Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В. М. Даревский

(Москва)

Работа содержит строгое решение уравнений теории цилиндрической оболочки при элементарной нагрузке (т. е. нагрузке, равномерно распределенной по элементу s средней поверхности S оболочки, ограниченному четырьмя отрезками линий кривизны) и доказательства некоторых положений, касающихся техники перехода от элементарной нагрузки к ее предельным случаям: сосредоточенной и равномерно распределинной по отрезку линии кривизны поверхности S нагрузкам. Укажем, что в качестве исходных принимаются те же уравнения (речь идет об уравнениях равновесия и равенствах, связывающих силовые факторы с величинами, характеризующими деформацию поверхности S), которые принимал Ляв [1], рассматривая краевой эффект. Если из этих уравнений получить уравнения для перемещений, то последние будут содержать некоторые члены, которыми в ряде работ (например, в [2]) пренебрегают. Мы не пренебрегаем этими членами; как будет видно, они могут в некотором отношении существенно влиять на решение.

Хотя принятый здесь вариант Лява, как и другие варианты теории оболочек, основанные на гипотезе Кирхгофа, не является безупречным, он представляется нам рациональным. Впрочем, используемый в настоящей работе метод останется в силе, если встать на путь обычных упрощений или исходить из варианта В. В. Новожилова[3] или же из полных уравнений В. З. Власова [4].

§ 1. Основные уравнения теории цилиндрической оболочки. Рассматривая цилиндрическую оболочку, обозначим через $2h$, R, φ и x соответственно толщину оболочки, радиус напрявляющего круга средней поверхности, угол между двумя аксиальными сечениями, из которых одно фиксировано, и расстояние между фиксированным и произвольным поперечными сечениями оболочки. Для x и φ установим положительные и отрицательные направления отсчета.

Построим на средней поверхности S недеформированной оболочки правую подвижную систему координат XYZ, у которой оси X, Y, Z совпадают соответственно с образующей, касательной к направляющему кругу и нормалью к S. При этом будем считать, что ось Z направлена по внутренней нормали, а оси X и Y направлены в стороны возрастания величин x и φ.

Пусть точка Q_0 поверхности S перемещается вследствие деформации в положение Q. Компоненты этого перемещения по осям X, Y, Z, начало которых находится в Q_0, обозначим через u, v, w.

Компоненты по осям X, Y, Z внутренних сил и моментов, действующих на элементы поперечного и аксиального сечений оболочки, обозначим соответственно через T_1, S_1, N_1, H_1, G_1 и $-S_2$, T_2, N_2, $-G_2$, H_2 (это известные обозначения Лява), причем первые будем относить к единице длины направляющего круга поверхности S, а вторые — к единице длины образующей поверхности S.

Далее положим, что главный вектор системы внешних сил, действующих на оболочку, и главный момент, отнесенные к единице площади поверхности S, имеют по осям X, Y, Z соответственно следующие компоненты: q_1, q_2, q_3 и q_4, q_5, 0 (компонента главного момента по оси Z, как известно, обязана отсутствовать).

Уравнения равновесия цилиндрической оболочки имеют вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial S_2}{\partial \varphi}+q_1=0, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial G_2}{\partial \varphi}+N_2+q_4=0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial T_2}{\partial \varphi}-\frac{1}{R}N_2+q_2=0, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial H_2}{\partial \varphi}-N_1+q_5=0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial \varphi}+\frac{1}{R}T_2+q_3=0, \qquad \frac{1}{R}H_2+S_1+S_2=0 \tag{1.1}$$

Деформация средней поверхности оболочки определяется величинами

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varkappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-w\right), \qquad \varkappa_2=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}, \qquad \tau=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

через которые могут быть выражены внутренние силовые факторы.

Следуя Ляву [1], будем исходить из равенств

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2), \qquad G_1=-D(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2)$$

$$T_2=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1), \qquad G_2=-D(\varkappa_2+\sigma\varkappa_1)$$

$$S_1-S_2=\frac{2Eh}{1+\sigma}\omega, \qquad H_1=-H_2=D(1-\sigma)\tau$$

где E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона, $D=2Eh^3/3(1-\sigma^2)$.

Эти равенства после подстановки в них вышеуказанных значений ε_1, ε_2, ω, $\varkappa_1$ $\varkappa_2$, τ принимают вид:

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-w\right)\right]$$

$$T_2=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-w\right)+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

$$S_1-S_2=\frac{2Eh}{1+\sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)$$

$$G_1=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\sigma}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\right] \tag{1.2}$$

$$G_2=-\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)+\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]$$

$$H_1=-H_2=\frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Если из уравнений (1.1) и равенств (1.2) исключить T_1, T_2, S_1, S_2, H_1, H_2, G_1, G_2 и положить $\xi = x / R$, то будем иметь следующую систему уравнений:

$$L_{\nu 1}u + L_{\nu 2}v + L_{\nu 3}w + L_{\nu 4}N_1 + L_{\nu 5}N_2 = P_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, 5) \tag{1.3}$$

где

$$L_{11} = 2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + (1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad L_{12} = \left(1 + \sigma - \frac{1-\sigma}{3}\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}$$

$$L_{13} = -2\sigma\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1-\sigma}{3}\frac{h^2}{R^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}, \qquad L_{14} = L_{15} = 0, \quad P_1 = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}R^2 q_1$$

$$L_{21} = (1+\sigma)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi}, \qquad L_{22} = 2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (1-\sigma)\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

$$L_{23} = -2\frac{\partial}{\partial\varphi} + (1-\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi}, \qquad L_{24} = 0, \quad L_{25} = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}R$$

$$P_2 = -\frac{1-\sigma^2}{Eh}R^2 q_2 \tag{1.4}$$

$$L_{31} = \sigma\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad L_{32} = \frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad L_{33} = -1$$

$$L_{34} = \frac{1-\sigma^2}{2Eh}R\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad L_{35} = \frac{1-\sigma^2}{2Eh}R\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad P_3 = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}R^2 q_3$$

$$L_{41} = 0, \qquad L_{42} = \frac{2h^2}{3R^2}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right], \qquad L_{43} = \frac{2h^2}{3R^2}\left(\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\varphi} + \frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right)$$

$$L_{44} = 0, \qquad L_{45} = \frac{1-\sigma^2}{Eh}R, \qquad P_4 = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}Rq_4$$

$$L_{51} = 0, \qquad L_{52} = -\frac{h^2}{3R^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}, \qquad L_{53} = -\frac{h^2}{3R^2}\left(\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2}\right)$$

$$L_{54} = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}R, \qquad L_{55} = 0, \qquad P_5 = -\frac{1-\sigma^2}{2Eh}Rq_5$$

Ниже (см. стр. 542) будет указано, почему мы сохраняем малые члены в коэффициентах операторов L_{12} и L_{22}.

Задача о деформации и напряженном состоянии цилиндрической оболочки будет решена, если, решив уравнения (1.3) и определив при помощи формул (1.2) и последнего равенства (1.1) все внутренние силовые факторы, окажется возможным удовлетворить всем граничным условиям.

§ 2. Решение уравнений цилиндрической оболочки при элементарной нагрузке. Будем искать решение системы уравнений (1.3).

Мы умышленно не исключаем из этой системы N_1 и N_2, так как это связано с дифференцированием величин q_4 и q_5, которые в случае элементарной нагрузки (см. введение), вообще говоря, разрывны. Разрывность нагрузки препятствует решению рассматриваемой задачи только в перемещениях или же только в усилиях (заметим, что уравнения неразрывности деформаций, выраженные в усилиях, содержат производные от компонент нагрузки).

Пусть $D = (L_{\nu\mu})$ — детерминант системы (1.3), составленный из линейных дифференциальных операторов $L_{\nu\mu}$. Обозначим минор детерминанта D, соответствующий элементу $L_{\nu\mu}$, через $D_{\nu\mu}$.

Если при каком-нибудь фиксированном $j = 1, 2, \ldots, 5$ положить

$$u = (-1)^{j+1} D_{j1}\Phi, \qquad v = (-1)^{j+2} D_{j2}\Phi, \qquad w = (-1)^{j+3} D_{j3}\Phi$$
$$N_1 = (-1)^{j+4} D_{j4}\Phi, \quad N_2 = (-1)^{j+5} D_{j5}\Phi$$

то, какова бы ни была функция $\Phi = \Phi(\xi, \varphi)$ (но, конечно, дифференцируемая нужное число раз), все уравнения (1.3) без правых частей будут удовлетворены, кроме уравнения с индексом $\nu = j$.

Принимая это во внимание, получаем следующее частное решение системы (1.3) с правыми частями:

$$u = \sum_{\nu=1}^{5} (-1)^{\nu+1} D_{\nu 1}\Phi_\nu, \qquad v = \sum_{\nu=1}^{5} (-1)^{\nu+2} D_{\nu 2}\Phi_\nu, \qquad w = \sum_{\nu=1}^{5} (-1)^{\nu+3} D_{\nu 3}\Phi_\nu$$
$$N_1 = \sum_{\nu=1}^{5} (-1)^{\nu+4} D_{\nu 4}\Phi_\nu, \qquad N_2 = \sum_{\nu=1}^{5} (-1)^{\nu+5} D_{\nu 5}\Phi_\nu \tag{2.1}$$

где Φ_ν есть какое-нибудь решение уравнения

$$D\Phi_\nu = P_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots . 5) \tag{2.2}$$

Развернув детерминант D и пренебрегая в коэффициентах при производных такими величинами, как h^2 / R^2 по сравнению с единицей, получаем

$$-\frac{3E^2}{(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2} D = \frac{\partial^8}{\partial\xi^8} + 4\frac{\partial^9}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2} + 6\frac{\partial^8}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^4} + (7-\sigma^2)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\partial\varphi^2} +$$
$$+ 3(1-\sigma^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 4\frac{\partial^8}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^6} + 8\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} + \frac{\partial^8}{\partial\varphi^8} + 2\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} \tag{2.3}$$

Перейдем к определению Φ_ν при элементарной нагрузке.

Выделим на средней поверхности S цилиндрической оболочки элемент s, ограниченный четырьмя отрезками линий кривизны. Пусть $a = 2R\alpha$ — длина каждого из отрезков линий нулевой кривизны, а $b = 2R\beta$ — длина каждого из двух других отрезков, ограничивающих s. Мы называем нагрузку элементарной, если она распределена по вышеуказанному элементу s с некоторыми постоянными составляющими Q_ν / ab и равна нулю вне этого элемента (говоря о составляющих нагрузки, мы имеем в виду компоненты Q_1 / ab, Q_2 / ab, Q_3 / ab и Q_4 / ab, Q_5 / ab, 0 по осям X, Y, Z подвижной системы координат соответственно главного вектора системы внешних сил и главного момента, отнесённых к единице площади поверхности S).

Считая нагрузку, действующую на цилиндрическую оболочку, элементарной, расположим начало координат ξ, φ в центре нагруженного элемента s.

Тогда для компонентов $q_\nu(\xi, \varphi)$ нагрузки будем иметь формулу

$$q_\nu(\xi, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{Q_\nu}{4R^2 ab} = \text{const}, & \text{если } |\xi| \leqslant \alpha, \ |\varphi| \leqslant \beta \quad (\nu = 1, \ldots, 5) \\ 0 & \text{если } |\xi| > \alpha \text{ или } 2\pi - \beta > |\varphi| > \beta \end{cases} \tag{2.4}$$

Величины P_ν, определенные формулами (1.4), представим в виде

$$P_\nu(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi \tag{2.5}$$

где согласно (2.4)

$$P_{\nu 0} = \underset{(n>0)}{\frac{n\beta}{2\sin n\beta} P_{\nu n}} = \begin{cases} -\dfrac{(1-\sigma^2) k_\nu Q_\nu}{4\pi E h \alpha}, & \text{если } |\xi| \leqslant \alpha \\ 0, & \text{если } |\xi| > \alpha \end{cases} \tag{2.6}$$

$$(\tfrac{1}{2} k_1 = \tfrac{1}{2} k_2 = k_3 = Rk_4 = Rk_5 = 1)$$

Положим, далее,

$$\Phi_\nu(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi \tag{2.7}$$

Из равенств (2.2), (2.3), (2.5), (2.7) следует [1]

$$f_{\nu n}^{(8)} - 4n^2 f_{\nu n}^{(6)} + [6n^4 - (7 - \sigma^2) n^2 + 4\varkappa^4] f_{\nu n}^{(4)} - 4n^2 (n^2 - 1)^2 f_{\nu n}^{(2)} + \\ + n^4 (n^2 - 1)^2 f_{\nu n} = q_{\nu n} \qquad (\nu = 1, \ldots, 5;\ n = 0, 1, \ldots) \tag{2.8}$$

где

$$\varkappa = \sqrt[4]{3(1-\sigma^2)} \sqrt{\frac{R}{2h}}, \qquad q_{\nu n} = -\frac{3E^2}{(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2} P_{\nu n}(\xi) \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{2.9}$$

В уравнении (2.8) коэффициент при четвертой производной можно упростить. Именно, при любом n можно отбросить в квадратных скобках второй член, так как он мал либо по сравнению с первым, либо со вторым членом, стоящим в этих скобках; при $n = 1$ можно отбросить в квадратных скобках не только второй, но и первый член.

Таким образом, вместо уравнения (2.8) можно написать следующее:

$$D_n F_{\nu n}(\xi) = q_{\nu n}(\xi) \qquad (\nu = 1, \ldots, 5;\ n = 0, 1, \ldots) \tag{2.10}$$

Здесь введены обозначения:

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{d^4}{d\xi^4} + 4\varkappa^4, & \text{если } n = 0 \\ \dfrac{d^4}{d\xi^4} - 4\dfrac{d^2}{d\xi^2} + 4\varkappa^4, & \text{если } n = 1 \\ \dfrac{d^8}{d\xi^8} - 4n^2 \dfrac{d^6}{d\xi^6} + (6n^4 + 4\varkappa^4) \dfrac{d^4}{d\xi^4} - 4n^2 (n^2 - 1)^2 \dfrac{d^2}{d\xi^2} + n^4 (n^2 - 1)^2, & \text{если } n > 1 \end{cases}$$

$$F_{\nu 0} = f_{\nu 0}^{(4)}, \qquad F_{\nu 1} = f_{\nu 1}^{(4)}, \qquad F_{\nu n} = f_{\nu n} \qquad (n>1)$$

Применяя метод интеграла Фурье, получаем частное решение уравнения (2.10) в виде

$$F_{\nu n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(\xi - \zeta)} \frac{q_{\nu n}(\zeta)}{\Delta_n(\eta)} d\zeta \tag{2.11}$$

---

[1] Разумеется, при условии, что производные, фигурирующие в операторе D [см. равенство (2.3)], могут быть взяты от $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ при помощи почленного дифференцирования ряда (2.7). Эта операция будет оправдана ниже в § 3.

В этой формуле [1]

$$\Delta_n(\eta)=\begin{cases}\eta^4+4\varkappa^4, & \text{если } n=0\\ \eta^4+4\eta^2+4\varkappa^4, & \text{если } n=1\\ \eta^8+4n^2\eta^6+(6n^4+4\varkappa^4)\,\eta^4+4n^2\,(n^2-1)^2\,\eta^2+n^4\,(n^2-1)^2, & \text{если } n>1\end{cases} \tag{2.12}$$

Используя равенства (2.9) и (2.6), можно переписать формулу (2.11) следующим образом:

$$F_{\nu n}=\lambda_{\nu n}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha\eta\cos\xi\eta}{\eta\Delta_n(\eta)}\,d\eta \qquad (n=0,1,\ldots) \tag{2.13}$$

где

$$\frac{1}{\beta}\,\lambda_{\nu 0}=\frac{n}{2\sin n\beta}\,\lambda_{\nu n}=\frac{3Ek_\nu Q_\nu}{4\pi^2\,(1-\sigma)(1-\sigma^2)\,h\alpha\beta} \qquad (n>0)$$

или

$$F_{\nu n}=\frac{1}{2}\,\lambda_{\nu n}\left[\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\xi)\,\eta}{\eta\Delta_n(\eta)}\,d\eta+\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\xi)\,\eta}{\eta\Delta_n(\eta)}\,d\eta\right] \tag{2.14}$$

Исходя из формулы (2.14), получим окончательное выражение для $F_{\nu n}$. Напишем уравнение

$$\Delta_n(\eta)=0 \tag{2.15}$$

Можно считать, что при $n=0$ и 1 корни этого уравнения одни и те же. Именно

$$\eta_n=\varkappa(1+i), \qquad -\eta_n, \qquad \bar{\eta}_n, \qquad -\bar{\eta}_n \qquad (n=0,\,1)$$

Из структуры выражения $\Delta_n(\eta)$ ясно, что при любом n уравнение (2.15) не имеет действительных корней. Преобразуя уравнение (2.15) при помощи подстановки $i\eta=\eta'$ и пользуясь последовательностью Штурма, можно показать, что преобразованное уравнение (2.15) при любом n не имеет действительных корней η'. Следовательно, уравнение (2.15) не имеет чисто мнимых корней η. Можно также показать, что уравнение (2.15) не имеет кратных корней.

Принимая во внимание сказанное, а также то, что выражение $\Delta_n(\eta)$ содержит η только в четных степенях, обозначим корни уравнения (2.15) при $n>1$ через

$$\eta_{n1}=n\,(A_{n1}+iB_{n1}), \qquad -\eta_{n1}, \qquad \bar{\eta}_{n1}, \qquad -\bar{\eta}_{n1}$$
$$\eta_{n2}=n\,(A_{n2}+iB_{n2}), \qquad -\eta_{n2}, \qquad \bar{\eta}_{n2}, \qquad -\bar{\eta}_{n2}$$

причем будем считать, что корни $\eta_{n1},\ -\bar{\eta}_{n1};\ \eta_{n2},\ -\bar{\eta}_{n2}$ расположены в верхней полуплоскости ($B_{n1},\ B_{n2}>0$).

[1] Если путем дифференцирования по ξ под знаком интеграла в формуле (2.11) могут быть определены все производные, фигурирующие в уравнении (2.10), то результат подстановки в левую часть этого уравнения функции $F_{\nu n}$, определенной формулой (2.11), есть интеграл Фурье от правой части уравнения (2.10). Отсюда и следует, что указанная функция $F_{\nu n}$ является решением уравнения (2.10). Вопрос о законности дифференцирования под знаком интеграла в формуле (2.11) будет решен ниже в § 3.

Замечание. Ясно, что величины

$$\zeta_{n1} = A_{n1} + iB_{n1}, \quad -\zeta_{n1}, \quad \bar{\zeta}_{n1}, \quad -\bar{\zeta}_{n1}$$
$$\zeta_{n2} = A_{n2} + iB_{n2}, \quad -\zeta_{n2}, \quad \bar{\zeta}_{n2}, \quad -\bar{\zeta}_{n2};$$

являются корнями уравнения

$$\delta_n(\zeta) = \zeta^8 + 4\zeta^6 + (6 + 4\varkappa^4 n^{-4})\zeta^4 + (n^2-1)^2 n^{-4}\zeta^2 + (n^2-1)^2 n^{-4} = 0$$

и при $n \to \infty$ стремятся к соответствующим корням уравнения $(\zeta^2+1)^4 = 0$

$$\zeta_{n1}, \ -\bar{\zeta}_{n1}, \zeta_{n2}, \ -\bar{\zeta}_{n2}, \text{ стремятся к } i$$
$$-\zeta_{n1}, \bar{\zeta}_{n1}, -\zeta_{n2}, \bar{\zeta}_{n2}, \text{ стремятся к } -i$$

Вычисляя интегралы, стоящие в формуле (2.14), при помощи вычетов, при любом ξ получаем

$$\frac{2}{\pi\lambda_{\nu n}} F_{\nu n}(\xi) = \left[\frac{1}{2\Delta_n(0)} + \sum_{0<\arg\eta<\pi} \operatorname{res}\frac{e^{i|y|}}{\eta\Delta_n(\eta)}\right] \operatorname{sgn} y \Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{2.16}$$

Исходя из формулы (2.16), можно установить следующие равенства:

$$\frac{16(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2\pi R^2\alpha}{Ehk_\nu Q_\nu} f_{\nu 0}{}^{(4)}(\xi) = \frac{8(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2\pi R^2\alpha\beta}{Ehk_\nu Q_\nu \sin\beta} f_{\nu 4}{}^{(4)}(\xi) =$$
$$= F(\xi) = [1 - \cos\varkappa y e^{-\varkappa|y|}] \operatorname{sgn} y \Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{2.17}$$

$$\frac{8n^4(n^2-1)^2\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)h\alpha n\beta}{3Ek_\nu Q_\nu^2 \sin n\beta} f_{\nu n}(\xi) = F_n(\xi) = \qquad (n>1)$$
$$= \{1 + (R_{n1}\sin nA_{n1}|y| - R_n\cos nA_{n1}y)e^{-nB_{n1}|y|} +$$
$$+ [R_{n2}\sin nA_{n2}|y| - (1-R_n)\cos nA_{n2}y]e^{-nB_{n2}|y|}\} \operatorname{sgn} y \Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{2.18}$$

Здесь

$$R_{n1} = \frac{(A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2}{2A_{n1}B_{n1}\Lambda_n}\{(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2)[(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2 -$$
$$-4A_{n1}{}^2B_{n1}{}^2 + 4A_{n2}{}^2B_{n2}{}^2] - 8A_{n1}{}^2B_{n1}{}^2(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)\}$$

$$R_{n2} = \frac{(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2)^2}{2A_{n2}B_{n2}\Lambda_n}\{(A_{n2}{}^2 - B_{n2}{}^2)[(A_{n2}{}^2 - B_{n2}{}^2 - A_{n1}{}^2 + B_{n1}{}^2)^2 -$$
$$-4A_{n2}{}^2B_{n2}{}^2 + 4A_{n1}{}^2B_{n1}{}^2] - 8A_{n2}{}^2B_{n2}{}^2(A_{n2}{}^2 - B_{n2}{}^2 - A_{n1}{}^2 + B_{n1}{}^2)\}$$

$$R_n = (A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2\Lambda_n^{-1}[(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2 - 4A_{n1}{}^2B_{n1}{}^2 +$$
$$+ 4A_{n2}{}^2B_{n2}{}^2 + 2(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2)(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)]$$

$$\Lambda_n = [(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2 + 4(A_{n1}B_{n1} -$$
$$- A_{n2}B_{n2})^2][(A_{n1}{}^2 - B_{n1}{}^2 - A_{n2}{}^2 + B_{n2}{}^2)^2 + 4(A_{n1}B_{n1} + A_{n2}B_{n2})^2]$$

Поскольку величины A_{n1}, A_{n2}, B_{n1}, B_{n2}, а вместе с ними и Λ_n не равны нулю (если бы $\Lambda_n = 0$, то $A_{n1}B_{n1} - A_{n2}B_{n2} = A_{n1}B_{n1} + A_{n2}B_{n2} = 0$

и тогда $A_{n1} = A_{n2} = B_{n1} = B_{n2} = 0$), то выражения для R_{n1}, R_{n2}, R_n имеют смысл. Для малых значений $n > 1$, при которых величина $n^6 / \varkappa^6$ пренебрежимо мала по сравнению с единицей, можно считать

$$\Delta_n(\eta) = (\eta^4 + 4n^2\eta^2 + 6n^4 + 4\varkappa^4)\left[\eta^4 + \frac{4n^2(n^2-1)^2}{6n^4+4\varkappa^4}\eta^2 + \frac{n^4(n^2-1)^2}{6n^4+4\varkappa^4}\right]$$

и получить следующие приближенные равенства:

$$nA_{n1} \approx \varkappa\left(1 - \frac{n^2}{2\varkappa^2} + \frac{n^4}{4\varkappa^4}\right), \qquad nB_{n1} \approx \varkappa\left(1 + \frac{n^2}{2\varkappa^2} + \frac{n^4}{4\varkappa^4}\right)$$

$$R_{n1} \approx \frac{3n^6(n^2-1)^2}{16\varkappa^{10}}\left(1 - \frac{57n^4}{12\varkappa^4}\right), \qquad R_n \approx -\frac{n^4(n^2-1)^2}{16\varkappa^8}\left(1 - 7\frac{n^4}{\varkappa^4}\right)$$

$$nA_{n2} \approx \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\varkappa}\left(1 - \frac{n^2-1}{2\varkappa^2} - \frac{4n^4-2n^2+1}{8\varkappa^4}\right), \qquad R_{n2} \approx -\frac{n^2-1}{\varkappa^2}$$

$$nB_{n2} \approx \frac{n\sqrt{n^2-1}}{2\varkappa}\left(1 + \frac{n^2-1}{2\varkappa^2} - \frac{4n^4-2n^2+1}{8\varkappa^4}\right), \qquad 1 - R_n \approx 1$$

Чтобы определить Φ_ν, остается только путем четырехкратного интегрирования $F(\xi)$ найти $f_{\nu 0}(\xi)$ и $f_{\nu 1}(\xi)$.

Определяя последовательные первообразные от $F(\xi)$ на всей действительной оси (при этом приходится интегрировать $F(\xi)$ на каждом из участков: $(-\infty, -\alpha)$, $(-\alpha, \alpha)$, (α, ∞) в отдельности, а затем приравнивать в точках $-\alpha$, α пределы первообразных слева и справа), получаем

$$\frac{16(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2\pi R^2\alpha}{Ehk_\nu Q_\nu} f_{\nu 0}(\xi) = \frac{8(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2\pi R^2\alpha\beta}{Ehk_\nu Q_\nu \sin\beta} f_{\nu 1}(\xi) =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\varkappa^4}\left(\cos\varkappa y e^{-\varkappa|y|} - 1\right) + \frac{1}{6}y^4\right]\operatorname{sgn} y\,\Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{2.19}$$

Разумеется, к правой части формулы (2.19) можно прибавить произвольный полином $P(\xi)$ третьей степени.

Итак, мы определили Φ_ν и тем самым получили частное решение u, v, w, N_1, N_2 системы уравнений (1.3) при элементарной нагрузке [см. формулы (2.1)]. Соответствующие этому частному решению силовые факторы T_1, T_2, S_1, S_2, H_1, H_2, G_1, G_2 определяются по найденным перемещениям из формул (1.2) и последнего равенства (1.1).

Входящие в формулы (2.1) операторы $D_{\nu\mu}$, если не пренебрегать никакими величинами, имеют вид:

$$D_{11} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{3(1-\sigma)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + (7-3\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$+ 4\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + (1-\sigma)\left(1+\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^6} + \left[2(2-\sigma) + \right.$$
$$\left.\left. + (1-\sigma)(2+\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\right]\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2} + (5-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} + 2\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6}\right\}$$

$$D_{12} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^6}\left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\varphi} + \sigma(3-\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi} + \right.$$
$$\left. + 2\sigma\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3} + (1+\sigma)\left(\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi} + 2\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^3} + \frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}\right)\right]$$

$$D_{13} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{3\sigma(1-\sigma)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} - \left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2} - 2\sigma\right]\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + (1+\sigma)\left[(2-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^2} + \frac{\partial^5}{\partial\xi\,\partial\varphi^4}\right]\right\}$$

$$D_{14} = \frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)\,h}{3ER}\left[\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} - \sigma\left(1+\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^6} + \left(1-\sigma-2\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} - (1+\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\left(\frac{\partial^8}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2} + \frac{\partial^8}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^4}\right)\right]$$

$$D_{15} = -\frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)\,h}{3ER}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi} + \frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3} - \sigma\left(1+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi} + \right.$$
$$\left. + (1-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3} + \frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5} + (1+\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\left(\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\,\partial\varphi} + \frac{\partial^8}{\partial\xi^5\,\partial\varphi^3}\right)\right]$$

$$D_{21} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{(1-\sigma)\left(\frac{3R^2}{h^2}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi} + 2\sigma(2-\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi} + \right.$$
$$+ (3\sigma-1)\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3} + \left(1+\sigma-\frac{1-\sigma}{3}\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi} +$$
$$\left. + \left[2(1+\sigma) - \sigma(1-\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\right]\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3} + (1+\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}\right\}$$

$$D_{22} = -\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left[6(1-\sigma^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + 3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \sigma(1-\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^6}{\partial\xi^6} + (5-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2} + 2(2-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} + (1-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6}\right]$$

$$D_{23} = \frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{\left[3(2-\sigma+\sigma^2)\frac{R^2}{h^2} + \sigma(1-\sigma)\right]\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi} + 3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} - \right.$$
$$\left. - 2(2-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\,\partial\varphi} - (4-3\sigma+\sigma^2)\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^3} - (1-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5}\right\}$$

$$D_{24} = \frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left\{2(1+\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi} + \frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3} + \left(2+\sigma+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi} + \right.$$
$$\left. + (3+\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3} + \frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5} - \frac{h^2}{3R^2}\left[2\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\,\partial\varphi} + (3-\sigma)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\,\partial\varphi^3} + (1-\sigma)\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^5}\right]\right\}$$

$$D_{25} = -\frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left\{2(1-\sigma^2)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + (3+\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$+ \frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + \left(2+\sigma+\sigma^2\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2} + (3+\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4} +$$
$$\left. + \frac{\partial^6}{\partial\varphi^6} + \frac{h^2}{3R^2}\left[2\frac{\partial^8}{\partial\xi^8} + (3-\sigma)\frac{\partial^8}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2} + (1+\sigma)\frac{\partial^8}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^4}\right]\right\}$$

$$D_{31} = \frac{(1-\sigma^2)^2}{3E^2}\left\{3\sigma(1-\sigma)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} - \left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2} - 1 - \sigma\right]\frac{\partial^3}{\partial\xi\,\partial\varphi^2} + \right.$$
$$\left. + \left[2 - \frac{\sigma(1-\sigma)}{3}\frac{h^2}{R^2}\right]\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^2} + 2\frac{\partial^5}{\partial\xi\,\partial\varphi^4}\right\}$$

$$D_{32} = \frac{(1-\sigma^2)^2}{3E^2}\left\{-3(1-\sigma)(2+\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi} - 3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} + \right.$$
$$\left. + (3-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\,\partial\varphi} + 2(2-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^3} + (1-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5}\right\}$$

$$D_{33}=\frac{(1-\sigma^2)^2}{3E^2}\left\{3(1-\sigma)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+\left[6(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}+4-3\sigma+\sigma^2\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2}+\right.$$
$$\left.+(1-\sigma)\left(\frac{3R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right\}$$

$$D_{34}=\frac{2(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left\{(2+\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^2}+\frac{\partial^5}{\partial\xi\,\partial\varphi^4}+\left(1+\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^7}{\partial\xi^7}+\right.$$
$$\left.+\left[3+(4-\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\right]\frac{\partial^7}{\partial\xi^5\,\partial\varphi^2}+\left[3+(1-\sigma)\frac{h^2}{3R^2}\right]\frac{\partial^7}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^4}+\frac{\partial^7}{\partial\xi\,\partial\varphi^6}\right\}$$

$$D_{35}=-\frac{2(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left[(1-\sigma)(2+\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\,\partial\varphi}+3\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^3}+\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5}+\right.$$
$$\left.+\left(1+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^7}{\partial\xi^6\,\partial\varphi}+\left(3+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^7}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^3}+3\frac{\partial^7}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^5}+\frac{\partial^7}{\partial\varphi^7}\right]$$

$$D_{41}=-\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{(1-\sigma)\left(3\frac{R^2}{h^2}-1\right)\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\varphi}-\sigma\left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}-\right.\right.$$
$$\left.-1-\sigma\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi}+(1-\sigma)\left(3\frac{R^2}{h^2}-2\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3}+$$
$$\left.+\left(1+\sigma-\frac{1-\sigma}{3}\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi}+2\sigma\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3}+(1-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}\right\}$$

$$D_{42}=-\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{6(1-\sigma^2)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\right.$$
$$+(1-\sigma)\left[3(2+\sigma)\frac{R^2}{h^2}-\sigma\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2}+$$
$$\left.+3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}+2\left(\frac{\partial^6}{\partial\xi^6}+\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2}\right)\right\}$$

$$D_{43}=\frac{(1-\sigma^2)^2}{6E^2}\left\{(1-\sigma)\left[3(2+\sigma)\frac{R^2}{h^2}+\sigma\right]\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\varphi}+\right.$$
$$+3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}+\left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}-1-\sigma\right]\frac{\partial^5}{\partial\xi^4\,\partial\varphi}+$$
$$\left.+6(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^5}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^3}+3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}\frac{\partial^5}{\partial\varphi^5}\right\}$$

$$D_{44}=\frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left[2(1+\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi}+\frac{\partial^4}{\partial\xi\,\partial\varphi^3}+\right.$$
$$+\left(2+\sigma+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi}+(5+2\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3}+2\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}+$$
$$\left.+\left(1+\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\,\partial\varphi}+\left(3+\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\,\partial\varphi^3}+3\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^5}+\frac{\partial^8}{\partial\xi\,\partial\varphi^7}\right]$$

$$D_{45}=\frac{(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\left[(1-\sigma^2)\left(3\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+(1-\sigma)\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2}+\right.$$
$$+3\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2}+(2-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4}+\left(1+\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^8}+$$
$$\left.+\left(3+\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2}+3\frac{\partial^8}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^4}+\frac{\partial^8}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^6}\right]$$

$$D_{51}=\frac{(1-\sigma^2)^2}{3E^2}\left\{3\sigma(1-\sigma)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}-\left[3(1-\sigma)\frac{R^2}{h^2}-1-\sigma\right]\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2}+\right.$$
$$\left.+\left[2-\frac{\sigma(1-\sigma)}{3}\frac{h^2}{R^2}\right]\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2}+2\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4}\right\}$$

$$D_{52}=\frac{(1-\sigma^2)^2}{3E^2}\Big[-3(1-\sigma)(2+\sigma)\,\frac{R^2}{h^2}\,\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\,\partial\varphi}-3(1-\sigma)\,\frac{R^2}{h^2}\,\frac{\partial^4}{\partial\varsigma\,\partial\varphi^3}+$$
$$+(3-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi}+2(2-\sigma)\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3}+(1-\sigma)\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}\Big]$$

$$D_{53}=\left(\frac{1-\sigma^2}{Eh}R\right)^2\Big\{(1-\sigma)\left(1+\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{\partial^5}{\partial\xi^5}+\Big[2(1-\sigma)+$$
$$+(4-3\sigma+\sigma^2)\,\frac{h^2}{3R^2}\Big]\frac{\partial^5}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^2}+(1-\sigma)\left(1+\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^5}{\partial\xi\,\partial\varphi^4}\Big\}$$

$$D_{54}=-\frac{2(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\Big[3(1-\sigma^2)\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right)\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+4\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}+$$
$$+\left(5-\sigma-\sigma^2+\sigma^2\,\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^6}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^2}+7\,\frac{\partial^6}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^4}+2\,\frac{\partial^6}{\partial\varphi^6}+$$
$$+\left(1+\sigma\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^6\,\partial\varphi^2}+\left(3+\sigma\,\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^4\,\partial\varphi^4}+3\,\frac{\partial^8}{\partial\xi^2\,\partial\varphi^6}+\frac{\partial^9}{\partial\varphi^8}\Big]$$

$$D_{55}=-\frac{2(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}{3ER}\Big[(1-\sigma)(2+\sigma)\,\frac{\partial^6}{\partial\xi^5\,\partial\varphi}+3\,\frac{\partial^6}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^3}+\frac{\partial^6}{\partial\xi\,\partial\varphi^5}+$$
$$+\left(1+\sigma\,\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^7\,\partial\varphi}+\left(3+\sigma\,\frac{h^2}{3R^2}\right)\frac{\partial^8}{\partial\xi^5\,\partial\varphi^3}+3\,\frac{\partial^8}{\partial\xi^3\,\partial\varphi^5}+\frac{\partial^8}{\partial\xi\,\partial\varphi^7}\Big]$$

О поведении рядов, изображающих перемещения и внутренние силовые факторы при нашем решении, можно будет судить по результатам § 3.

Для полного решения вопроса о действии на цилиндрическую оболочку элементарной нагрузки нужно присоединить к полученному частному решению исходных уравнений такое решение однородной задачи[1], которое позволило бы удовлетворить заданным граничным условиям. Указанное решение однородной задачи можно получить по крайней мере для замкнутой цилиндрической оболочки (при естественном ограничении, что те перемещения и силовые факторы, которые заданы на контурах граничных поперечных сечений, могут быть представлены тригонометрическими рядами), положив

$$u=\frac{A}{\sigma}\xi+(-1)^{\nu+1}D_{\nu1}\,\Phi,\qquad v=(-1)^{\nu+2}D_{\nu2}\,\Phi,\qquad w=A+(-1)^{\nu+3}D_{\nu3}\,\Phi$$
$$N_1=(-1)^{\nu+4}D_{\nu4}\,\Phi,\qquad N_2=(-1)^{\nu+5}D_{\nu5}\,\Phi \tag{2.20}$$

где

$$\Phi=\Phi(\xi,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\xi)\cos n\varphi$$

есть решение уравнения $D\Phi=0$, A — произвольная постоянная[2], ν — какое-нибудь из чисел 1, ..., 5, и определив затем T_1, T_2, ..., G_2 из формул (1.2) и последнего равенства (1.1). Таким образом, вопрос сведется к решению уравнения (2.8) без правой части с заменой $f_{\nu n}$ на f_n. Решение этого уравнения не представляет труда, и можно убедиться, что функции f_n будут содержать столько произвольных постоянных, сколько нужно для удовлетворения граничных условий. Мы не будем

---

[1] Под решением однородной задачи мы понимаем величины u, v, w, N_1, N_2, удовлетворяющие системе (1.3) без правых частей, и соответствующие им величины T_1, T_2, ..., G_2.

[2] Нетрудно убедиться, что если бы мы не включили в формулы для u и w соответственно члены $A\xi/\sigma$ и A, то имели бы решения системы (1.3) без правых частей, среди которых отсутствовало бы решение $u=A\xi/\sigma+B$, $v=0$, $w=A$, $N_1=N_2=0$, соответствующее простому растяжению (константа B может быть отброшена, так как она определяет перемещение оболочки как твердого тела).

более подробно останавливаться на решении однородной задачи и на удовлетворении граничных условий для замкнутой цилиндрической оболочки, поскольку в этом отношении имеются известные результаты. Заметим только, что для достаточно длинной оболочки, нагруженной в средней части элементарной нагрузкой, при удовлетворении граничных условий можно без существенной погрешности внести значительное упрощение, используя вместо граничных значений полученного нами частного решения граничные значения его незатухающей части, которая определяется первыми двумя членами разложения (2.7) с отброшенными в них затухающими величинами.

В силу линейности уравнений (1.3) можно при помощи полученного частного решения при элементарной нагрузке получить путем суперпозиции решение уравнений (1.3) для системы элементарных нагрузок, совершив предварительно переход к общему началу координат ξ, φ. Другими словами, для системы из конечного числа элементарных нагрузок можно получить частное решение уравнений (1.3), определив его при помощи формул (2.1), где каждая из функций Φ_ν есть сумма всех таких функций, соответствующих элементарным нагрузкам рассматриваемой системы, причем у этих функций произведена замена переменных, обусловливаемая переходом к общему началу координат.

В частности, таким путем можно получить решение системы уравнений (1.3) для пары элементарных нагрузок, действующих по равным и диаметрально противоположным элементам s и s', выбрав в качестве общего начала координат центр одного из этих элементов. Если эти нагрузки — взаимоуравновешивающиеся и у каждой из них $Q_1 = Q_2 = Q_4 = 0$, то для такой пары элементарных нагрузок, очевидно,

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0, \qquad \Phi_\nu = 2\sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu\, 2n}(\xi)\cos 2n\varphi \qquad (\nu = 3,5) \tag{2.21}$$

где $f_{\nu\, 2n}(\xi)$ — те же самые функции, которые фигурировали в решении для одной элементарной нагрузки.

Поскольку B_{n1}, $B_{n2} > 0$, то из формул (2.17) и (2.18) легко видеть, что четвертые и более высокие производные от $f_{\nu n}(\xi)$ $(n=0,1)$ и функции $f_{\nu n}(\xi)$ $(n>1)$ и их производные затухают с ростом ξ.

Заметим далее, что производные по ξ, входящие в операторы $D_{\nu\mu}$ $(\nu=3,\,5;\ \mu=2,\,3,\,4,\,5)$ и D_{51},— не ниже четвертого порядка, а единственная производная по ξ, входящая в оператор D_{31},— третьего порядка (см. стр. 539). Принимая теперь во внимание равенства (1.2), (2.1) и (2.21), заключаем, что все внутренние силовые факторы при нашем частном решении уравнений (1.3) для вышеуказанной пары элементарных нагрузок затухают по мере удаления от элементов s, s'. Следовательно, *при помощи только одного полученного выше частного решения при элементарной нагрузке могут быть определены деформация и напряженное состояние бесконечно длинной цилиндрической оболочки, когда на нее действует вышеуказанная пара элементарных нагрузок или система таких пар.*

В заключение настоящего параграфа сделаем некоторые замечания, касающиеся исходных уравнений.

Прежде всего укажем, что если бы мы отбросили малые члены в коэффициентах операторов L_{12} и L_{22} (см. стр. 533), то в уравнении (2.8) коэффициент предпоследнего члена был бы равен $-4n^2[(n^2-1)^2 - {}^1/_4(1-\sigma)]$ и, следовательно, при $n=1$ не обращался бы в нуль вместе с последним членом указанного уравнения. Таким образом, отбрасывание малых членов в коэффициентах операторов L_{12} и L_{22} не только не проходит практически бесследно, а несколько усложняет решение и прибегать к нему до определения функций $f_{\nu n}(\xi)$ не следует. К этому побуждает еще то обстоятельство, что возможность удовлетворить такой и только такой полной системе граничных условий, которая удовлетворяет условиям статики, существенно связана с исчезновением в левой части уравнения (2.8) двух последних членов при $n=1$, т. е. связана с наличием четырех нулевых корней у соответствующего характеристического уравнения. Действительно, если на краях $\xi = l^*$ и $\xi = l^{**}$ цилиндрической оболочки действуют соответственно силовые факторы

$$\begin{aligned} T_1{}^* &= t_1{}^* \cos\varphi, & T_1{}^{**} &= t_1{}^{**}\cos\varphi \\ S_1{}^* &= s_1{}^* \sin\varphi, & S_1{}^{**} &= s_1{}^{**}\sin\varphi \\ N_1{}^* &= n_1{}^* \cos\varphi, & N_1{}^{**} &= n_1{}^{**}\cos\varphi \\ G_1{}^* &= g_1{}^* \cos\varphi, & G_1{}^{**} &= g_1{}^{**}\cos\varphi \\ H_1{}^* &= h_1{}^* \sin\varphi, & H_1{}^{**} &= h_1{}^{**}\sin\varphi \end{aligned}$$

и поверхностная нагрузка отсутствует, то условия равновесия оболочки в целом имеют вид:

$$s_1{}^* + n_1{}^* = s_1{}^{**} + n_1{}^{**}$$

$$t_1{}^* - \frac{g_1{}^*}{R} + (s_1{}^* + n_1{}^*)\, l^* = t_1{}^{**} - \frac{g_1{}^{**}}{R} + (s_1{}^{**} + n_1{}^{**})\, l^{**}$$

Ясно, что этим условиям при произвольной длине оболочки не удовлетворяет система внутренних силовых факторов

$$T_1 = t_1(\xi)\cos\varphi, \qquad S_1 = s_1(\xi)\sin\varphi, \qquad N_1 = n_1(\xi)\cos\varphi$$
$$G_1 = g_1(\xi)\cos\varphi, \qquad H_1 = h_1(\xi)\sin\varphi$$

для которых нарушается хотя бы одно из тождеств:

$$s_1 + n_1 \equiv C_1 = \text{const}, \qquad t_1 - \frac{g_1}{R} + (s_1 + n_1)\,\xi \equiv C_2 = \text{const}$$

Заметим, кроме того, что только получая величины s_1, n_1, t_1, g_1, для которых указанные тождества справедливы при произвольных C_1 и C_2, можно удовлетворить любым граничным условиям, удовлетворяющим условиям статики. Но при отбрасывании малых членов в коэффициентах операторов L_{12} и L_{22} функция $f_1(\xi)$ (см. стр. 541) определяется как общее решение уравнения

$$f_1{}^{(8)} - 4 f_1{}^{(6)} + 4\varkappa^4 f_1{}^{(4)} + (1-\sigma) f_1{}^{(2)} = 0$$

которому соответствует характеристическое уравнение, имеющее только два нулевых корня, и, следовательно, в этом случае алгебраическая часть функции $f_1(\xi)$ есть линейная функция. Далее нетрудно убедиться, что в выражения для t_1 и g_1 (как при сохранении, так и при отбрасывании малых членов в коэффициентах операторов L_{12} и L_{22}) ни f_1, ни f_1' не входят, а входят только производные выше первой. Поэтому, отправляясь от приведенного уравнения для f_1, приходим к выражению $t_1 - g_1/R$, такого же вида, как и f_1 без алгебраической части, так что, очевидно, ни при каких фиксированных значениях произвольных постоянных, входящих в f_1, вышеуказанные тождества не могут иметь место, если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$. Это и означает, что либо на границе оболочки действуют силовые факторы, не удовлетворяющие условиям статики, т. е. оболочка в целом оказывается неуравновешенной, либо нельзя удовлетворить произвольным граничным условиям, удовлетворяющим условиям статики.

Отмеченное обстоятельство будет также иметь место, если исходить из уравнения для потенциальной функции, данного в[4] [стр. 263, уравнение (13.2)], так как и в этом случае f_1 определяется из уравнения, которому соответствует характеристическое уравнение, имеющее только два нулевых корня, а выражение $t_1 - g_1/R$ опять-таки содержит только производные от f_1 выше первой. Наличие только двух нулевых корней у упомянутого характеристического уравнения вытекает из того, что в[4] (стр. 256) при переходе от формул (11.4) к формулам (12.6) пренебрегают некоторыми членами и в результате получаются такие выражения для S_1 и S_2, при которых не удовлетворяется шестое уравнение равновесия.

Далее заметим, что если бы мы приняли, как это часто делается, $S_1 = -S_2$ и игнорировали шестое уравнение равновесия, то в левой части уравнения (2.8) предпоследний член также был бы иной; но он был бы равен

$$-4n^2(n^2-1)\left[n^2-{}^1/_4(3+\sigma)\right]$$

так что попрежнему обращался бы в нуль при $n=1$ и никаких изменений в ходе изложенного решения при этом варианте не произошло бы. То же самое будет иметь место, если исходить из варианта В. В. Новожилова [3].

Коснемся, наконец, уравнений, используемых в [2]. Они получаются в результате неосторожного отбрасывания малых величин при переходе от напряжений к усилиям¹ и приводят к следующему уравнению для потенциальной функции Ф:

$$\left(\triangle^4 + 4\varkappa^4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}\right)\Phi = q \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

где q — величина, пропорциональная нагрузке, которую будем считать элементарной и состоящей только из нормальной к поверхности оболочки силы, распределенной по элементу s.

Если исходить из указанного уравнения для Ф и решать его так, как решалось уравнение (2.2), то уравнение (2.8) заменится следующим:

$$f_n^{(8)} - 4nf_n^{(6)} + (6n^4+4\varkappa^4)f_n^{(4)} - 4n^6 f_n^{(2)} + n^8 f_n = q_n$$

а функции

$$F_0(\xi) = f_0^{(4)}(\xi), \qquad F_n(\xi) = f_n(\xi) \qquad (n \geqslant 1)$$

будут определяться формулой (2.11), где

$$\Delta_n(\eta) = \begin{cases} \eta^4 + 4\varkappa^4, & \text{если } n=0 \\ (\eta^2+n^2)^4 + 4\varkappa^4\eta^4, & \text{если } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Теперь уравнение $\Delta_n(\eta)=0$ будет иметь при $n \geqslant 1$ корни такого же вида, какой оно имело раньше при $n>1$, а при $n=0$ корни останутся теми же самыми. Следовательно, и рассматриваемые теперь функции $f_0^{(4)}(\xi)$, $f_n(\xi)$ $(n \geqslant 1)$ будут иметь соответственно такой же вид, какой имели ранее рассмотренные функции $f_{\nu 0}^{(4)}(\xi)$ и $f_{\nu n}(\xi)$ $(n>1)$ так что все они и, в частности, $f_1(\xi)$ будут затухать с ростом ξ. Но тогда внутренние усилия также будут затухать с ростом ξ, так как они выражаются через Ф при помощи таких операторов (см.[2], стр. 198), что незатухающие функции f_0, f_0', f_0'', f_0''' не войдут в выражения для усилий. Но такое решение не обеспечивает равновесия оболочки, так как можно взять два столь далеких поперечных сечения оболочки (расположенные по разные стороны элемента s), что действующие в этих сечениях усилия, поскольку они как угодно малы, не уравновешивают рассматриваемой элементарной нагрузки.

Таким образом, уравнения, используемые в [2], могут привести к недоразумению и, вообще говоря, вовсе не безразлично, исходить ли из них или же из уравнений, положенных в основу данной работы.

---

¹ Благодаря связанному с этим переходом интегрированию отбрасывание малых величин может иметь существенное значение. В частности, это приводит к исчезновению члена с N_2 во втором уравнении равновесия.

§ 3. Обоснование полученного решения. В предыдущем параграфе искались функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$, удовлетворяющие уравнению (2.2), где оператор D задан равенстом (2.3). Находя функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ в виде

$$\Phi_\nu(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi$$

мы получили для величин

$$f_{\nu 0}^{(4)} = F_{\nu 0}, \qquad f_{\nu 1}^{(4)} = F_{\nu 1}, \qquad f_{\nu n}(\xi) = F_{\nu n}(\xi) \quad (n > 1)$$

формулу (2.11). В этой формуле, если говорить о точном решении уравнения (2.2), следует считать

$$\Delta_n(\eta) = \begin{cases} \eta^4 + 4\varkappa^4, & \text{если } n = 0 \\ \eta^4 + 4\eta^2 + 4\varkappa^4 - 1 + \sigma^2, & \text{если } n = 1 \\ \eta^8 + 4n^2\eta^6 + [6n^4 - (7 - \sigma^2)\, n^2 + 4\varkappa^4]\, \eta^4 + 4n^2(n^2-1)^2\, \eta^2 + n^4(n^2-1)^2, & \text{если } n > 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

хотя практически равенства (2.12) и (3.1) можно не различать.

Чтобы полученное решение было строгим, нужно установить законность некоторых связанных с этим решением операций [1] и показать в конечном счете, что функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2) всюду за исключением лишь границы элемента s, где нагрузка терпит разрыв.

Все результаты настоящего параграфа, касающиеся дифференцирования под знаком интеграла в формуле (2.11) и почленного дифференцирования ряда (2.7), выводятся с равным успехом как для точного значения $\Delta_n(\eta)$, определяемого равенством (3.1), так и для приближенного, определяемого равенством (2.12). При выводе указанных результатов можно иметь в виду любое из равенств (2.12), (3.1). Когда же (в конце этого параграфа) придется устанавливать, что полученные функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ являются решениями уравнения (2.2) всюду за исключением границы элемента s, мы будем иметь в виду точное решение.

Докажем сперва, что путем последовательного дифференцирования по ξ под знаком интеграла в формуле (2.11) могут быть определены производные $F_{\nu 0}^{(k)}$, $F_{\nu 1}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$, $F_{\nu n}^{(k)}$ $(n > 1,\ k = 1, 2, \ldots, 7)$ в каждой точке ξ и производные $F_{\nu 0}^{(4)}$, $F_{\nu 1}^{(4)}$, $F_{\nu n}^{(8)}$ $(n > 1)$ в каждой точке ξ за исключением точек $\xi = \pm\alpha$. Чтобы это доказать, достаточно убедиться в законности вычисления вышеуказанных производных дифференцированием по ξ под знаком интеграла в (2.13), т. е. установить равенство [2]

$$\frac{d^k F_{\nu n}}{d\xi^k} = \lambda_{\nu n} \int_0^{\infty} \frac{\eta^{k-1} \sin \alpha\eta \cos(\xi\eta + {}^1/_2\, k\pi)}{\Delta_n(\eta)}\, d\eta \tag{3.2}$$

при произвольном ξ, когда $n = 0, 1$, $k < 4$ или $n > 1$, $k < 8$, и при любом $\xi \neq \pm\alpha$, когда $n = 0, 1$, $k = 4$ или $n > 1$, $k = 8$.

---

[1] См. сноски на стр. 535, 536.

[2] Поскольку k-кратное дифференцирование по ξ под знаком интеграла в формуле (2.11) приводит, как нетрудно видеть, к тому же результату, что и k-кратное дифференцирование по ξ под знаком интеграла в формуле (2.13).

Обозначим интеграл, стоящий в формуле (2.13), через J, а интеграл, стоящий в формуле (3.2) и получающийся из J путем k-кратного дифференцирования по ξ под знаком интеграла, через J_k.

Подинтегральные функции в интегралах J и J_k непрерывны как функции двух переменных ξ и η. Интеграл J имеет смысл при любом ξ. Так как $|\Delta_n(\eta)| > \eta^4$ $(n = 0, 1)$ и $|\Delta_n(\eta)| > \eta^8$ $(n > 1)$, то ясно, что J_k сходится равномерно относительно ξ в окрестности [1] любого ξ при $k = 1, 2, 3$, если $n = 0, 1$, и при $k = 1, 2, \ldots, 7$, если $n > 1$.

Далее пусть $n = 0, 1$, $k = 4$ или $n > 1$, $k = 8$. Имеем

$$J_k = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \sin(\alpha + \xi)\,\eta\,\frac{\eta^{k-1}}{\Delta_n(\eta)}\,d\eta + \int_0^\infty \sin(\alpha - \xi)\,\eta\,\frac{\eta^{k-1}}{\Delta_n(\eta)}\,d\eta\right]$$

Так как интеграл

$$\int_0^A \sin(\alpha \pm \xi)\,\eta\,d\eta = \frac{1 - \cos(\alpha \pm \xi)\,A}{\alpha \pm \xi}$$

равномерно ограничен как функция от $A \geqslant 0$ и ξ в окрестности любого $\xi \neq \pm\alpha$, а функция $\eta^{k-1}/\Delta_n(\eta)$ $(n = 0, 1,\ k = 4$ или $n > 1,\ k = 8)$ не зависит от ξ, монотонна по η при достаточно больших η и стремится к нулю при $\eta \to \infty$, то в силу известной теоремы (см., например [5], где условие монотонности функции $g(x, y)$ по x можно ослабить, потребовав, чтобы оно выполнялось лишь, когда x достаточно велико), первый из интегралов в квадратных скобках равномерно сходится относительно ξ в окрестности любого $\xi \neq -\alpha$, а второй интеграл равномерно сходится относительно ξ в окрестности любого $\xi \neq \alpha$. Следовательно, при $n = 0,1$, $k = 4$ и при $n > 1$, $k = 8$ интеграл J_k равномерно сходится относительно ξ в окрестности любого $\xi \neq \pm\alpha$.

Из всего сказанного относительно интегралов J и J_k следует равенство (3.2), т. е. что путем дифференцирования под знаком интеграла в (2.13) или, что все равно, в (2.11) могут быть определены производные $F_{\nu 0}^{(k)}$, $F_{\nu 1}^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3)$, $F_{\nu n}^{(k)}$ $(n > 1,\ k = 1, 2, \ldots, 7)$ в каждой точке ξ и производные $F_{\nu 0}^{(4)}$, $F_{\nu 1}^{(4)}$, $F_{\nu n}^{(8)}$ $(n > 1)$ в каждой точке ξ за исключением точек $\xi = \pm\alpha$.

Выясним теперь вопрос, касающийся почленного дифференцирования ряда (2.7). Мы установим, что *равенство*

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\Phi_\nu(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right) \qquad (k, m \geqslant 0,\ k + m \leqslant 8) \tag{3.3}$$

справедливо при любых ξ *и* φ, *если* $k + m < 8$; *далее, что оно справедливо всюду за исключением вершин элемента* s, *если* $0 < k < 8$, $k + m = 8$; *затем, что оно справедливо всюду, кроме прямолинейных сторон элемента* s, *если* $k = 0$, $m = 8$; *наконец, что оно справедливо всюду за исключением*

[1] Говоря об окрестности той или иной точки, мы будем иметь в виду, когда это нужно, достаточно малую окрестность, не оговаривая этого.

линий $\xi = \pm\alpha$, *если* $k = 8$, $m = 0$. Хотя равенство (3.3) не выполняется на продолжениях криволинейных сторон элемента s, если $k = 8$, $m = 0$, тем не менее будет показано, что *производная* $\partial^8\Phi_\nu(\xi, \varphi) / \partial\xi^8$ *существует всюду за исключением границы элемента* s *и что всюду, за исключением этой границы, функция* $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ *удовлетворяет уравнению* (2.2).

Приступаем к доказательству. Положив

$$\lambda_\nu = \frac{3Ek_\nu Q_\nu}{2\pi^2(1-\sigma)(1-\sigma^2)h}$$

и замечая, что $n^2 - 1 > \frac{1}{2}n^2$ при $n > 1$, получаем из формулы (2.14)

$$|\underset{(n>1)}{f_{\nu n}}(\xi)| < \frac{|\lambda_\nu|}{2n\alpha\beta}\left(\int\limits_0^{\pi/|\alpha+\xi|}\frac{4\sin|\alpha+\xi|\eta}{\eta n^8}d\eta + \int\limits_0^{\pi/|\alpha-\xi|}\frac{4\sin|\alpha-\xi|\eta}{\eta n^8}d\eta\right) =$$

$$= \frac{4|\lambda_\nu|}{n^9\alpha\beta}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta < \frac{4\pi|\lambda_\nu|}{n^9\alpha\beta}$$

Далее из формул (2.12), (3.2) имеем

$$|\underset{(n>1)}{f_{\nu n}^{(k)}}(\xi)| < \frac{|\lambda_\nu|}{n\alpha\beta}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{k-1}}{\eta^8 + {}^1/_4\, n^8}d\eta \qquad (k = 1, 2, \ldots, 7)$$

Заменяя в этом результате η на $n\eta$ и объединяя его с предыдущим, получаем

$$|\underset{(n>1)}{f_{\nu n}^{(k)}}(\xi)| < c_{\nu k}\, n^{k-9} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 7)$$

где константы

$$c_{\nu 0} = \frac{4\pi|\lambda_\nu|}{\alpha\beta}, \qquad c_{\nu k} = \frac{|\lambda_\nu|}{\alpha\beta}\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{k-1}}{\eta^8 + {}^1/_4}d\eta \qquad (k = 1, 2, \ldots, 7)$$

не зависят от n.

Таким образом, *при* $k + m < 8$ *в правой части равенства* (3.3) *будет стоять ряд, равномерно сходящийся относительно* ξ *и* φ *в окрестности любой точки* (ξ, φ) [1], так как его члены во всяком случае будут меньше по модулю членов $n^{-2}c_{\nu k}$, образующих абсолютно сходящийся ряд. Следовательно, *при указанных значениях* k *и* m *справедливость равенства* (3.3) *доказана для любых* ξ *и* φ.

Пусть теперь $k + m = 8$. Нам придется рассмотреть два случая. Положим сперва, что $\xi \neq \pm\alpha$, $0 < k \leqslant 8$. Из формул (2.14) и (3.2) имеем

$$\underset{(n>1)}{f_{\nu n}^{(k)}}(\xi) = \frac{\lambda_\nu}{2\alpha}\frac{\sin n\beta}{n\beta}\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{\eta^{k-1}}{\Delta_n(\eta)}\sin\left(y\eta + k\frac{\pi}{2}\right)d\eta\right]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \tag{3.4}$$

[1] Здесь и ниже устанавливается равномерная сходимость ряда (3.3) при интересующих нас значениях k и m относительно совокупности величин ξ и φ в двухмерной окрестности той или иной точки (ξ, φ), хотя для доказательства равенства (3.3) в точке (ξ, φ) достаточно было бы установить равномерную сходимость ряда (3.3) раздельно относительно ξ и φ соответственно в одномерных окрестностях $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ и $(\varphi - \varepsilon, \varphi + \varepsilon)$ точки (ξ, φ).

Рассмотрим интеграл I, стоящий в формуле (3.4) в квадратных скобках. Будем обозначать через $P(\eta, p)$ полином относительно η степени p, являющийся четной функцией η, если p — четное, и нечетной функцией η, если p — нечетное.

Применяя к I формулу интегрирования по частям последовательно r раз и имея в виду, что $\Delta_n(\eta)$ — полином восьмой степени относительно η, содержащий только четные степени η, получаем

$$I = y^{-r} \int_0^\infty \frac{P(\eta, p_{kr})}{[\Delta_n(\eta)]^{2^r}} \sin\left[y\eta + \frac{\pi}{2}(k+r)\right] d\eta \tag{3.5}$$

где

$$p_{kr} = k - 9 - r + 2^{r+3}$$

Можно написать

$$\Delta_n(\eta) = \sum_{j=0}^{4} g_j(n)\, \eta^{2j} \qquad (n > 1)$$

где степень полинома $g_j(n)$ относительно n равна $8 - 2j$.

Отсюда ясно, что члены полинома $P(\eta, p_{kr})$, фигурирующего в формуле (3.5), имеют вид $g_{krj}(n)\,\eta^j$, где g_{krj} — полином относительно n степени $p_{kr} - j$. Очевидно,

$$|g_{krj}(n)| < C_{krj}\, n^{p_{kr} - j}$$

где C_{krj} — сумма модулей коэффициентов $g_{krj}(n)$ и, следовательно, есть положительная величина, не зависящая от n, а только от k, r, j.

Принимая во внимание сказанное, получаем из формулы (3.5)

$$|I| < |y|^{-r} \int_0^\infty [\Delta_n(\eta)]^{-2^r} \sum_{j \leqslant p_{kr}} |g_{krj}(n)|\, \eta^j\, d\eta <$$

$$< |y|^{-r} \sum_{j \leqslant p_{kr}} C_{krj}\, n^{k-9-r+2^{r+3}-j} \int_0^\infty \left(\eta^8 + \tfrac{1}{4} n^8\right)^{-2^r} \eta^j d\eta$$

Заменяя в последнем интеграле η на $n\eta$, приходим к следующей оценке:

$$|I| < n^{k-8-r}\, C\, |y|^{-r}$$

где постоянная

$$C = \sum_{j \leqslant p_{kr}} C_{krj} \int_0^\infty \frac{\eta^j}{(\eta^8 + {}^1/_4)^{2^r}}\, d\eta$$

(она, очевидно, имеет смысл) зависит только от k и r.

Возвращаясь теперь к равенству (3.4), получаем

$$\left| f_{\nu n}^{(k)}(\xi) \right| < \frac{|\lambda_\nu|\, C}{2 n^{8+r-k} \alpha} \left(|\xi + \alpha|^{-r} + |\xi - \alpha|^{-r} \right) \qquad (k > 0,\ n > 1) \tag{3.6}$$

Таким образом, при $k > 0$, $k + m = 8$ в правой части равенства (3.3) стоит функциональный ряд, члены которого в окрестности любой точки

(ξ, φ) $(\xi \neq \pm\alpha)$ мажорируются по модулю величинами, равными $O(n^{-\lambda})$, где $\lambda = 8 + r - k$ — как угодно большое натуральное число (в силу произвольности r). Следовательно, *указанный ряд равномерно сходится относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ) $(\xi \neq \pm\alpha)$ и равенство (3.3), когда $0 < k \leqslant 8$, $k + m = 8$, справедливо при любых $\xi \neq \pm\alpha$ и φ или, другими словами, всюду за исключением линий $\xi = \pm\alpha$.*

Перейдем к случаю, когда $k = 0$, $m = 8$. Напомним, что функции $f_{\nu n}(\xi)$ определены так, что соответствующие члены рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} D(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi$$

равны[1] при всех значениях $\xi \neq \pm\alpha$ и φ. Второй из этих рядов равномерно сходится[2] относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ), не лежащей на прямолинейных сторонах элемента s. Далее для найденных функций $f_{\nu n}(\xi)$ было доказано, что ряд, стоящий в правой части равенства (3.3), равномерно сходится относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ), когда $k + m < 8$, и в окрестности любой точки (ξ, φ) $(\xi \neq \pm\alpha)$, когда $k > 0$, $k + m = 8$. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{D} f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi$$

где через $\overline{D}$ обозначена правая часть равенства (2.3) без члена $\partial^8/\partial\varphi^8$, сходится равномерно относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ) $(\xi \neq \pm\alpha)$. Но тогда *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial\varphi^8}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \overline{D}(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi) - \frac{3E^2}{(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2}\sum_{n=0}^{\infty} P_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi \qquad (3.7)$$

равномерно сходится относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ) за исключением тех, которые лежат на прямолинейных сторонах

---

[1] Строго говоря, это справедливо, если иметь в виду решение, при котором $\Delta_n(\eta)$ определяется формулой (3.1). Если используется формула (2.12), то указанные ряды следует рассматривать, начиная с членов, для которых $n = 2$, и считать, что в правой части равенства (2.3) отсутствует четвертый член.

[2] Поскольку при $|\xi| > \alpha$ все члены этого ряда равны нулю, а при $|\xi| \leqslant \alpha$ он может быть представлен в виде

$$a_\nu + b_\nu\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n(\beta+\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n(\beta-\varphi)\right]$$

где, как известно, первый ряд сходится равномерно относительно φ в окрестности любой точки $\varphi \neq -\beta$ $(|\varphi| \leqslant \pi)$, а второй — в окрестности любой точки $\varphi \neq \beta$.

элемента s *и на линиях* $\xi = \pm\alpha$, а потому *равенство* (3.3) *справедливо для* $k = 0$, $m = 8$ *всюду за исключением указанных точек*. Этот результат, равно как и предыдущий, мы сейчас усилим.

Чтобы это сделать, напишем $f_{\nu n}(\xi)$ $(n > 1)$ в виде

$$f_{\nu n}(\xi) = f_{\nu n1}(\xi) + f_{\nu n2}(\xi) \quad (n > 1) \tag{3.8}$$

положив

$$f_{\nu n1}(\xi) = \lambda_\nu \frac{\sin n\beta}{n^{10}\beta} \int_0^\infty \frac{\sin n\alpha\eta \cos n\xi\eta}{n\alpha\eta} \frac{\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\, d\eta$$

$$f_{\nu n2}(\xi) = \lambda_\nu \frac{\sin n\beta}{2n^9\alpha\beta} \int_0^\infty \frac{\sin(\xi+\alpha)n\eta - \sin(\xi-\alpha)n\eta}{\eta(\eta^2+1)^4}\, d\eta$$

где

$$\Pi_n(\eta) = 2 - n^{-2} + 4(2 - n^{-2})\eta^2 + [\theta(7 - \sigma^2) - 4\varkappa^4 n^{-2}]\eta^4$$

причем $\theta = 0$ или 1 в зависимости от того, используется ли формула (2.12) или (3.1) [1].

Очевидно, производную от $f_{\nu n1}(\xi)$ порядка k $(k = 1, \ldots, 8)$ можно получить путем k-кратного дифференцирования по ξ под знаком интеграла, так что

$$f_{\nu n1}^{(k)}(\xi) = \lambda_\nu \frac{\sin n\beta}{n^{10-k}\beta} \int_0^\infty \frac{\eta^k \sin n\alpha\eta \cos(n\xi\eta + {}^1/_2 k\pi)}{n\alpha\eta\, \delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4} \Pi_n(\eta)\, d\eta \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$|f_{\nu n1}^{(k)}(\xi)| < n^{k-10}\beta^{-1} C_{\nu k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 8)$$

где константа

$$C_{\nu k} = \beta C_{\nu k}' = |\lambda_\nu| \int_0^\infty \frac{2 + 8\eta^2 + (4\varkappa^4 + 7)\eta^4}{(\eta^8 + {}^1/_2)(\eta^2+1)^4} \eta^k\, d\eta$$

Отсюда получим равенство

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} \sum_{n=2}^\infty f_{\nu n1}(\xi)\cos n\varphi = \sum_{n=2}^\infty \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} f_{\nu n1}(\xi)\cos n\varphi \qquad (k + m \leqslant 8) \tag{3.10}$$

так как стоящий в его правой части *ряд всюду равномерно сходится относительно* ξ *и* φ (члены этого ряда меньше по модулю членов $n^{-2} C_{\nu k}'$, образующих абсолютно сходящийся ряд).

Обратимся теперь к функциям $f_{\nu n2}(\xi)$. Покажем, что *при* $0 \leqslant k < 8$, $k + m = 8$ *в окрестности любой точки* (ξ, φ) $(\varphi \neq \pm\beta)$ *ряд*

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} f_{\nu n2}(\xi)\cos n\varphi \tag{3.11}$$

равномерно сходится относительно ξ *и* φ.

---

[1] Обозначение δ_n введено на стр. 537.

Имеем

$$\frac{2n^9\alpha\beta}{\lambda_\nu \sin n\beta} f_{\nu n2}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi+\alpha)\, n\eta - \sin(\xi-\alpha)\, n\eta}{\eta(\eta^2+1)^4}\, d\eta =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2} + \sum_{0<\arg\eta<\pi} \operatorname{res} \frac{e^{i|y|n\eta}}{\eta(\eta^2+1)^4}\right] \operatorname{sgn} y \Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{48} e^{-n|y|}(n^3|y^3| + 9n^2y^2 + 33n|y| + 48)\right] \operatorname{sgn} y \Big|_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \quad (3.12)$$

Отсюда

$$f_{\nu n2}^{(k)}(\xi) = \Big[\frac{\lambda_\nu \pi n^{k-9} \sin n\beta}{192\,\alpha\beta}(1 - \operatorname{sgn}|y| - \operatorname{sgn} y)^{k+1} e^{-n|y|}(n^3|y|^3 +$$

$$+ A_k' n^2 y^2 + B_k' n|y| + C_k')\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (3.13)$$

где

$$A_k' = 3(3-k), \qquad B_k' = 3[11 + k(k-7)]$$

$$C_k' = 3(16 - 11k) + k(k-1)(11-k) \qquad (3.14)$$

причем производная в равенстве (3.13) имеет смысл, непрерывна и определяется этим равенством при любом ξ, если $k \leqslant 7$ (следует иметь в виду, что $C_2' = C_4' = C_6' = 0$), а когда $k > 7$ — при любом $\xi \neq \pm\alpha$ (при $k > 7$ можно в равенстве (3.13) не писать $1 - \operatorname{sgn}|y|$). Согласно формулам (3.12) и (3.13) при $0 \leqslant k < 8$ и произвольном ξ имеем

$$\frac{\partial^8}{\partial\xi^k\,\partial\varphi^m} f_{\nu n2}(\xi)\cos n\varphi = \Big[\frac{\lambda_\nu \pi}{384\, n\alpha\beta}[(1 - \operatorname{sgn}|y| - \operatorname{sgn} y)^{k+1} e^{-n|y|}(n^3|y|^3 +$$

$$+ A_k' n^2 y^2 + B_k' n|y| + C_k') + 48\rho_k \operatorname{sgn} y]\Big[\sin\Big(n\zeta + m\frac{\pi}{2}\Big)\Big]_{\zeta=\varphi-\beta}^{\zeta=\varphi+\beta}\Big]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha}$$

где [1]

$$\rho_0 = 1, \qquad \rho_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда, принимая во внимание равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^\infty b_n(\zeta) = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n}\sin\left(n\zeta + \frac{1}{2}m\pi\right) \qquad (3.15)$$

в окрестности любого $\zeta \neq 0$, заключаем, что для доказательства равномерной сходимости ряда (3.11) относительно ξ и φ в окрестности любой

---

[1] Из этого равенство видно, что при $k > 0$ ряд (3.11) сходится равномерно относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ) $(\xi \neq \pm\alpha)$. Так как, кроме того, ряд (3.10) всюду сходится равномерно относительно ξ и φ, то отсюда можно было бы установить справедливость равенства (3.3) при $0 < k < 8$, $k + m = 8$ всюду за исключением линий $\xi = \pm\alpha$. Мы предпочли получить этот результат иным путем, используя формулы (3.4), (3.5), поскольку в дальнейшем мы вынуждены будем прибегнуть к этим формулам.

точки (ξ, φ) $(\varphi \neq \pm\beta)$, когда $0 \leqslant k < 8$, $k + m = 8$, достаточно убедиться в том, что ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n|y|} b_n(\zeta), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n|y| e^{-n|y|} b_n(\zeta)$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 y^2 e^{-n|y|} b_n(\zeta), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n^3 |y|^3 e^{-n|y|} b_n(\zeta) \tag{3.16}$$

будут равномерно сходяться относительно y и ζ в окрестности каждой точки (y, ζ) $(\zeta \neq 0)$.

Обозначим функции $e^{-n|y|}$, $n|y|e^{-n|y|}$, $n^2y^2e^{-n|y|}$, $n^3|y|^3e^{-n|y|}$ соответственно через $a_{n0}(y)$, $a_{n1}(y)$, $a_{n2}(y)$, $a_{n3}(y)$.

В этих обозначениях ряды (3.16) имеют вид:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{nj}(y)\, b_n(\zeta) \qquad (j = 0, 1, 2, 3) \tag{3.17}$$

Нетрудно установить, что для всех y ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_{nj}(y) - a_{n+1j}(y)| < M = \text{const} \qquad (j = 0, 1, 2, 3) \tag{3.18}$$

т. е. ограничен.

Далее можно доказать следующую теорему: если ряд

$$B_1(z) + B_2(z) + B_3(z) + \cdots \tag{3.19}$$

сходится равномерно относительно z в некоторой n-мерной области Z и для всех $z \in Z$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(z) - A_{k+1}(z)| < M = \text{const}, \qquad |A_1(z)| < M_1 = \text{const} \tag{3.20}$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(z)\, B_k(z) \tag{3.21}$$

равномерно сходится в области Z.

Действительно, из условий (3.20) следует

$$|A_k(z)| < M + M_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ z \in Z) \tag{3.22}$$

Положим

$$S_{nm}(z) = B_{n+1}(z) + \ldots + B_{n+m}(z)$$

Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в силу равномерной сходимости ряда (3.19) можно указать такое N, что при любых натуральных $n \geqslant N$ и m

$$|S_{nm}(z)| < \frac{\varepsilon}{2(M + M_1)} \qquad (z \in Z) \tag{3.22}$$

Из первого неравенства (3.20) и неравенств (3.22), (3.23) при помощи преобразования Абеля для всех $z \in Z$ получаем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} A_k(z) B_k(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} A_{n+k}(z) B_{n+k}(z)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m-1} [A_{n+k}(z) - A_{n+k+1}(z)] S_{nk}(z) + A_{n+m}(z) S_{nm}(z)\right| < \varepsilon$$

Отсюда и следует равномерная сходимость ряда (3.21) в области Z.

На основании этой теоремы, принимая во внимание неравенство (3.18), поведение ряда (3.15) и то, что величины $a_{nj}(y)$ не зависят от ζ и ограничены как функции y, а величины $b_n(\zeta)$ не зависят от y, заключаем, что ряды (3.17) равномерно сходятся относительно y и ζ в окрестности каждой точки (y, ζ) $(\zeta \neq 0)$. Отсюда, как было уже указано, следует *равномерная сходимость ряда* (3.11) *относительно* ξ *и* φ *в окрестности любой точки* (ξ, φ) $(\varphi \neq \pm\beta)$, *когда* $0 \leqslant k < 8$, $k+m=8$. Из последнего в свою очередь следует, что равенство

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} \sum_{n=2}^{\infty} f_{\nu n2}(\xi) \cos n\varphi = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k \partial\varphi^m} (f_{\nu n2}(\xi) \cos n\varphi) \qquad (3.24)$$

справедливо в любой точке (ξ, φ) $(\varphi \neq \pm\beta)$, когда $0 \leqslant k < 8$, $k+m=8$.

Ясно, что равенства (3.10) и (3.24) обусловливают справедливость равенства (3.3) в любой точке (ξ, φ), не лежащей на линиях $\varphi = \pm\beta$, если $0 \leqslant k < 8$, $k+m=8$. Это заключение приводит, очевидно, к следующему усилению двух ранее полученных результатов (см. курсив на стр. 549,550): *при* $0 < k < 8$, $k+m=8$ *равенство* (3.3) *справедливо всюду за исключением вершин элемента* s; *при* $k=0$, $m=8$ *оно справедливо всюду, кроме прямолинейных сторон элемента* s, *а при* $k=8$, $m=0$ — *всюду, кроме линий*[1] $\xi = \pm\alpha$.

Из установленных результатов (см. курсив на стр. 547—53) вытекает, что полученные функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2) всюду за исключением, быть может, линий $\xi = \pm\alpha$ и прямолинейных сторон элемента s.

Мы сейчас докажем, что функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2) и на тех участках линий $\xi = \pm\alpha$, которые являются продолжениями криволинейных сторон элемента s. Другими словами, будет установлено, что функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2) всюду за исключением лишь границы элемента s.

Полученные нами функции $f_{\nu n}(\xi)$ [считая, что в формуле (2.11) $\Delta_n(\eta)$ определяется равенством (3.1)] удовлетворяют уравнению (2.8) в каждой

[1] Попутно мы установили, что при $0 < k < 8$, $k+m \leqslant 8$ ряд (3.3) равномерно сходится относительно ξ и φ в окрестности любой точки (ξ, φ), кроме вершин элемента s; далее, что при $k=0$, $m=8$ ряд (3.3) равномерно сходится в окрестности любой точки, не лежащей на прямолинейных сторонах элемента s, а при $k=8$, $m=0$ — в окрестности любой точки, не лежащей на линиях $\xi = \pm\alpha$ (в этом легко убедиться, если сопоставить результаты, написанные курсивом на стр. 547, 549, 550).

точке $\xi \neq \pm\alpha$. В точках $\xi = \pm\alpha$ возможность четырехкратного и восьмикратного дифференцирования по ξ под знаком интеграла в формуле (2.11) или, что все равно, в формуле (2.13) соответственно при $n = 0,1$ и $n > 1$ не была установлена. Более того, восьмая производная от $f_{\nu n2}(\xi)$ претерпевает разрыв в точках $\xi = \pm\alpha$ (это следует из формулы (3.13), если учесть, что $C_8' \neq 0$), а так как восьмая производная от $f_{\nu n1}(\xi)$ непрерывна[1], то отсюда следует, что производная $f_{\nu n}^{(8)}(\xi)$ $(n > 1)$ имеет разрывы в точках $\xi = \pm\alpha$. Таким образом, в точках $\xi = \pm\alpha$ функции $f_{\nu n}(\xi)$ $(n > 1)$ не удовлетворяют уравнению (2.8), поскольку в этих точках восьмая производная от $f_{\nu n}(\xi)$ $(n > 1)$ не имеет смысла.

По той же причине не приходится говорить о справедливости равенства (3.3) при $\xi = \pm\alpha$, $k = 8$, $m = 0$.

Но хотя восьмикратное почленное дифференцирование по ξ ряда (2.7) при $\xi = \pm\alpha$ не имеет смысла, можно показать, что производная $\partial^8\Phi_\nu(\xi, \varphi) / \partial\xi^8$ существует и при $\xi = \pm\alpha$, если только точка $(\pm\alpha, \varphi)$ не лежит на криволинейной стороне элемента s. В самом деле, обозначим через D^* правую часть равенства (2.3) без члена $\partial^8 / \partial\xi^8$; из установленных в настоящем параграфе результатов следует, что для найденных функций $f_{\nu n}(\xi)$ во всех точках (ξ, φ), не принадлежащих линиям $\xi = \pm\alpha$ и прямолинейным сторонам элемента s, выполняется равенство

$$\frac{\partial^8}{\partial\xi^8}\Phi_\nu(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial\xi^8} f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi = -\sum_{n=0}^{\infty} D^*(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi) - \frac{3E^2 P_\nu}{(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2} \tag{3.25}$$

и что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^*(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi) \tag{3.26}$$

равномерно сходится по ξ в окрестности любой точки, не лежащей на прямолинейных сторонах элемента[2] s. Так как, кроме того, члены ряда (3.26) являются всюду непрерывными[3] функциями ξ, то сумма этого ряда является непрерывной функцией ξ всюду за исключением точек, лежащих на прямолинейных сторонах элемента s. Что касается какой либо функции P_ν, то она тождественно равна нулю при $|\varphi| > \beta$.

---

[1] Хотя бы потому, что девятая производная от $f_{\nu n1}(\xi)$ существует в любой точке ξ (она может быть, очевидно, получена путем последовательного дифференцирования под знаком интеграла в формуле для $f_{\nu n1}(\xi)$).

[2] Поскольку было показано, что ряд из равенства (3.3) при $0 \leqslant k < 8$, $k + m \leqslant 8$ равномерно сходится относительно ξ и φ в окрестности любой точки, не лежащей на прямолинейных сторонах элемента s (см. сноску на стр. 553).

[3] Это следует хотя бы из того, что функции $f_{\nu 0}(\xi)$, $f_{\nu 1}(\xi)$, $f_{\nu n}(\xi)$ $(n > 1)$ имеют всюду производные по ξ до седьмого порядка включительно [как было показано, эти производные могут быть получены путем последовательного дифференцирования по ξ под знаком интеграла в формуле (2.11)] и, следовательно, эти функции и их производные до шестого порядка включительно являются всюду непрерывными функциями.

Принимая во внимание сказанное, из равенства (3.25) при $|\varphi| > \beta$ получаем

$$\lim_{\xi \to \pm\alpha+0} \frac{\partial^8}{\partial \xi^8} \Phi_\nu(\xi, \varphi) = \lim_{\xi \to \pm\alpha-0} \frac{\partial^8}{\partial \xi^8} \Phi_\nu(\xi, \varphi) =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} [D^* (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi)]_{\xi=\pm\alpha} = -\left[D^* \sum_{n=0}^{\infty} f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi\right]_{\xi=\pm\alpha}$$

и, следовательно, восьмая производная по ξ от функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ существует на тех участках линий $\xi = \pm\alpha$, которые являются продолжениями криволинейных сторон элемента s, и на указанных участках функция $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2)

Таким образом, доказано, что функции $\Phi_\nu(\xi, \varphi)$ удовлетворяют уравнению (2.2) всюду за исключением лишь границ элемента s, где нагрузка терпит разрыв.

§ 4. О переходе к предельным случаям элементарной нагрузки. Под решением задачи о деформации и напряженном состоянии цилиндрической оболочки при сосредоточенной нагрузке или нагрузке, равномерно распределенной вдоль отрезка линии кривизны поверхности S, мы будем понимать предел решения, соответствующего элементарной нагрузке, когда каждая или одна из величин α и β стремится к нулю, а величины Q_ν остаются постоянными.

Замечание. Можно говорить о пределе частного решения исходной системы уравнений (1.2), (1.3) и последнего уравнения (1.1) и о пределе решения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, называя эти пределы частным и полным решениями задачи о деформации и напряженном состоянии цилиндрической оболочки при сосредоточенной нагрузке или при нагрузке, распределенной вдоль отрезка линии кривизны. Ясно, что в случае этих нагрузок полное решение для замкнутой цилиндрической оболочки может быть, вообще говоря, получено как сумма частного решения и решения однородной задачи при предельных значениях входящих в него и определяющихся из граничных условий констант. В случае элементарной нагрузки соответствующие граничным условиям значения произвольных постоянных, входящих в решение (2.20) однородной системы исходных уравнений, являются, очевидно, некоторыми функциями от граничных значений используемого частного решения. При обычных граничных условиях пределы указанных функций, когда каждая или одна из величин α и β стремится к нулю, являются этими же функциями от пределов граничных значений частного решения при элементарной нагрузке. Поэтому предельные значения указанных констант определяются через граничные значения частного решения при сосредоточенной или распределенной по отрезку линии кривизны нагрузках из тех же соотношений, из каких определяются при элементарной нагрузке значения произвольных постоянных решения однородной задачи через граничные значения частного решения и, следовательно, не более сложно.

Таким образом, вопрос о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной или распределенной вдоль отрезка линии кривизны нагрузках заключается в основном в определении частного решения при этих нагрузках.

Из сказанного в § 2 (см. курсив на стр. 542) ясно, что если на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку в двух диаметрально противоположных точках поверхности S действуют две взаимоуравновешивающиеся нормальные силы или два взаимоуравновешивающихся момента с векторами, направленными по касательным к направляющему кругу поверхности S, а также если такого рода нагрузки равномерно распределены вдоль двух одинаковых и диаметрально противоположных отрезков линий кривизны поверхности S или же, наконец, если на бесконечно длинную оболочку действует система каких-либо указанных парных нагрузок, то деформация и напряженное состояние оболочки могут быть полностью определены при помощи одних только частных решений, являющихся соответствующими пределами полученного в § 2 частного решения при элементарной нагрузке. Далее укажем, что для того чтобы установить в окрестностях особых точек асимптотические формулы для тех искомых величин, которые не ограничены в указанных окрестностях, а также для выяснения характера особенностей искомых величин достаточно располагать лишь частными решениями при соответствующих нагрузках.

Дадим обоснование операций, при помощи которых может быть совершен переход от элементарной нагрузки к сосредоточенной или к нагрузке, равномерно распределенной вдоль отрезка линии кривизны.

Будем говорить лишь о частном решении, которое является пределом (когда $Q_\nu = \text{const}$, а каждая или одна из величин α и β стремится к нулю) полученного в § 2 частного решения уравнений цилиндрической оболочки. При этом решении перемещения и внутренние силовые факторы (как это следует из формул (1.2), последнего уравнения (1.1), равенств (2.1) и формул для $D_{\nu\mu}$, приведенных на стр. 538—541) получаются в виде

$$\sum_{\nu=1}^{5} L_\nu^{(t)}\Phi_\nu = \sum_{\nu=1}^{5}\sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{4.1}$$

где линейные дифференциальные операторы $L_\nu^{(t)}$ (индекс t показывает, что каждому перемещению и силовому фактору соответствует свой оператор) содержат производные $\partial^{k+m}/\partial\xi^k\partial\varphi^m$, причем $k+m \leqslant 8$. Интересуясь пределами выражений (4.1), когда одна или каждая из величин α и β стремится к нулю, выясним прежде всего вопрос о возможности почленного предельного перехода в равенстве (3.3) или, иначе говоря, выясним, справедливо ли равенство

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim \frac{\partial^{k+m}}{\partial\xi^k\partial\varphi^m}\left(f_{\nu n}(\xi)\cos n\varphi\right) \tag{4.2}$$

где, как и в нижеследующих равенствах (4.21), (4.22), под знаком lim разумеется любой из пределов: либо при $\alpha\to 0$, либо при $\beta\to 0$, либо при $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$.

Исходя из формул (2.12), (2.14), (3.2) и производя очевидные изменения в способе оценок, проведенных на стр. 547, получаем

$$\left| \underset{(n>1)}{f_{\nu n}^{(k)}}(\xi) \right| < \begin{cases} c_{\nu k}'\alpha^{-1}n^{k-8} \\ c_{\nu k}''\beta^{-1}n^{k-8} \qquad (k=0,1,\ldots,6) \\ c_{\nu k}''n^{k-7} \end{cases} \tag{4.3}$$

где константы $c_{\nu k}' = \alpha\beta c_{\nu k}$, $c_{\nu k}'' = \alpha\beta c_{\nu k+1}$ ($c_{\nu k}$ — те же, что и на стр. 547) не зависят ни от n, ни от α и β. Из оценок (4.3) следует, что ряд, стоящий в равенстве (3.3), равномерно сходится относительно β (или α) при любых фиксированных ξ, φ и $\alpha \neq 0$ ($\beta \neq 0$), если $k+m=6$, а также, что указанный ряд сходится равномерно относительно и α и β при любых фиксированых ξ и φ, если $k+m<6$.

Отсюда вытекает следующий результат: *когда одна из величин* α, β *стремится к нулю, равенство* (4.2) *справедливо при любых* ξ *и* φ, *если* $k+m\leqslant 6$; *когда обе величины* α *и* β *стремится к нулю, равенство* (4.2) *справедливо при любых* ξ *и* φ, *если* $k+m<6$.

Воспользуемся теперь другого рода оценками. Пусть $0<k\leqslant 8$; тогда из равенств (3.4), (3.5) получаем

$$|f_{\nu n}^{(k)}(\xi)|_{(n>1)} \leqslant \left|\lambda_\nu \int\limits_0^\infty \frac{P(\eta, p_{kr})}{[\Delta_n(\eta)]^{2^r}} \left[\frac{\sin[y\eta + {}^1/_2\,\pi(k+r)]}{y^r}\right]_{y=\xi-\alpha}^{y=\xi+\alpha} \frac{d\eta}{2\alpha}\right| =$$

$$= \left|\lambda_\nu \int\limits_0^\infty \frac{P(\eta, p_{kr})}{[\Delta_n(\eta)]^{2^r}} \frac{\eta\cos[\zeta\eta + {}^1/_2\,\pi(k+r)] - r\zeta^{-1}\sin[\zeta\eta + {}^1/_2\,\pi(k+r)]}{\zeta^r} d\eta\right|$$

где $\xi-\alpha<\zeta<\xi+\alpha$. Отсюда легко получить [см. вывод неравенства (3.6)] следующую оценку:

$$|f_{\nu n}^{(k)}(\xi)|_{(n>1)} < \frac{|\lambda_\nu|}{\chi} n^{k-r-7} \sum_{j\leqslant p_{kr}} C_{krj} \int\limits_0^\infty \eta^j\left(\eta+\frac{r}{n\chi}\right)\left(\eta^8+\frac{1}{4}\right)^{-2^r} d\eta =$$

$$= \frac{|\lambda_\nu|}{\chi} n^{k-r-7}\left(C^{(1)} + \frac{r}{n\chi}C^{(2)}\right) \qquad (4.4)$$

где $\chi=\min(|\xi-\alpha|^r, |\xi+\alpha|^r)$, а значения констант $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ зависят только от k и r.

Таким образом, при всех значениях φ, β и всех значениях ξ, α, для которых $\min(|\xi-\alpha|, |\xi+\alpha|)>\varepsilon>0$, члены ряда в равенстве (3.3), когда $k>0$, мажорируются по модулю величинами $O(n^{-\lambda})$, где λ — как угодно большое натуральное число. Следовательно, указанный ряд сходится равномерно относительно α и β в окрестности любой точки (α, β) при всех фиксированных φ и $\xi\neq\pm\alpha$. Отсюда вытекает такой результат: *когда* $\alpha\to 0$, $\beta=\mathrm{const}$ *или* $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$, *равенство* (4.2) *справедливо при* $k+m\leqslant 8$, $k>0$, *если* $\xi\neq 0$; *когда же* $\beta\to 0$, $\alpha=\mathrm{const}$, *равенство* (4.2) *справедливо при* $k+m\leqslant 8$, $k>0$, *если* $\xi\neq\pm\alpha$.

Пусть теперь $k=0$, $m=6$. Можно написать

$$f_{\nu n}(\xi) = \frac{\lambda_\nu}{2\alpha n^8}\frac{\sin n\beta}{n\beta}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A \frac{\sin(\xi+\alpha)n\eta - \sin(\xi-\alpha)n\eta}{\eta\delta_n(\eta)} d\eta \qquad (n>1)$$

Применяя вторую теорему о среднем, получаем

$$f_{\nu n}(\xi) = \frac{\lambda_\nu}{2\alpha n^8}\frac{\sin n\beta}{n\beta}\frac{1}{\delta_n(0)}\lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{\zeta(A)} \frac{\sin(\xi+\alpha)n\eta - \sin(\xi-\alpha)n\eta}{\eta} d\eta =$$

$$= \frac{\lambda_\nu}{2\alpha n^8}\frac{\sin n\beta}{n\beta}\frac{n^4}{(n^2-1)^2}\lim_{A\to\infty}\int\limits_{\xi-\alpha}^{\xi+\alpha}\frac{\sin[\zeta(A)n\eta]}{\eta} d\eta \qquad (n>1,\ \ \zeta(A)<A)$$

Из этого равенства при $|\xi|>\alpha>0$ имеем

$$|f_{\nu n}(\xi)| < \frac{2|\lambda_\nu|}{\alpha n^8}\,\mathrm{sgn}\,\xi\ln\frac{\xi+\alpha}{\xi-\alpha} \to \frac{4}{n^8} \quad \text{при} \quad \alpha\to 0 \qquad (n>1)$$

Отсюда ясно, что при любом фиксированном $\xi \neq 0$ для всех φ, β и достаточно малых α члены ряда в равенстве (3.3), когда $k = 0$, $m = 6$, мажорируются по модулю величинами $O(n^{-2})$. Следовательно, указанный ряд при $k = 0$, $m = 6$ и любых $\xi \neq 0$ и φ сходится равномерно относительно α и β в окрестности точки $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Это дает право утверждать, что *когда* α *и* β *стремятся одновременно к нулю, то равенство* (4.2) *справедливо при* $k = 0$, $m = 6$, *каковы бы ни были* $\xi \neq 0$ *и* φ.

Далее рассмотрим случай, когда $k = 0$, $m = 8$. Обратимся к равенству (3.7). В первом из двух рядов, стоящих в правой части равенства (3.7), можно почленно переходить к пределу [1] при $\alpha \to 0$, $\beta = \mathrm{const}$ или $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, если $\xi \neq 0$, а при $\beta \to 0$, $\alpha = \mathrm{const}$, если $\xi \neq \pm\alpha$. Во втором из указанных рядов при $\alpha \to 0$, $\beta = \mathrm{const}$ или $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$ также можно совершать почленный предельный переход, если $\xi \neq 0$, поскольку для достаточно малых α согласно (2.6) будем иметь $P_{\nu n}(\xi) = 0$. Когда же $\beta \to 0$, $\alpha = \mathrm{const}$, почленный предельный переход во втором ряде из правой части равенства (3.7) законен при $|\xi| > \alpha$, и приводит, очевидно, к расходящемуся ряду, если $|\xi| \leqslant \alpha$. Принимая во внимание сказанное и замечая, что при $\varphi \neq 0$ и достаточно малых β суммма второго ряда, стоящего в правой части равенства (3.7), обращается в нуль, приходим к следующему выводу: *когда* $k = 0$, $m = 8$, *то при* $\alpha \to 0$ *и* $\beta = \mathrm{const}$ *или при* $\alpha \to 0$ *и* $\beta \to 0$ *равенство* (4.2) *справедливо, если* $\xi \neq 0$, *а при* $\beta \to 0$ *и* $\alpha = \mathrm{const}$ — *только если* $|\xi| > \alpha$. *Но при любом* $\xi \neq \pm\alpha$ *и* $\varphi \neq 0$ *имеем*

$$\lim_{\beta \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\beta \to 0} \overline{D} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) \tag{4.5}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда $k = 0$, $m = 7$. Из равенства (3.7), очевидно, следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^7}{\partial \varphi^7} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \overline{D} (f_{\nu n}(\xi) \sin n\varphi) -$$
$$- \frac{3E^2}{(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_{\nu n}(\xi) \sin n\varphi \tag{4.6}$$

где, как и в равенстве (3.7), $\xi \neq \pm\alpha$, а φ — любое. Первый ряд из правой части равенства (4.6) равномерно сходится относительно α и β в окрестности любой точки (α, β), если $\xi \neq \pm\alpha$ [это видно хотя бы из оценки (4.4)]. Второй ряд, стоящий в правой части равенства (4.6), исчезает, когда $|\xi| > \alpha$, а при $|\xi| \leqslant \alpha$ сходится равномерно относительно β в окрестности точки $\beta = 0$. В самом деле, будем считать $\varphi \neq 0$, поскольку при $\varphi = 0$

---

[1] Поскольку это справедливо в силу доказанных результатов по отношению к ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \partial \varphi^m} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi)$$

где $\partial^{k+m}/\partial \xi^k \partial \varphi^m$ — любая производная, входящая в оператор $\overline{D}$.

все члены рассматриваемого сейчас ряда равны нулю независимо от значения β. Так как $|\xi| \leqslant \alpha$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_{\nu n}(\xi) \sin n\varphi = -\frac{(1-\sigma^2) k_\nu Q_\nu}{4\pi E h \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin n\beta \sin n\varphi}{n\beta} \tag{4.7}$$

Для частных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\beta \sin n\varphi}{n\beta} \tag{4.8}$$

можно написать равенство

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\beta \sin n\varphi}{n\beta} = \frac{1}{2\beta} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos n(\varphi-\beta) - \cos n(\varphi+\beta)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left[\int_0^{\varphi+\beta} \sum_{n=1}^{N} \sin n\psi\, d\psi - \int_0^{\varphi-\beta} \sum_{n=1}^{N} \sin n\psi\, d\psi\right] = \frac{1}{2\beta} \int_{\varphi-\beta}^{\varphi+\beta} \frac{\sin {}^1/_2 (N+1)\psi \sin {}^1/_2 N\psi}{\sin {}^1/_2 \psi}\, d\psi$$

Отсюда

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\beta \sin n\varphi}{n\beta}\right| < \frac{1}{\inf|\sin {}^1/_2 \psi|}$$

$$[\min(\varphi-\beta,\ \varphi+\beta) \leqslant \psi \leqslant \max(\varphi-\beta,\ \varphi+\beta)]$$

Следовательно, при достаточно малых β

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\beta \sin n\varphi}{n\beta}\right| < \frac{2}{|\sin {}^1/_2 \varphi|}$$

т. е. при $\varphi \neq 0$ частные суммы ряда (4.8) ограничены в окрестности точки $\beta = 0$. Но тогда по признаку Дирихле ряд (4.7) равномерно сходится относительно β в окрестности точки $\beta = 0$. Из сказанного о рядах, стоящих в правой части равенства (4.6), следует, что, *когда* $k = 0$, $m = 7$ *и* $\beta \to 0$ $\alpha = \text{const}$, *равенство* (4.2) *справедливо*[1] *при любых* φ *и* $\xi \neq \pm\alpha$.

Все полученные результаты, касающиеся равенства (4.2) (см. курсив на стр. 557—559), могут быть выписаны в следующем виде:

I. *Когда* $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, *равенство* (4.2) *справедливо при* $k + m < 6$ *и любых* ξ и φ, *а также при* $6 \leqslant k + m \leqslant 8$ *и всех* φ *и* $\xi \neq 0$.

II. *Когда* $\alpha \to 0$, $\beta = \text{const}$, *равенство* (4.2) *справедливо при* $k + m \leqslant 6$ *и любых* ξ и φ, *а также при* $6 < k + m \leqslant 8$ *и всех* φ *и* $\xi \neq 0$.

III. *Когда* $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$, *равенство* (4.2) *справедливо при* $k + m \leqslant 6$ *и любых* ξ *и* φ, *а также при* $6 < k + m \leqslant 8$, $m \neq 8$ *и всех* φ *и* $\xi \neq \pm\alpha$. *В случае* $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$, $k = 0$, $m = 8$ *равенство* (4.2) *справедливо при* $|\xi| > \alpha$ *и любом* φ, *а при* $|\xi| < \alpha$ *и* $\varphi \neq 0$ *вместо него справедливо равенство* (4.5).

---

[1] Справедливость равенства (4.2) при $k + m < 8$, $\xi \neq 0$ и $\alpha \to 0$, $\beta = \text{const}$ или $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, а также при $k + m < 8$, $\xi \neq \pm\alpha$ и $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$ можно было бы также доказать, исходя из равенств (3.8), (3.9) и (3.12).

Установим теперь, что в правой части равенства (4.2) можно переменить местами знаки предела и производной. Для этого достаточно доказать равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n}(\xi)=\frac{d^k}{d\xi^k}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu n}(\xi) \quad (n=0,\,1,\,\ldots) \tag{4.9}$$

поскольку $f_{\nu 0}(\xi)$ не зависит от β, а $f_{\nu n}(\xi)$ $(n \geqslant 1)$ есть произведение величины $(\sin n\beta)/n\beta$ на величину, не зависящую от β.

Используя формулу (2.19) и вытекающую из нее формулу

$$\frac{16\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2R^2}{k_\nu Q_\nu Eh}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu 0}(\xi)=\frac{8\pi(1-\sigma)(1-\sigma^2)^2R^2\beta}{k_\nu Q_\nu Eh\sin\beta}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu 1}(\xi)=$$

$$=-\frac{1}{2\varkappa^3}(\sin\varkappa|\xi|+\cos\varkappa\xi)\,e^{-\varkappa|\xi|}+\frac{|\xi|^3}{3} \tag{4.10}$$

можно убедиться непосредственной проверкой в справедливости равенства (4.9) при всех ξ, если $k\leqslant 6$, и при любом $\xi\neq 0$, если $k>6$. Мы не будем на этом останавливаться.

Чтобы доказать равенство (4.9) при $n>1$, установим равенства

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n1}(\xi)=\frac{d^k}{d\xi^k}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu n1}(\xi) \tag{4.11}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n2}(\xi)=\frac{d^k}{d\xi^k}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu n2}(\xi) \tag{4.12}$$

из которых (4.9), очевидно, следует.

Обратимся к формуле (3.9). Так как

$$\left|\int\limits_{A>1}^{\infty}\frac{\eta^k\sin n\alpha\eta\cos(n\xi\eta+{}^1/_2k\pi)}{n\alpha\eta}\,\frac{\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta\right|<$$

$$<\int\limits_A^{\infty}\frac{2+8\eta^2+(4\varkappa^2+7)\eta^4}{\eta^{16-k}}\,d\eta<(17+4\varkappa^2)\int\limits_A^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^{12-k}}=(17+4\varkappa^2)\frac{A^{k-11}}{11-k} \tag{4.13}$$

то при всех интересующих нас $k=0,\,1,\,\ldots,\,8$ и $n=2,\,3,\,\ldots$ интеграл в формуле (3.9) равномерно сходится относительно α в окрестности любого значения α. Поэтому под знаком указанного интеграла можно переходить к пределу при $\alpha\to 0$, т. е. имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n1}(\xi)=\lambda_\nu\frac{\sin n\beta}{n^{10-k}\beta}\int\limits_0^{\infty}\eta^k\cos\left(n\xi\eta+\frac{1}{2}k\pi\right)\frac{\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta \tag{4.14}$$

Для интеграла, стоящего в правой части равенства (4.14), справедлива та же оценка (4.13), и, следовательно, этот интеграл сходится равномерно относительно ξ в окрестности любого значения ξ, когда $k=0,\,1,\,\ldots,\,8$. Принимая во внимане сказанное и то, что подинтегральная функция в формуле (4.14) непрерывна (как функция двух переменных η, ξ) при

$k=0, 1, \ldots, 8$ и всех значениях η, ξ, получаем (в силу известной теоремы о дифференцируемости под знаком интеграла)

$$\int_0^\infty \frac{n^k \eta^k \cos(n\xi\eta + {}^1/_2 k\pi)\,\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta = \frac{d^k}{d\xi^k}\int_0^\infty \frac{\cos n\xi\eta\,\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta \tag{4.15}$$

Из сравнения равенств (4.14) и (4.15) следует

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n1}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k}\lambda_\nu \frac{\sin n\beta}{n^{10}\beta}\int_0^\infty \frac{\cos n\xi\eta\,\Pi_n(\eta)}{\delta_n(\eta)(\eta^2+1)^4}\,d\eta \tag{4.16}$$

Но функция, стоящая в правой части этого равенства под знаком производной, есть [согласно (4.14), когда $k=0$] $\lim f_{\nu n1}(\xi)$ при $\alpha\to 0$, поэтому равенство (4.16) совпадает с (4.11) и тем самым последнее доказано при любом ξ и $k=0, 1, \ldots, 8$.

Равенство (4.12) мы докажем непосредственной проверкой. Переходя в формуле (3.13) к пределу при $\alpha\to 0$, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{d^k}{d\xi^k} f_{\nu n2}(\xi) = \frac{\pi\lambda_\nu n^{k-8}}{96}\frac{\sin n\beta}{\beta}(1-\operatorname{sgn}|\xi| - \tag{4.17}$$

$$-\operatorname{sgn}\xi)^k e^{-n|\xi|}[n^3|\xi|^3 + (A_k'-3)n^2\xi^2 + (B_k'-2A_k')n|\xi| + C_k' - B_k']$$

Далее имеем равенство

$$f_{\nu n2}(\xi) = \lambda_\nu \frac{\sin n\beta}{n^8\beta}\int_0^\infty \frac{\sin n\alpha\eta\cos n\xi\eta}{n\alpha\eta(\eta^2+1)^4}\,d\eta$$

Так как стоящий в этом равенстве интеграл равномерно сходится относительно η в окрестности любого η, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{n^8\beta}{\lambda_\nu\sin n\beta} f_{\nu n2}(\xi) = \int_0^\infty \frac{\cos n\xi\eta}{(\eta^2+1)^4}\,d\eta = \pi i \sum_{0<\arg\eta<\pi}\operatorname{res}\frac{e^{in|\xi|\eta}}{(\eta^2+1)^4} =$$

$$= \frac{\pi}{96}e^{-n|\xi|}(n^3|\xi|^3 + 6n^2\xi^2 + 15n|\xi| + 15) \tag{4.18}$$

Отсюда

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\lim_{\alpha\to 0} f_{\nu n2}(\xi) = \frac{\lambda_\nu \pi n^{k-7}\sin n\beta}{96n\beta}(1-\operatorname{sgn}|\xi| -$$

$$-\operatorname{sgn}\xi)^k e^{-n|\xi|}(n^3|\xi|^3 + A_k n^2\xi^2 + B_k n|\xi| + C_k) \qquad (k=0, 1, \ldots) \tag{4.19}$$

где

$$A_k = 3(2-k), \qquad B_k = 3[5(1-k)+k^2)], \qquad C_k = (k-1)[k(8-k)-15] \tag{4.20}$$

причем производная в равенстве (4.19) существует, непрерывна и определяется этим равенством в каждой точке ξ при $k\leqslant 6$, а при $k>6$ в каждой точке [1] $\xi\neq 0$.

[1] В качестве пояснения укажем, что $C_1=C_3=C_5=0$. Заметим также, что при $k>6$ в равенстве (4.19) можно вместо $(1-\operatorname{sgn}|\xi|-\operatorname{sgn}\xi)^k$ писать просто $(-\operatorname{sgn}\xi)^k$.

Из равенств (3.14) и (4.20) следует

$$A_k' - 3 = A_k, \qquad B_k' - 2A_k' = B_k, \qquad C_k' - B_k' = C_k$$

(заметим попутно, что $A_k = A_{k+1}'$, $B_k = B_{k+1}'$, $C_k = C_{k+1}'$). Поэтому, сравнивая формулы (4.17) и (4.19), устанавливаем справедливость равенства (4.12) при всех ξ, если $k \leqslant 6$, и при любом $\xi \neq 0$, если $k > 6$. Отсюда и из доказанного выше при всех ξ и $k \leqslant 8$ равенства (4.11) вытекает, что *равенство* (4.9) *справедливо при всех* ξ, *когда* $k \leqslant 6$, *и при любом* $\xi \neq 0$, *когда* $k > 6$. *Следовательно, результаты* I — III, *касающиеся равенства* (4.2), *имеют место и по отношению к равенству*

$$\lim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+m}}{\partial \xi^k \, \partial \varphi^m} \lim f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi \tag{4.21}$$

В частности, когда $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$, $k = 0$, $m = 8$, $|\xi| < \alpha$ и $\varphi \neq 0$, в правой части равенства (4.21) нужно заменить восьмую производную по φ оператором $-\overline{D}$ (см. стр. 549), чтобы равенство стало справедливым. Чтобы не оговаривать этот случай, условимся понимать под символом

$$\frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} \lim_{\beta \to 0} f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi$$

выражение

$$-\overline{D} \lim_{\beta \to 0} f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi$$

если $|\xi| < \alpha$ и $\varphi \neq 0$. Тогда при $\beta \to 0$, $\alpha = \text{const}$, $k = 0$, $m = 8$ равенство (4.21) будет справедливо всюду за исключением отрезка $|\xi| \leqslant \alpha$, $\varphi = 0$ (т. е. линии загружения) и линий $\xi = \pm \alpha$.

Ясно, что вместе с равенствами (4.21) для всех производных, входящих в операторы $L_\nu^{(t)}$, выполняется и равенство

$$\lim \sum_{\nu=1}^{5} \sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)} (f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) = \sum_{\nu=1}^{5} \sum_{n=0}^{\infty} L_\nu^{(t)} (\lim f_{\nu n}(\xi) \cos n\varphi) \tag{4.22}$$

Таким образом, переход от решения при элементарной нагрузке к решениям при сосредоточенной и при распределенной вдоль отрезка линии кривизны нагрузках может быть, вообще говоря, совершен путем замены в выражениях (4.1) функций $f_{\nu n}(\xi)$ соответствующими предельными функциями

$$f_{\nu n}^{00}(\xi) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \beta \to 0}} f_{\nu n}(\xi), \qquad f_{\nu n}^{0\beta}(\xi) = \lim_{\alpha \to 0} f_{\nu n}(\xi), \qquad f_{\nu n}^{\alpha 0}(\xi) = \lim_{\beta \to 0} f_{\nu n}(\xi)$$

Поступила 18 V 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости. 1935. Стр. 604.
2. Л у р ь е А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. 1947. Гл. 4.
3. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. 1947. [Уравнения (8.7) и (10.8).]
4. В л а с о в В. З. Общая теория оболочек. 1949. Ч. II. § 12, 13.
5. Ф и х т е н г о л ь ц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1948. Т. II. Стр. 701.