cos\vartheta_j + i\sin\vartheta_j), \qquad v_j = \rho_j(\cos\vartheta_j - i\sin\vartheta_j) \qquad (j = 1, 2) \qquad (2.9)$$

где ρ_j, ϑ_j — новые переменные. Тогда, принимая во внимание (2.4) и (2.5), легко найдем

$$\frac{d\rho_j}{dt} + i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = i\lambda_j\rho_j + \sum A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + e^{-i\vartheta_j}\Phi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_2})$$

$$\frac{d\rho_j}{dt} - i\rho_j\frac{d\vartheta_j}{dt} = -i\lambda_j\rho_j + \sum \overline{A}_j^{(m_1m_2n_1n_2)}\rho_1^{m_1+m_2}\rho_2^{n_1+n_2} + e^{i\vartheta_j}\Psi_j(t, \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \ldots, \rho_2 e^{-i\vartheta_2})$$

$$(j = 1, 2;\ m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N)$$

Полагая

$$a_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = \operatorname{Re}(A_j^{(m_1m_2n_1n_2)}), \qquad b_j^{(m_1m_2n_1n_2)} = \operatorname{Im}(A_j^{(m_1m_2n_1n_2)})$$

и выделяя вещественные и мнимые части, получим две группы уравнений:

$$\frac{d\rho_j}{dt} = \sum a_j^{(m_1m_2n_1n_2)} \rho_1^{m_1+m_2} \rho_2^{n_1+n_2} + R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)$$

$$(j = 1,2; \quad m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N) \tag{2.10}$$

$$\rho_j \frac{d\vartheta_j}{dt} = \lambda_j \rho_j + \sum b_j^{(m_1m_2n_1n_2)} \rho_1^{m_1+m_2} \rho_2^{n_1+n_2} + \theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)$$

$$(j = 1,2; \quad m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3, 5, \ldots, N)$$

Здесь функции R_t и θ_j, очевидно, таковы, что при всех $t \geqslant 0$, при всех ϑ_1, ϑ_2 и при всех достаточно малых значениях ρ_1 и ρ_2 выполняются неравенства

$$|R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| < C\{|\rho_1| + |\rho_2|\}^{N+1}$$

$$|\theta_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_1, \rho_2)| < C\{|\rho_1| + |\rho_2|\}^{N+1} \tag{2.11}$$

где C — положительная постоянная.

Если невозмущенное движение $\rho_1 = \rho_2 = 0$ для уравнений (2.10), в которых ϑ_1 и ϑ_2 рассматриваются как произвольные функции времени, устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво при любом выборе функций R_j, удовлетворяющих условиям (2.11), то по характеру преобразования (2.2) то же самое будет иметь место и для невозмущенного движения $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$ уравнений (2.1) при любом выборе функций f_j, F_j, удовлетворяющих условиям (1.4). Таким образом, задача сводится к изучению уравнений (2.10). Уравнения (2.10) представляют собой частный случай уравнений (1.6). Запишем их в виде

$$\frac{d\rho_j}{dt} = R_j^{(m)}(\rho_1, \rho_2) + R_j^{(m+2)}(\rho_1, \rho_2) + \cdots + R_j^{(N)}(\rho_1, \rho_2) + R_j(t, \vartheta_1, \vartheta_2, \rho_2, \rho_2)$$

$$(j = 1, 2) \tag{2.12}$$

где $m \geqslant 3$ (m — нечетное), а $R_j^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных ρ_1 и ρ_2. Тогда на основании (2.5) будем иметь

$$R_1^{(m)} = A_m \rho_1^m + A_{m-2} \rho_1^{m-2} \rho_2^2 + \cdots + A_1 \rho_1 \rho_2^{m-1}$$

$$R_2^{(m)} = B_m \rho_2^m + B_{m-2} \rho_2^{m-2} \rho_1^2 + \cdots + B_1 \rho_2 \rho_1^{m-1}$$

где A_s, B_s — некоторые постоянные.

Для форм P и G, определенных в предыдущем параграфе, находим

$$P(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 R_1^{(m)} + \rho_2 R_2^{(m)} = A_m \rho_1^{m+1} + (A_{m-2} - B_1) \rho_1^{m-1} \rho_2^2 + \cdots + B_m \rho_2^{m+1}$$

$$G(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 R_2^{(m)} - \rho_2 R_1^{(m)} = \rho_1 \rho_2 [(B_1 - A_m) \rho_1^{m-1} +$$

$$+ (B_3 - A_{m-2}) \rho_1^{m-3} \rho_2^2 + \cdots + (B_m - A_1) \rho_2^{m-1}]$$

В рассматриваемом случае форма G никогда не будет знакоопределенной. Уравнение $G = 0$ выполняется для осей координат $\rho_1 = \rho_2 = 0$ и для прямых, определяемых уравнением

$$G'(\rho_1, \rho_2) = (B_1 - A_m) \rho_1^{m-1} + (B_3 - A_{m-2}) \rho_1^{m-3} \rho_2^2 + \cdots +$$

$$+ (B_m - A_1) \rho_2^{m-1} = 0 \tag{2.13}$$

На осях координат $\rho_1 = 0$ и $\rho_2 = 0$ форма P принимает соответственно значения $B_m \rho_2^{m+1}$ и $A_m \rho_1^{m+1}$. Поэтому на основании предложения, указанного в предыдущем параграфе, невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин A_m или B_m положительна. Если $A_m \leqslant 0$ и $B_m \leqslant 0$, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы на одной из вещественных прямых, определяемых уравнением (2.13), форма P может принимать положительные значения. Напротив, если на каждой такой прямой форма P может принимать только отрицательные значения и если при этом $A_m < 0$, $B_m < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво. Если форма P обращается в нуль либо при $\rho_1 = 0$ (т. е. $B_m = 0$), либо при $\rho_2 = 0$ (т. е. $A_m = 0$), либо на одной из прямых (2.13) и если при этом ни на одной из прямых (2.13) или осях координат она не может принимать положительных значений, то решение задачи требует рассмотрения в уравнениях (2.12) членов порядков, более высоких, чем m.

В тех случаях, которые мы сейчас рассмотрели, задача решается членами наинизшего порядка в уравнениях (2.12). Следовательно, коэффициенты $A_j^{(m_1 m_2 n_1 n_2)}$ нужно вычислять до тех пор, пока мы не придем к некоторому порядку m, для которого не все величины $\operatorname{Re}(A_j^{(m_1 m_2 n_1 n_2)})$ равны нулю при $m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = m$. Может случиться, что такого порядка m не существует. В этом исключительном случае задача устойчивости не решается конечным числом членов.

Пример. Пусть предложена система

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = f\left[x,\, y,\, \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + a\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = F\left[x,\, y,\, \left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\, \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + b\left(\frac{dy}{dt}\right)^3$$

где a и b — постоянные, а f и F — аналитические функции своих аргументов, разложения которых по степеням x, y, dx/dt, dy/dt начинаются членами не ниже третьего порядка. Полагая

$$x_1 = x - \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}, \qquad y_1 = x + \frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}$$

$$x_2 = y - \frac{i}{\omega}\frac{dy}{dt}, \qquad y_2 = y + \frac{i}{\omega}\frac{dy}{dt}$$

приведем данную систему к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \quad i\lambda x_1 + i\varphi_1(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{a\lambda^3}{8\,\omega}(y_1 - x_1)^3 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \quad i\omega x_2 + i\varphi_2(x_1, y_1, x_2, y_2) + \frac{b\omega^2}{8\,\lambda}(y_2 - x_2)^3 \\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 - i\varphi_1(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{a\lambda^3}{8\,\omega}(x_1 - y_1)^3 \\
\frac{dy_2}{dt} &= -i\omega y_2 - i\varphi_2(y_1, x_1, y_2, x_2) + \frac{b\omega^3}{8\,\lambda}(x_2 - y_2)^3
\end{aligned} \tag{2.14}$$

где φ_1 и φ_2 — *вещественные* аналитические функции своих аргументов, разложения которых начинаются членами не ниже третьего порядка.

Делаем далее подстановку (2.2), в которой в рассматриваемом случае можно положить $u_j^{(2)} = 0$. Имеем

$$x_j = u_j + u_j^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \cdots, \quad y_j = v_j + \overline{u}_j^{(3)}(v_1, u_1, v_2, u_2) + \cdots \tag{2.15}$$

где

$$u_j^{(3)} = \sum B_j^{(m_1 m_2 n_1 n_2)} u_1^{m_1} v_1^{m_2} u_2^{n_1} v_2^{n_2}, \quad \overline{u}_j^{(3)} = \sum \overline{B}_j^{(m_1 m_2 n_1 n_2)} v_1^{m_1} u_1^{m_2} v_2^{n_1} u_2^{n_2} \tag{2.16}$$

$$(j = 1, 2; \quad m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 3)$$

Преобразованные уравнения должны иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \quad i\lambda u_1 + \alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + \cdots \\ \frac{du_2}{dt} &= \quad i\omega u_2 + \alpha_2 u_2^2 v_2 + \beta_2 u_1 u_2 v_1 + \cdots \\ \frac{dv_1}{dt} &= - i\lambda v_1 + \overline{\alpha}_1 v_1^2 u_1 + \overline{\beta}_1 v_1 v_2 u_2 + \cdots \\ \frac{dv_2}{dt} &= - i\omega v_2 + \overline{\alpha}_2 v_2^2 u_2 + \overline{\beta}_2 v_1 v_2 u_1 + \cdots \end{aligned} \tag{2.17}$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — подлежащие определению постоянные и ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого.

Подставляя (2.15) в первое уравнение (2.14), заменяя при этом производные du_j / dt, dv_j / dt их выражениями (2.17) и приравнивая члены третьего порядка, получим

$$\alpha_1 u_1^2 v_1 + \beta_1 u_1 u_2 v_2 + i\lambda u_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1} - i\lambda v_1 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1} + i\omega u_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_2} - i\omega v_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_2} =$$
$$= i\lambda u_1^{(3)} + i\varphi_1^{(3)}(u_1, v_1, u_2, v_2) + \frac{a\lambda^3}{8\omega}(v_1 - u_1)^3 \tag{2.18}$$

где $\varphi_1^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в функции φ_1. Приравнивая в обеих частях (2.18) коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$, учитывая при этом (2.16), найдем

$$\alpha_1 + (2i\lambda - i\lambda) B_1^{(2100)} = i\lambda B_1^{(2100)} + ia_1 + \frac{3a\lambda^3}{8\omega}$$

$$\beta_1 + (i\lambda + i\omega - i\omega) B_1^{(1011)} = i\lambda B_1^{(1011)} + ib_1$$

или

$$\alpha_1 = ia_1 + \frac{3a\lambda^3}{8\omega}, \qquad \beta_1 = ib_1$$

Здесь a_1 и b_1 — вещественные числа, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 u_2 v_2$ в функции $\varphi_1(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Аналогичным образом находим

$$\alpha_2 = \frac{3b\omega^3}{8\lambda} + ia_2, \qquad \beta_2 = ib_2$$

где a_2 и b_2 коэффициенты при $u_2^2 v^2$ и $v_1 u_2 v_1$ в функции $\varphi_2(u_1, v_1, u_2, v_2)$. Делая теперь подстановку (2.9), окончательно найдем

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{3a\lambda^3}{8\omega}\rho_1^3 + \cdots, \qquad \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{3b\omega^3}{8\lambda}\rho_2^3 + \cdots$$

где ненаписанные члены имеют порядок не ниже четвертого. Отсюда сразу следует, что если хотя бы один из коэффициентов a или b положителен, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же оба коэффициента отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически.

§ 3. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений. Допустим теперь, что в уравнениях (1.3) $k=3$, а характеристическое уравнение (1.2) имеет один нулевой и пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$. В этом случае уравнения (1.3) подходящим выбором переменных, которые обозначим через x, x_1 и y_1, можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X^{(2)}(x, x_1, y_1) + \cdots + X^{(N)}(x, x_1, y_1) + \varphi(t, x, x_1, y_1) \\
\frac{dx_1}{dt} &= i\lambda x_1 + X_1^{(2)}(x, x_1, y_1) + \cdots + X_1^{(N)}(x, x_1, y_1) + \varphi_1(t, x, x_1, y_1) \qquad (3.1) \\
\frac{dy_1}{dt} &= -i\lambda y_1 + Y_1^{(2)}(x, x_1, y_1) + \cdots + Y_1^{(N)}(x, x_1, y_1) + \psi_1(t, x, x_1, y_1)
\end{aligned}$$

Здесь $X^{(k)}$, $X_1^{(k)}$ и $Y_1^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных x, x_1, y_1, а φ, φ_1 и ψ_1 — зависящие от t аналитические функции переменных x, x_1, y_1, удовлетворяющие при всех $t \geqslant 0$ в окрестности начала координат неравенствам

$$\begin{aligned}
|\varphi(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1} \\
|\varphi_1(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1} \qquad (3.2) \\
|\psi_1(t, x, x_1, y_1)| &< A\{|x| + |x_1| + |y_1|\}^{N+1}
\end{aligned}$$

При этом переменные x_1 и y_1 являются комплексно сопряженными, так что третье уравнение (3.2) может быть получено из второго заменой i на $-i$, x_1, на y_1 и y_1 на x_1. Первое уравнение (3.2) при такой замене не изменяется.

Преобразуем теперь уравнения (4.2) при помощи подстановки:

$$\begin{aligned}
x &= u + u^{(2)}(u, u_1, v_1) + \cdots + u^{(N)}(u, u_1, v_1) \\
x_1 &= u_1 + u_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \cdots + u_1^{(N)}(u, u_1, v_1) \qquad (3.3) \\
y_1 &= v_1 + \overline{u}_1^{(2)}(u, v_1, u_1) + \cdots + \overline{u}_1^{(N)}(u, v_1, u_1)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}
u^{(k)} = \sum B^{(nm_1m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \qquad u_1^{(k)} = \sum B_1^{(nm_1m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \\
\overline{u}_1^{(k)} = \sum \overline{B}_1^{(nm_1m_2)} u^n v_1^{m_1} u_1^{m_2} \quad (n + m_1 + m_2 = k) \qquad (3.4)
\end{gathered}$$

подлежащие определению формы k-го порядка. Эти формы стараемся подобрать так, чтобы преобразованные уравнения приняли вид:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= U^{(2)}(u, u_1, v_1) + \cdots + U_1^{(N)}(u, u_1, v_1) + U(t, u, u_1, v_1) \\
\frac{du_1}{dt} &= i\lambda u_1 + U_1^{(2)}(u, u_1, v_1) + \cdots + U_1^{(N)}(u, u_1, v_1) + U_1(t, u, u_1, v_1) \qquad (3.5) \\
\frac{dv_1}{dt} &= -i\lambda v_1 + \overline{U}_1^{(2)}(u, v_1, u_1) + \cdots + \overline{U}_1^{(N)}(u, v_1, u_1) + V_1(t, u, u_1, v_1)
\end{aligned}$$

Здесь

$$U^{(k)} = \sum A^{(nm_1m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}, \quad U_1^{(k)} = \sum A_1^{(nm_1m_2)} u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2} \quad (n + m_1 + m_2 = k) \qquad (3.6)$$

формы k-го порядка, коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям

$$A^{(nm_1m_2)} = 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2, \qquad A_1^{(nm_1m_2)} = 0 \quad \text{при} \quad m_1 \neq m_2 + 1 \tag{3.7}$$

Подстановка (3.3) выбрана таким образом, что переменные u_1 и v_1 получаются комплексно сопряженными, и из (3.5) видно, что если эта подстановка выбрана так, что первые два уравнения (3.5) примут требуемый вид, то и третье уравнение этой системы будет также требуемого вида.

Подставляя в первые два уравнения (3.1) вместо x, x_1, y_1 их выражения (3.3) и принимая во внимание (3.5), получим

$$\begin{gathered}\Big(1+\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u}\Big)(U^{(2)}+\cdots)+\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial u_1}(i\lambda u_1+U_1^{(2)}+\cdots)+\\ +\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial v_1}(-i\lambda v_1+\overline{U}_1^{(2)}+\cdots)=X(u+\cdots,\,u_1+\cdots,\,v_1+\cdots)+\cdots\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\Big(1+\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u}\Big)(i\lambda u_1+U_1^{(2)}+\cdots)+\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial v_1}(-i\lambda v_1+\overline{U}_1^{(2)}+\cdots)+\\ +\sum_{\alpha=2}^{N}\frac{\partial u_1^{(\alpha)}}{\partial u}(U^{(2)}+\cdots)=i\lambda(u_1+U_1^{(2)}+\cdots)+\\ +X_1^{(2)}(u+\cdots,u_1+\cdots,\,v_1+\cdots)\end{gathered}$$

Задавшись каким-нибудь числом $k<N$, приравняем в обеих частях полученных уравнений коэффициенты при $u^n u_1^{m_1} v_1^{m_2}$, где $n+m_1+m_2=k$. Тогда на основании (3.4) и (3.7) имеем

$$A^{(nm_1m_2)}+(m_1-m_2)\,i\lambda B^{(nm_1m_2)}=C^{(nm_1m_2)}$$
$$A_1^{(nm_1m_2)}+(m_1-m_2-1)\,i\lambda B_1^{(nm_1m_2)}=C_1^{(nm_1m_2)}$$

Здесь $C^{(nm_1m_2)}$ и $C_1^{(nm_1m_2)}$ — целые рациональные функции от тех $A^{(pq_1q_2)}$, $A_1^{(pq_1q_2)}$, $B^{(pq_1q_2)}$, $B_1^{(pq_1q_2)}$ и комплексно сопряженных с ними величин, для которых $p+q_1+q_2<k$. Допустим, что все указанные величины уже вычислены и, следовательно, величины $C^{(nm_1m_2)}$, $C_1^{(nm_1m_2)}$ известны. Тогда при $m_1 \neq m_2$ можем положить

$$A^{(nm_1m_2)}=0, \qquad B^{(nm_1m_2)}=\frac{1}{(m_1-m_2)\,i\lambda}\,C_1^{(nm_1m_2)}$$

а при $m_1=m_2$ будем иметь

$$A^{(nm_1m_2)}=C^{(nm_1m_2)}$$

а коэффициент $B^{(nm_1m_2)}$ остается произвольным. Можем положить его равным нулю или любой другой величине. Далее при $m_1 \neq m_2+1$ можно положить

$$A_1^{(nm_1m_2)}=0, \qquad B_1^{(nm_1m_2)}=\frac{1}{(m_1-m_2-1)\,i\lambda}\,C_1^{(nm_1m_2)}$$

Если $m_1 = m_2 + 1$, то

$$A_1^{(nm_1m_2)} = C_1^{(nm_1m_2)}$$

а коэффициент $B_1^{(nm_1m_2)}$ может быть выбран совершенно произвольно.

Так как при $n + m_1 + m_2 = 2$ величины $C^{(nm_1m_2)}$ и $C_1^{(nm_1m_2)}$ известны, то отсюда следует, что действительно существует преобразование (3.3), обладающее всеми указанными свойствами. При этом легко видеть, что все коэффициенты $A^{(nm_1m_2)}$ будут вещественными. Действительно, первое уравнение (3.1) не изменяется при замене i на $-i$, x_1 на y_1 и y_1 на x_1. Учитывая вид подстановки (3.3), отсюда заключаем, что первое уравнение (3.5) не изменяется при замене i на $-i$, u_1 на v_1 и v_1 на u_1. Но так как $A^{(nm_1m_2)} = 0$ при $m_1 \neq m_2$, то первое уравнение (3.5) не меняется при замене u_1 на v_1 и v_1 на u_1.

Следовательно, это уравнение не изменяется при замене i на $-i$, откуда и вытекает вещественность коэффициентов $A^{(nm_1m_2)}$.

Положим теперь в уравнениях (3.5)

$$u_1 = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad v_1 = \rho(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) \tag{3.9}$$

и выделим вещественные и мнимые части. Тогда, учитывая, что коэффициенты $A^{(nm_1m_2)}$ вещественны, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sum_{n+2m=2}^{N} A^{(nmm)} u^n \rho^{2m} + U_*(t, \vartheta, \rho, u) \\ \frac{d\rho}{dt} &= \sum_{n+2m=1}^{N-1} a^{(n,\, m+1,\, m)} u^n \rho^{2m+1} + R(t, \vartheta, \rho, u) \end{aligned} \tag{3.10}$$

и уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \sum_{n+2m=1}^{N-1} b^{(n,\, m+1,\, m)} u^n \rho^{2m} + \theta(t, \vartheta, \rho, u)$$

Здесь

$$a^{(n,\, m+1,\, m)} = \operatorname{Re} A_1^{(n,\, m+1,\, m)}, \qquad b^{(n,\, m+1,\, m)} = \operatorname{Im} A_1^{(n,\, m+1,\, m)}$$

и функции R, и U_* при достаточно малых ρ и u, при всех значениях ϑ и $t \geqslant 0$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} |U_*(t, \vartheta, \rho, u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1} \\ |R(t, \vartheta, \rho, u)| &< C\{|\rho| + |u|\}^{N+1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

где C — положительная постоянная.

Задача устойчивости для уравнений (3.1) эквивалентна задаче устойчивости для уравнений (3.10). Эти уравнения, если в них рассматривать ϑ как произвольную функцию времени, представляют собой частный случай уравнений (1.6). Форма G для уравнений (3.10) всегда имеет множитель ρ и, следовательно, никогда не является знакоопределенной. Можем поэтому для решения задачи устойчивости для уравнений (3.10) воспользоваться предложением, указанным в § 1.

§ 4. Периодические движения. Рассмотрим те же критические случаи для периодических движений. Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид (1.5). При этом либо $k=4$ и уравнение (1.2) имеет две пары чисто мнимых корней, либо $k=3$ и уравнение (1.2) имеет один нулевой корень и пару чисто мнимых корней. Оба эти случая будем рассматривать одновременно. Переменные y_j предполагаем выбранными таким образом, что линейная часть уравнений (1.5) имеет каноническую форму. В рассматриваемых случаях уравнение (1.2) не имеет кратных корней, вследствие чего можно считать

$$q_{jj}=\lambda_j, \qquad q_{sj}=0 \qquad (s\neq j)$$

Здесь λ_j — корни уравнения (1.2). Уравнения (1.5) имеют вид:

$$\frac{dy_j}{dt}=\lambda_j y_j+Y_j^{(2)}(t, y)+\cdots+Y_j^{(N)}(t, y)+f_j(t, y) \quad (j=1, \ldots, k) \tag{4.1}$$

Будем предполагать, что не существует соотношений вида

$$\pm i(m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\cdots+m_k\lambda_k-\lambda_j)=\frac{2\pi n}{\omega}$$

где $n, m_1, \ldots, m_k$ — произвольные целые положительные числа (некоторые из них могут равняться нулю), связанные соотношением $m_1+\cdots+m_k\leqslant N$.

Преобразуем уравнения (4.1) при помощи подстановки:

$$y_j=u_j+\sum A_j^{(m_1 m_2\ldots m_k)}(t)\,u_1^{m_1}u_2^{m_2}\cdots u_k^{m_k} \tag{4.2}$$
$$(j=1, \ldots, k;\quad 2\leqslant m_1+\cdots+m_k\leqslant N)$$

где $A_j^{(m_1\ldots m_k)}$ — некоторые периодические функции t периода ω. Постараемся подобрать эти функции таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид:

$$\frac{du_j}{dt}=\lambda_j u_j+\sum a_j^{(m_1\ldots m_k)}u_1^{m_1}\ldots u_k^{m_k}+U_j(t, u_1, \ldots, u_k) \tag{4.3}$$
$$(j=1, \ldots, k;\ 2\leqslant m_1+\cdots+m_k\leqslant N)$$

где $a_j^{(m_1\ldots m_k)}$ — постоянные, а U_j — зависящие от t аналитические функции $u_1, \ldots, u_k$, разложения которых начинаются членами не ниже $N+1$-го порядка. Эти функции, очевидно, удовлетворяют соотношениям вида (1.4).

Пусть $u_j^{(m)}(t, u_1\ldots u_k)$ обозначает совокупность членов m-го порядка в подстановке (4.2). Допустим, что все $u_j^{(s)}$, для которых $s<m$, уже вычислены согласно указанным выше условиям. Тогда, подставляя (4.2) и (4.3) в уравнения (4.1) и приравнивая члены m-го порядка в левых и правых частях полученных таким образом уравнений, найдем для определения форм $u_j^{(m)}$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha u_\alpha\frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial u_\alpha}+\sum a_j^{(m_1\ldots m_k)}u_1^{m_1}\ldots u_k^{m_k}= \tag{4.4}$$
$$=\lambda_j u_j^{(m)}+U_1^{(m)}(t, u_1, \ldots, u_k) \qquad (j=1, \ldots, k;\quad m_1+\cdots m_k=m)$$

Здесь $U_j^{(m)}$ обозначают известные формы m-го порядка переменных $u_1, \ldots, u_k$, коэффициенты которых являются периодическими функциями t периода ω. Приравнивая в (4.4) коэффициенты при $u_1^{m_1} \ldots u_k^{m_k}$, получим для каждого коэффициента $A_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ уравнение

$$\frac{dA_j^{(m_1 \ldots m_k)}}{dt} + (m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k - \lambda_j) A_j^{(m_1 \ldots m_k)} = = - a_j^{(m_1 \ldots m_k)} + B_j^{(m_1 \ldots m_k)}(t) \tag{4.5}$$

где $B_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ — коэффициенты форм $U_j^{(m)}$ и, следовательно, известны.

Для того чтобы уравнение (4.5) имело периодическое решение, необходимо подобрать постоянные $a_j^{(m_1 \ldots m_k)}$. Положим

$$a_j^{(m_1 \ldots m_k)} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega B_j^{(m_1 \ldots m_k)} dt \quad \text{при} \quad m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k - \lambda_j = 0$$

При таком и только таком выборе постоянной $a_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ уравнение (4.5) при $m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k - \lambda_j = 0$ будет иметь периодическое решение, определяемое, очевидно, формулой

$$A_1^{(m_1 \ldots m_k)} = \int B_j^{(m_1 \ldots m_k)} dt$$

Входящую сюда постоянную интегрирования можно выбрать по произволу.

При $m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k - \lambda_j \neq 0$ уравнение (4.5) имеет периодическое решение при любом выборе постоянной $a_j^{(m_1 \ldots m_k)}$. Будем полагать

$$a_j^{(m_1 \ldots m_k)} = 0 \quad \text{при} \quad m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k - \lambda_j \neq 0 \tag{4.6}$$

При таком выборе постоянной $a_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ уравнение (4.5) имеет периодическое решение:

$$A_j^{(m_1 \ldots m_k)} = e^{at} \left\{ \frac{e^{a\omega}}{1 - e^{a\omega}} \int_0^\omega e^{-at} f(t)\, dt + \int_0^t e^{-at} f(t)\, dt \right\} \tag{4.7}$$

где для краткости положено

$$a = \lambda_j - m_1\lambda_1 - \cdots - m_k\lambda_k, \qquad f(t) = B_j^{(m_1 \ldots m_k)}$$

Так как по условию a никогда не равняется $2\pi in / \omega$, то знаменатель в решении (4.7) никогда не обращается в нуль и это решение действительно существует. Благодаря тому же условию однородная часть уравнения (4.5) не имеет периодического решения с периодом, соизмеримым с ω, вследствие чего, кроме решения (4.7), уравнение (4.5) не имеет других периодических решений.

Таким путем можно последовательно определить коэффициенты $A_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ преобразования и одновременно с ними коэффициенты $a_j^{(m_1 \ldots m_k)}$ преобразованных уравнений. Эти уравнения на основании (4.6) имеют вид уравнений (2.3) или (3.5), исследованных в предыдущих параграфах, и для них задача устойчивости решается сразу.

Пример. Рассмотрим систему третьего порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2 x=f\left(t,\,x,\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,y\right)+\varphi(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^3,\qquad \frac{dy}{dt}=F\left(t,\,x,\,\frac{dx}{dt},\,y\right)$$

с одним нулевым корнем и парой чисто мнимых корней $\pm\lambda i$. Здесь f и F — аналитические функции переменных x, dx/dt, y, разложения которых по степеням этих переменных не имеют членов ниже третьего порядка, причем функция f содержит только четные степени dx/dt. Коэффициенты этих разложений, так же как и коэффициент $\varphi(t)$, являются периодическими функциями t периода ω. Полагая

$$x_1=x-\frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt},\qquad y_1=x+\frac{i}{\lambda}\frac{dx}{dt}$$

приведем рассматриваемую систему к виду

$$\frac{dy}{dt}=F\left(t,\frac{x_1+y_1}{2},\frac{\lambda(y_1-x_1)}{2i},y\right)$$

$$\frac{dx_1}{dt}=i\lambda x_1-\frac{i}{\lambda}f\left(t,\frac{x_1+y_1}{2},\frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{-4},y\right)+\frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-i\lambda y_1+\frac{i}{\lambda}f\left(t,\frac{x_1+y_1}{2},\frac{\lambda^2(y_1-x_1)^2}{4},y\right)-\frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(y_1-x_1)^3\quad(4.8)$$

Делаем далее подстановку

$$y=v+v^{(3)}+\cdots,\quad x_1=u_1+u_1^{(3)}+\cdots,\quad y_1=v_1+v_1^{(3)}+\cdots\qquad(4.9)$$

где

$$v^{(k)}(t,u_1,v_1,v)=\sum A^{(m_1m_2n)}u_1^{m_1}v_1^{m_2}v^n$$

$$u_1^{(k)}(t,u_1,v_1,v)=\sum A_1^{(m_1m_2n)}u_1^{m_1}v_1^{m_2}v^n\qquad(m_1+m_2+n=k)$$

$$\overline{v}_1^{(k)}(t,u_1,v_1,v)=\sum \overline{A}_1^{(m_1m_2n)}v_1^{m_1}u_1^{m_2}v^n$$

Стараемся подобрать преобразование (4.9) таким образом, чтобы преобразованные уравнения приняли вид (4.3). В рассматриваемом случае, учитывая (4.6), мы должны получить

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=\alpha v^3+\beta v u_1 v_1+\cdots\\ \frac{du_1}{dt}&=i\lambda u_1+\alpha_1 u_1^2 v_1+\beta_1 u_1 v^2+\cdots\\ \frac{dv_1}{dt}&=-i\lambda v_1+\overline{\alpha}_1 v_1^2 u_1+\overline{\beta}_1 v_1 v^2+\cdots\end{aligned}\qquad(4.10)$$

Подставляя (4.9) в первые два уравнения (4.8) и приравнивая члены третьего порядка, получим

$$\alpha v^3+\beta v u_1 v_1+\frac{\partial v^{(3)}}{\partial t}+i\lambda u_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial u_1}-i\lambda v_1\frac{\partial v^{(3)}}{\partial v_1}=F^{(3)}\left(t,\frac{u_1+v_1}{2},\frac{\lambda(v_1-u_1)}{2i},v\right)$$

$$\alpha_1 u_1^2 v_1+\beta_1 u_1 v^2+\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial t}+i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial u_1}u_1-i\lambda\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial v_1}v_1=\qquad(4.11)$$

$$=i\lambda u_1^{(3)}-\frac{i}{\lambda}f^{(3)}\left(t,\frac{u_1+v_1}{2},\frac{\lambda^2(v_1-u_1)^2}{-4},v\right)+\frac{\lambda^2}{8}\varphi(t)(v_1-u_1)^3$$

где $f^{(3)}$ и $F^{(3)}$ — совокупность членов третьего порядка в f и F. Если в первом из этих уравнений приравнять коэффициент при v^3, то получим

$$\alpha+\frac{dA^{(003)}}{dt}=F^{(3)}(t,0,0,1)$$

и условие периодичности $A^{(003)}$ дает

$$\alpha = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega F^{(3)}(t, 0, 0, 1)\,dt \tag{4.12}$$

Приравнивая во втором уравнении коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$, будем иметь

$$\alpha_1 + \frac{dA_1^{(210)}}{dt} = -\frac{i}{\lambda}\psi(t) + \frac{3}{8}\lambda^2\varphi(t), \qquad \beta_1 + \frac{dA_1^{(102)}}{dt} = -\frac{i}{\lambda}\Psi(t)$$

где $\psi(t)$ и $\Psi(t)$ — некоторые вещественные функции t, представляющие собой коэффициенты при $u_1^2 v_1$ и $u_1 v^2$ в $f^{(3)}(t, {}^1/_2(u_1 + v_1), -{}^1/_4\lambda^2(v_1 - u_1)^2, v)$. Отсюда

$$\alpha_1 = \frac{3\lambda^2}{8\omega}\int_0^\omega \varphi(t)\,dt - \frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega \psi(t)\,dt, \qquad \beta_1 = -\frac{i}{\lambda\omega}\int_0^\omega \Psi(t)\,dt$$

Коэффициент β мы не подсчитываем, так как он нам не понадобится. Полагая

$$u_1 = \rho e^{i\vartheta}, \qquad v_1 = \rho e^{-i\vartheta}$$

получим из (4.10) следующую решающую задачу систему второго порядка с двумя нулевыми корнями:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v^3 + \beta v\rho^2 + \cdots, \qquad \frac{d\rho}{dt} = a\rho^3 + \cdots \qquad \left(a = \frac{3\lambda^2}{8\omega}\int_0^\omega \varphi(t)\,dt\right) \tag{4.13}$$

Для форм P и G имеем

$$P(v, \rho) = \alpha v^4 + \beta v^2\rho^2 + a\rho^4, \qquad G(v, \rho) = v\rho\,[(a - \beta)\rho^2 - \alpha v^2]$$

Уравнение $G = 0$ дает две прямые $v = 0$ и $\rho = 0$ и две прямые, определяемые уравнением

$$\alpha v^2 - (a - \beta)\rho^2 = 0 \tag{4.14}$$

если только $\alpha(a - \beta) > 0$. Отсюда находим, что невозмущенное движение будет неустойчиво, если хотя бы одна из величин α или a положительна. Если $\alpha < 0$ и $a < 0$, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если уравнение (4.14) не имеет вещественных решений, т. е. если $\alpha(a - \beta) < 0$. Но то же самое будет и в том случае, когда прямые (4.14) являются вещественными. Действительно, при условии (4.14) имеем

$$P = a\rho^2 v^2 + a\rho^4$$

и, следовательно, если $a < 0$, то на обеих прямых (4.14) форма P отрицательна.

Итак, принимая во внимание (4.12) и (4.13), находим, что невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво, если обе величины

$$\int_0^\omega \varphi(t)\,dt, \qquad \int_0^\omega F^{(3)}(t, 0, 0, 1)\,dt$$

отрицательны, и неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна.

Поступила 22 VI 1951

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Сборник трудов Казанского авиационного института. 1939. № 9.
2. Малкин И. Г. Об одном способе решения задачи устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 4.
3. Малкин И. Г. Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.
4. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Математический сборник АН СССР. 1938. Т. III. Вып. 1.