Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ДВЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

М. М. Филоненко-Бородич
(Москва)

В работе [1] разобрана задача о равновесии упругого параллелепипеда под действием нагрузок, приложенных к двум противоположным граням его. В этой работе указано, при пользовании вариационным метод Кастильяно необходимо составить основной тензор напряжений и корректирующий тензор, при этом дается способ построения основного тензора в случае различных нагрузок на основаниях $z=0$ и $z=h$ параллелепипеда. Здесь эта задача рассматривается подробнее, и указывается эффективный ход решения ее. Рассмотрено также напряженное состояние параллелепипеда вследствие неравномерного распределения температуры в нем.

Номера формул указанной работы [1], на которые здесь приходится ссылаться, отмечаются звездочками, некоторые из них для удобства будут повторены.

I. Равновесие параллелепипеда под действием нагрузок на двух противоположных гранях

1. О построении решения. Для построения основного тензора применим три функции напряжений (4.1*) Максвелла

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)F_k(x, y) + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\Phi_k(x, y) \quad (k=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

Компоненты тензора напряжений выразятся так:

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{h^2}\cos\frac{\pi z}{h}F_2 + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{h^2}\cos\frac{\pi z}{h}\Phi_2 \\
Y_y &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{h^2}\cos\frac{\pi z}{h}F_1 + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{h^2}\cos\frac{\pi z}{h}\Phi_1 \\
Z_z &= \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \\
X_y &= -\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi z}{h}\right)\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x\,\partial y} \\
Y_z &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{h}\sin\frac{\pi z}{h}\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{h}\sin\frac{\pi z}{h}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\
Z_x &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{h}\sin\frac{\pi z}{h}\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{h}\sin\frac{\pi z}{h}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Сюда входят шесть произвольных функций F и Φ, которые определяются из граничных условий.

Пусть на верхнем и нижнем основаниях параллелепипеда заданы нагрузки $\psi_h(x, y)$ и $\psi_0(x, y)$. Это дает условия (4.2*)

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = \psi_0 \quad \text{при } z = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \psi_h \quad \text{при } z = h \tag{1.3}$$

При этом согласно (1.2) касательные напряжения на этих гранях отсутствуют. Боковые грани свободны от нагрузок; это приводит к условиям (4.3*) и (4.4*)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} = 0, \qquad F_2 = \Phi_2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } x = 0,\ x = d \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} = 0, \qquad F_1 = \Phi_1 = 0 \\ &\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{при } y = 0,\ y = k \tag{1.5}$$

Из уравнений (1.3) и граничных условий (1.4) и (1.5) можно видеть, что каждая из нагрузок ψ_0 и ψ_h самоуравновешена на своей грани, к ним следует добавить равномерное сжатие параллелепипеда $Z_z = q$.

Другими словами из заданных нагрузок $Q_0\ (x, y)$ и $Q_h(x,\ y)$ следует выделить этот постоянный компонент q и тем самым перейти к нагрузкам ψ_0 и ψ_h.

Однако в общем случае по выделении из заданной нагрузки $Q(x, y)$ постоянного компонента q останется нагрузка, моменты которой $M_x^{(0)}$ и $M_y^{(0)}$ относительно осей x и y отличны от нуля; в этом случае к q следует добавить нагрузку с главным вектором, равным нулю; например,

$$A \cos\frac{\pi x}{d} + B \cos\frac{\pi y}{k}$$

Моменты ее относительно осей x и y будут:

$$M_x' = -B\frac{2dk^2}{\pi^2}, \qquad M_y' = A\frac{2d^2k}{\pi^2}$$

Такую же нагрузку с обратным знаком добавим к оставшейся части заданной нагрузки; тогда для нее будет

$$M_x = M_x^{(0)} + B\frac{2dk^2}{\pi^2}, \qquad M_y = M_y^{(0)} - A\frac{2d^2k}{\pi^2}$$

Остается A и B выбрать так, чтобы эти моменты обратились в нуль:

$$A = \frac{\pi^2}{2d^2k} M_y^{(0)}, \qquad B = -\frac{\pi^2}{2dk^2} M_x^{(0)}$$

Полученные таким образом нагрузки ψ_0 и ψ_h самоуравновешены.

Неуравновешенная часть заданной нагрузки

$$Q_1(x, y) = q + \frac{\pi^2}{2dk}\left(\frac{1}{d} M_y^{(0)} \cos\frac{\pi x}{d} - \frac{1}{k} M_x^{(0)} \cos\frac{\pi y}{k}\right)$$

составит первую часть основного тензора (см. § 3 работы [1])

$$Z_z = Q_1(x, y), \qquad X_x = Y_y = X_y = Y_z = Z_x = 0$$

удовлетворяющую уравнениям равновесия. Боковая поверхность параллелепипеда при этом свободна от нагрузок.

Возвращаясь к уравнениям (1.3) и к граничным условиям (1.4) и (1.5), видим, что функции F_3 и Φ_3 связаны только граничными условиями (1.4) и (1.5) и могут быть заданы согласно (4.5*) и в частности в виде

$$F_3 = \Phi_3 = P_m(x) P_n(y) \tag{1.6}$$

где P_m и P_n — косинус-биномы, определенные (1.4*).

Для остальных четырех функций F_1, Φ_1, F_2 и Φ_2 в цитированной работе даны выражения (4.6*), (4.7*)

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, & F_2 &= -\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \Psi_0 \\ \Phi_1 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, & \Phi_2 &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \Psi_h \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функции Ψ_0 и Ψ_h таковы, что

$$\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2} = \psi_0, \qquad \frac{\partial^2\Psi_h}{\partial x^2} = \psi_h \tag{1.8}$$

При этом функции $\omega = \omega(x, y)$ и $\varphi = \varphi(x, y)$ должны удовлетворять граничным условиям

при $x = 0$, $x = d$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \Psi_0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \Psi_h, \quad \frac{\partial^3\omega}{\partial y^2\partial x} = \frac{\partial\Psi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\partial x} = \frac{\partial\Psi_h}{\partial x} \tag{1.9}$$

при $y = 0$, $y = k$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3\omega}{\partial x^2\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} = 0 \tag{1.10}$$

Замечание. Кроме приведенного выше решения (1.7) — (1.10), очевидно можно построить аналогичным путем другой вид решения, который получается из тех же формул путем одновременной перестановки индексов 1 и 2, переменных x и y, а также ребер параллелепипеда d и k.

2. Построение функций ω и φ. Будем пользоваться формулами (1.7) — (1.10) и примем

$$\Psi_0 = \int_0^x\int_0^x \psi_0\, dx^2 \qquad \left(\Psi_0 = 0,\ \frac{\partial\Psi_0}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0\right) \tag{2.1}$$

Положим

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = (\alpha + 1)\Psi_0 + \beta \tag{2.2}$$

где $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$ — функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\alpha = 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0; \qquad \beta = 0, \quad \frac{\partial\beta}{\partial x} = 0 \qquad \text{при } x = 0,\ x = d \tag{2.3}$$

Тогда граничные условия (1.9) для функции ω будут удовлетворены. Из (2.2) находим

$$\omega = \int_0^y \int_0^y [(\alpha + 1)\Psi_0 + \beta]\, dy^2 \tag{2.4}$$

где произвольные функции от x, появляющиеся при интеграции, полагаем равными нулю. Из (2.4) имеем

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \int_0^y \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\alpha + 1)\Psi_0 + \beta]\, dy^2 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} = \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\alpha + 1)\Psi_0 + \beta]\, dy \tag{2.6}$$

Условия (1.10) для функции ω при $y = 0$ будут, очевидно, удовлетворены; эти же условия при $y = k$ дают

$$\int_0^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\alpha + 1)\Psi_0 + \beta]\, dy = 0, \qquad \int_0^k \int_0^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\alpha + 1)\Psi_0 + \beta]\, dy^2 = 0 \tag{2.7}$$

Распоряжаясь функциями α и β, этим двум условиям всегда можно удовлетворить.

Мы рассмотрели построение функции ω; функция φ строится так же, с заменой ψ_0 на ψ_h.

Найдя φ и ω, подставляем их соответственно в (1.7), после чего строим основной тензор напряжений (1.2). При этом заметим, что компонент X_y не зависит от функций φ и ω; эти функции не войдут в компонент Z_z, который будет иметь всегда следующий вид:

$$Z_z = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi z}{h}\right)\psi_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{h}\right)\psi_h \tag{2.8}$$

3. Метод разделения переменных. Применим намеченный в предыдущем параграфе путь построения функций ω и φ к тому случаю, когда нагрузка ψ может быть представлена в виде

$$\psi = X_\psi(x)\, Y_\psi(y) \tag{3.1}$$

(здесь и в дальнейшем под ψ понимается либо ψ_0, либо ψ_h).

По условию самоуравновешенности этой нагрузки главный вектор ее равен нулю:

$$\int_0^k \int_0^d \psi\, dx\, dy = \int_0^d X_\psi\, dx \int_0^k Y_\psi\, dy = 0$$

Это возможно при одном из следующих условий

$$\int_0^d X_\psi\, dx = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^k Y_\psi\, dy = 0 \tag{3.2}$$

Рассмотрим первый случай:

$$\int_0^d X_\psi\, dx = 0, \qquad \int_0^k Y_\psi\, dy \neq 0 \tag{3.3}$$

Равенство нулю главного момента приводит к двум условиям:

$$\int_0^k \int_0^d \psi\, x\, dx\, dy = 0, \qquad \int_0^k \int_0^d \psi\, y\, dx\, dy = 0$$

Второе условие выполняется на основании первого из равенств (3.3):

$$\int_0^k \int_0^d \psi y\, dx\, dy = \int_0^k Y_\psi\, y\, dy \int_0^d X_\psi\, dx = 0 \tag{3.4}$$

Первое условие получит вид

$$\int_0^d X_\psi x\, dx \int_0^k Y_\psi\, dy = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^d X_\psi x\, dx = 0 \tag{3.5}$$

где принято во внимание второе условие (3.3). Воспользуемся соотношением

$$\int_0^d \int_0^d X_\psi\, dx^2 = \int_0^d X_\psi(\xi)(x-\xi)\, d\xi =$$

$$= x\int_0^d X_\psi(\xi)\, d\xi - \int_0^d \xi X_\psi(\xi)\, d\xi = -\int_0^d X_\psi(x)\, x\, dx$$

Тогда условие (3.5) можно представить в виде

$$\int_0^d \int_0^d X_\psi\, dx^2 = 0 \tag{3.6}$$

Таким образом, самоуравновешенность нагрузки (3.1) обеспечена при условиях (3.3) и (3.6). Если же окажется, что

$$\int_0^d X_\psi\, dx \neq 0 \tag{3.7}$$

то условия самоуравновешенности будут

$$\int_0^k Y_\psi\, dy = 0, \qquad \int_0^k \int_0^k Y_\psi\, dy^2 = 0 \tag{3.8}$$

Наконец, если

$$\int_0^d X_\psi\, dx = 0, \qquad \int_0^k Y_\psi\, dy = 0$$

то эти два условия на основании (3.4) и (3.5) достаточны для самоуравновешенности нагрузки.

Рассмотрим, например, второй случай, при котором имеют место условия (3.7) и (3.8). Воспользуемся решениями (1.7). Согласно (2.1) получим

$$\Psi_0 = X_\Psi Y_\psi, \qquad X_\Psi = \int_0^x \int_0^x X_\psi\, dx^2 \tag{3.9}$$

Функции α и β (формула 2.2) возьмем в виде

$$\alpha = X_\alpha Y_\alpha, \qquad \beta = X_\beta Y_\beta \tag{3.10}$$

При этом согласно (2.3) должны быть:

$$X_\alpha = X_\alpha' = X_\beta = X_\beta' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \ x = d \tag{3.11}$$

Здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по x. Правая часть (2.2) получит вид:

$$X_\alpha X_\Psi Y_\alpha Y_\psi + X_\Psi Y_\psi + X_\beta Y_\beta \tag{3.12}$$

Подставив это в условия (2.7) и учитывая (3.3) и (3.6), приведем их к виду

$$M_1 (X_\alpha X_\Psi)'' + N_1 X_\beta'' = 0, \qquad M_2 (X_\alpha X_\Psi)'' + N_2 X_\beta'' = 0 \tag{3.13}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^k Y_\alpha Y_\psi \, dy, & N_1 &= \int_0^k Y_\beta \, dy \\ M_2 &= \int_0^k \int_0^k Y_\alpha Y_\psi \, dy^2, & N_2 &= \int_0^k \int_0^k Y_\alpha \, dy^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Проинтегрируем (3.13) дважды. Получим

$$M_1 X_\alpha X_\Psi + N_1 X_\beta = 0, \qquad M_2 X_\alpha X_\Psi + N_2 X_\beta = 0 \tag{3.15}$$

Произвольные постоянные интегрирования полагаем равными нулю в силу условий (3.11). Из этих уравнений найдем X_α и X_β, не равные одновременно нулю, если соблюдено условие

$$M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0 \tag{3.16}$$

Тогда

$$X_\beta = -\frac{M_1}{N_1} X_\Psi X_\alpha, \quad \text{или} \quad X_\beta = -\frac{M_2}{N_2} X_\Psi X_\alpha \tag{3.17}$$

Оба этих равенства эквиваленты в силу (3.16).

Таким образом, X_α может быть наперед задана произвольно с соблюдением лишь условий (3.11), и тогда X_β найдется по (3.17).

Заметим, что функция Y_β в предыдущих рассуждениях осталась произвольной; ею всегда можно распорядиться так, чтобы

$$N_1 \neq 0, \qquad N_2 \neq 0 \tag{3.18}$$

и чтобы условие (3.16) было удовлетворено.

Если функции X_α, X_β, Y_α, Y_β таким путем определены, то, подставив их в (3.14) и далее в (2.2), найдем $\partial^2\omega / \partial y^2$; и, наконец, пользуясь (2.4) и (2.5), определим $\partial^2\omega / \partial x^2$.

Внеся эти значения в (1.7), определим функции F_1, F_2, Φ_1, Φ_2, и согласно (1.2) построим основной тензор задачи.

Наши рассуждения относились ко второму случаю, соответствующему условиям (3.8).

Если имеет место первый случай [условия (3.3) и (3.6)], то следует воспользоваться видом решения, которое строится согласно замечанию в конце § 1. Все предыдущие выкладки, начиная с формулы (3.9), придется воспроизвести лишь взаимно переставив (как указано выше) x и y; d и k; поэтому условие (3.11) заменится следующими:

$$Y_\alpha = Y_\alpha' = Y_\beta = Y_\beta' = 0 \quad \text{при } y = 0, \ y = k \tag{3.19}$$

Рассмотренный здесь способ распространяется, очевидно, и на тот случай, если

$$\psi = \sum X_\psi Y_\psi$$

при условии, что каждый член этой суммы даст самоуравновешенную нагрузку.

4. Пример. В качестве примера, поясняющего рассуждения § 3, возьмем нагрузку, рассмотренную в § 2 работы [1]. А именно[1]

$$q(x, y) = \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \tag{4.1}$$

Выделив отсюда равномерную нагрузку $q = 1$ (она войдет в первый тензор, указанный в § 3 работы [1]), получим самоуравновешенную часть ее, которую для симметрии представим в виде:

$$\psi = \cos\frac{2\pi y}{k}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{d} - 1\right) + \cos\frac{2\pi x}{d}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi y}{k} - 1\right) \tag{4.2}$$

В обоих членах этой формулы переменные разделены (ср. формулу 3.1). Рассмотрим первый член, обозначив:

$$X_\psi = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{d} - 1, \quad Y_\psi = \cos\frac{2\pi y}{k} \tag{4.3}$$

Легко видеть, что в этом случае имеют место условия (3.7) и (3.8).
Согласно (3.9) подсчитываем

$$X_\Psi = \int_0^x\int_0^x \left(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{d} - 1\right) dx^2 = -\frac{d^2}{8\pi^2}\left(\cos\frac{2\pi x}{d} - 1 + 4\pi^2\frac{x^2}{d^2}\right) \tag{4.4}$$

Далее в формулах (3.10) выберем X_α в виде

$$X_\alpha = 1 - \cos\frac{2\pi x}{d} \tag{4.5}$$

удовлетворяющем условиям (3.11). Функцию Y_α выбираем произвольно; положим

$$Y_\alpha = 1 - \cos\frac{2\pi y}{k} \tag{4.6}$$

Для подсчета интегралов (3.14) и соблюдения условия (3.16) при выборе функции Y_β включаем в нее произвольный параметр λ; сделать это можно различными способами, ограничиваясь лишь слабыми условиями (3.18).

Примем, например,

$$Y_\beta = y^2 + \lambda$$

[1] Эта нагрузка является частным видом нагрузки, рассматриваемой ниже в § 5; задача решается несколько проще указанным там способом.

Тогда, подсчитывая интегралы (3.14) с учетом (4.3) и (4.6), найдем

$$M_1 = \int_0^k \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \cos\frac{2\pi y}{k} = -\frac{k}{2}$$

$$M_2 = \int_0^k \int_0^k \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \cos\frac{2\pi y}{k} = -\frac{k^2}{4}$$

$$N_1 = \int_0^k (y^2 + \lambda)\, dy = \frac{k}{3}(k^2 + 3\lambda)$$

$$N_2 = \int_0^k \int_0^k (y^2 + \lambda)\, dy^2 = \frac{k^2}{2}\left(\frac{k^2}{6} + \lambda\right)$$

Подставляя эти значения в (3.16), найдем $\lambda = -\frac{1}{4} k^2$, так что

$$Y_\beta = y^2 - \frac{1}{4} k^2 \tag{4.7}$$

При этом условия (3.18) удовлетворены, т. е. $N_1 \neq 0$, $N_2 \neq 0$. Однако в случае нагрузки (4.3) удобно принять

$$Y_\beta = \lambda \pm \cos\frac{2\pi y}{k}$$

Тогда $N_1 = \lambda k$, $N_2 = {}^1\!/_2\, \lambda k^2$ и условие (3.16) удовлетворено при произвольном λ; действительно, оно получит вид:

$$\left(-\frac{k}{2}\right)\frac{\lambda k^2}{2} - \left(-\frac{k^2}{4}\right)\lambda k = 0$$

Вследствие условий (3.18) λ надо взять отличным от нуля; примем $\lambda = 1$ и тогда

$$Y_\beta = 1 \pm \cos\frac{2\pi y}{k} \tag{4.8}$$

Теперь остается из (3.17) найти X_β. Имеем

$$X_\beta = -\frac{1}{4}\left(2 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right) \tag{4.9}$$

Пользуясь (3.10), (4.5), (4.6), (4.8), и (4.9), получим:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \\ \beta &= -\frac{1}{4}\left(2 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Подставив (4.10), (4.4) и (4.3) в (3.10) и затем в (2.2), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = &-\frac{d^2}{8\pi^2}\left[\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) - 1\right]\left(\cos\frac{2\pi x}{d} - 1 + \right. \\ &\left. + \frac{4\pi^2}{d^2} x^2\right)\cos\frac{2\pi y}{k} - \frac{1}{4}\left(2 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Наконец, из (2.4) и (2.5) получим выражение $\partial^2\omega / \partial x^2$. Функции F_1 и F_2 для тензора (1.2) строятся по формулам (1.7).

Второй член нагрузки (4.2) отличается от первого лишь перестановками x и y и, соответственно, d и k. Поэтому вычисления для него проходятся с учетом замечания в конце § 1.

5. Случай нагрузки, симметричной относительно главных осей загруженной грани. В этом случае нагрузку можно представить в виде

$$q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{d} \cos \frac{2n\pi y}{k} \tag{5.1}$$

Выделив отсюда первый член C_{00}, получим самоуравновешенную нагрузку; члены оставшейся суммы будут трех родов:

$$\psi_{01} = C_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{d} \cos \frac{2n\pi y}{k} \quad \text{при } m \neq 0,\ n \neq 0 \tag{5.2}$$

$$\psi_{02} = C_{m0} \cos \frac{2m\pi x}{d} \quad \text{при } m \neq 0,\ n = 0 \tag{5.3}$$

$$\psi_{03} = C_{0n} \cos \frac{2n\pi y}{k} \quad \text{при } m = 0,\ n \neq 0 \tag{5.4}$$

В данном случае нет надобности применять рассмотренный выше общий ход рассуждений и решение можно упростить.

Рассмотрим член первого рода (5.2). Частное решение первого из уравнений (1.3) возьмем в виде:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^y \psi_{01} dy^2 = C_{mn} \frac{k^2}{8n^2\pi^2} \cos \frac{2m\pi x}{d} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{k}\right) \\ F_2 &= \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x \psi_{01} dx^2 = C_{mn} \frac{d^2}{8m^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{d}\right) \cos \frac{2n\pi y}{k} \end{aligned} \tag{5.5}$$

При этом необходимые граничные условия (1.4) и (1.5) удовлетворены, так как, согласно (2.1), $\Psi_0(d) = 0$; упрощение решения обусловлено именно этой особенностью нагрузки (5.2). Переходя к членам второго рода (5.3), возьмем частное решение первого уравнения (1.3) в виде

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = \int_0^x \int_0^x \psi_{02} dx^2 = C_{m0} \frac{d^2}{4m^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{d}\right) \tag{5.6}$$

Для членов третьего рода (5.4) примем аналогично

$$F_1 = C_{0n} \frac{k^2}{4n^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{k}\right), \qquad F_2 = 0 \tag{5.7}$$

Граничные условия (1.4) и (1.5) в этих случаях также удовлетворены.

На основании сказанного, функции F_1 и F_2 для нагрузки (5.1), по исключении неуравновешенной части C_{00}, могут быть записаны так:

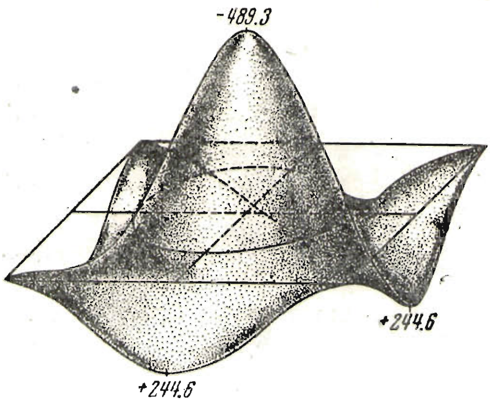
$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{k^2}{8\pi^2} \sum\sum C_{mn} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2m\pi x}{d} \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{k}\right) \\ F_2 &= \frac{d^2}{8\pi^2} \sum\sum C_{mn} \frac{1}{m^2} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{d}\right) \cos \frac{2n\pi y}{k} \end{aligned} \tag{5.8}$$

следует лишь учесть, что в соответствии с (5.6) и (5.7), при $n = 0$, соответствующий член в сумме F_1 отсутствует, а в сумме F_2 удваивается; при $m = 0$, соответствующий член в сумме F_2 отсутствует, а в сумме F_1 удваивается.

II. Температурные напряжения в упругом параллелепипеде

6. Метод решения задачи. Рассмотрим напряженное состояние упругого прямого параллелепипеда с ребрами d, k, h, свободного от нагрузок на поверхности, но подверженного действию температуры, распределенной внутри его по закону

$$t = T(x, y, z) \tag{6.1}$$



Фиг. 1

Применим метод решения, изложенный в нашей работе [1], пользуясь принципом Кастильяно.

Тензор напряжений построим при помощи функций напряжений Максвелла (1.5*), выражая их через косинус-биномы P_m, P_n, P_p согласно формулам (1.3*). Тогда компоненты тензора напряжений выразятся согласно формулам (1.6*). При этом вся поверхность параллелепипеда свободна от нагрузок благодаря граничным свойствам (1.4) косинус-биномов.

В предыдущей работе [1] тензор (1.6*) рассматривался как корректирующий в методе Кастильяно; для настоящей задачи он вместе с тем будет и основным, поскольку он удовлетворяет граничным условиям этой задачи.

7. Вариационная формула Кастильяно. Для применения метода Кастильяно к случаю температурного воздействия будем исходить из следующего равенства:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(S)} (X_\nu u' + Y_\nu v' + Z_\nu w')\, dS + \int\limits_{(\tau)} (Xu' + Yv' + Zw')\, d\tau = \\ &= \int\limits_{(\tau)} (X_x e_{xx}' + Y_y e_{yy}' + Z_z e_{zz}' + X_y e_{xy}' + Y_z e_{yz}' + Z_x e_{zx}')\, d\tau \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь X_ν, Y_ν, Z_ν — поверхностные нагрузки; ρX, ρY, ρZ — объемные силы; $X_x, \ldots, Z_x$ — компоненты какого-либо тензора напряжений, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям; $e_{xx}', \ldots, e_{zx}'$ — компоненты тензора деформации, вызванной произвольно заданными перемещениями u', v', w' точек тела.

Равенство (7.1) есть простое обобщение известного равенства, применяемого обычно при доказательстве теоремы единственности Кирхгоффа; оно может быть получено путем преобразования соответствующего поверхностного интеграла в объемный с использованием условий на поверхности и уравнений равновесия Навье-Коши в напряжениях.

Применим равенство (7.1) к рассматриваемой температурной задаче. Отбросим объемные силы и учтем, что поверхность свободна от нагрузок:

$$X_\nu = Y_\nu = Z_\nu = 0$$

В качестве напряжений $X_x, \ldots, X_y$ возьмем возможные вариации $\delta X_x, \ldots, \delta Z_x$ компонентов искомого тензора напряжений, удовлетворяющие уравнениям равновесия. В качестве u', v', w' возьмем действительные перемещения точек тела u, v, w; выразим деформации через напряжения

$$e_{xx}' = e_{xx} = \frac{1}{E}[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)] + \alpha t, \qquad e_{xy}' = \frac{2(1+\sigma)}{E} X_y \tag{7.2}$$

где α — коэффициент линейного расширения (деформации e_{yy}', e_{zz}', e_{yz}' и e_{zx}' получаются круговой перестановкой x, y, z).

Подставив эти значения в (7.1) и вынося знак вариации за знак интеграла, получим

$$\frac{1}{2E}\delta\int\limits_{(\tau)}[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_xY_y + Y_yZ_z + Z_zX_x) +$$
$$+ 2(1+\sigma)(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2) + 2E\alpha t(X_x + Y_y + Z_z)]\,d\tau = 0 \tag{7.3}$$

Если сюда внесем значение t из (6.1), а выражения компонентов тензора напряжений из (1.6*), и выполним интегрирование, то интеграл левой части (7.3) выразится в виде квадратичной функции от коэффициентов A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}; уравнение (7.3) является необходимым условием экстремума этой функции.

Введем обозначение

$$W = \frac{1}{2E}\int\limits_{(\tau)}[X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2 - 2\sigma(X_xY_y + Y_yZ_z + Z_zX_x) +$$
$$+ 2(1+\sigma)(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2) + 2E\alpha T(X_x + Y_y + Z_z)]\,d\tau \tag{7.4}$$

Тогда условия экстремума можно написать в виде

$$\frac{\partial W}{\partial A_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial B_{mnp}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial C_{mnp}} = 0 \tag{7.5}$$

Эти условия дадут систему линейных уравнений для определения коэффициентов A_{mnp}, B_{mnp}, C_{mnp}.

8. Пример. Пусть внутри прямого параллелепипеда с ребрами d, k, h задано распределение температуры по закону

$$T = T_1 \sin\frac{\pi x}{d}\sin\frac{\pi y}{k}\sin\frac{\pi z}{h}$$

дающему в центре $\max T = T_1$, а на поверхности $T = 0$. Материал — сталь, для которой $E = 2 \times 10^6$ кг см$^{-2}$, $\alpha = 125 \times 10^{-7}$; $E\alpha = 25$ кг см$^{-2}$.

Решая эту задачу в первом приближении, функции напряжений (1.5*) возьмем в виде

$$\varphi_1 = AP_0(x)P_0(y)P_0(z), \quad \varphi_2 = BP_0(x)P_0(y)P_0(z), \quad \varphi_3 = CP_0(x)P_0(y)P_0(z)$$

Обозначим отношения ребер параллелепипеда через $h/k = \lambda$ и $k/d = \nu$. Тогда уравнения (7.5) получаются в виде

$$(3 + 3\lambda^4 + 2\lambda^2)A + (\lambda^2\nu^2 - 3\sigma - \sigma\nu^2 - \sigma\lambda^2)B + (\nu^2 - \sigma\lambda^2 - \sigma\lambda^2\nu^2 - 3\sigma\lambda^4)C =$$
$$= \frac{25\cdot 8^3 T_1}{2\cdot 3^4\pi^5}k^2(1+\lambda^2)\lambda^2$$

$$(\lambda^2\nu^2 - 3\sigma - \sigma\nu^2 - \sigma\lambda^2) A + (3 + 3\nu^4 + 2\nu^2) B + (\lambda^2 - \sigma\nu^2 - 3\sigma\nu^4 - \sigma\lambda^2\nu^2) C = = \frac{25\cdot 8^3 T_1}{2\cdot 3^4\pi^5} d^2 (1 + \nu^2)\nu^2$$

$$(\nu^2 - \sigma\lambda^2 - \sigma\lambda^2\nu^2 - 3\sigma\lambda^4) A + (\lambda^2 - \sigma\nu^2 - 3\sigma\nu^4 - \sigma\lambda^2\nu^2) B + + (3\lambda^4 + 3\nu^4 + 2\lambda^2\nu^2) C = \frac{25\cdot 8^3 T_1}{2\cdot 3^4\pi^5} (d^2 + k^2)\lambda^2\nu^2$$

Приведем результат решения этих уравнений для случая $d = k$, и, следовательно, при $\nu = \lambda$ (параллелепипед с квадратным основанием). Для A, B и C имеем

$$A = B = \frac{25\cdot 8^3 T_1 h^2}{2\cdot 3^4\pi^5} \frac{3 + 4\lambda^2 + 4\sigma\lambda^2 + \sigma}{16\lambda^4 - 16\lambda^4\sigma^2 + 8\lambda^2 - 8\sigma^2\lambda^2 - 10\sigma - \sigma^2 + 11}$$

$$C = \frac{25\cdot 8^3 T_1 h^2}{2\cdot 3^4\pi^5} \frac{16\lambda^4 + 16\lambda^4\sigma + 12\sigma\lambda^2 - 8\sigma^2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\sigma + 8}{4\lambda^2 (16\lambda^4 - 16\sigma^2\lambda^4 + 8\lambda^2 - 8\lambda^2\sigma^2 - 10\sigma - \sigma^2 + 11)}$$

Имея значения постоянных A, B, C согласно (1.6*), подсчитываем напряжения. Например, для компонента Z_z будем иметь

$$Z_z = \frac{4\pi^2}{d^2} A \left[\cos\frac{2\pi x}{d}\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{h}\right) + \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\cos\frac{2\pi y}{k}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right]$$

Или окончательно:

$$Z_z = 10.195\, T_1 \frac{\lambda^2 (3 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2\sigma + \sigma)}{16\lambda^4 - 16\lambda^4\sigma^2 + 8\lambda^2 - 8\sigma^2\lambda^2 - 10\sigma - \sigma^2 + 11} \times \left[\cos\frac{2\pi x}{d}\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{k}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{h}\right) + \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{d}\right)\cos\frac{2\pi y}{k}\left(1 - \cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right]$$

На фиг. 1 показана поверхность распределения этих напряжений по среднему сечению $Z = {}^1/_2 h$ в случае куба ($\lambda = 1$), при $T_1 = 20^\circ$, $\sigma = {}^1/_3$. Максимальное сжимающее напряжение в центре куба $x / d = y / k = z / h = {}^1/_2$ будет

$$Z_z = 10.195 \times 20 \frac{3 + 4 + {}^4/_3 + {}^1/_3}{16 - {}^{16}/_9 + 8 - {}^8/_9 - {}^{10}/_9 - {}^1/_9 + 11} [(-1)\cdot 2\cdot 2 + 2(-1)\cdot 2] = 489.3 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

В срединах сторон квадрата получается вдвое меньше растягивающее напряжение; эти области являются наиболее опасными, так как в окрестности центра имеется напряженное состояние, близкое всестороннему сжатию, безопасному при весьма больших напряжениях. Необходимо, конечно, учесть, что пример этот проделан в первом приближении; следует ожидать, что в следующих приближениях распределение напряжений несколько выравнится, и приведенные сейчас максимальные напряжения понизятся. Равенство нулю напряжений в углах сечения объясняется граничными свойствами косинус-биномов. В последующих приближениях области, близких к нулю напряжений в окрестностях углов, будут сокращаться и в пределе — в углах должно обнаружиться явление Гиббса, как это имеет место, например, при разложении единицы в ряд по $\sin m\pi x$ на интервале $(0,1)$.

Поступила 5 V 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.