

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТОРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК

Е. Ф. Зенова, В. В. Новожилов

(Ленинград)

Изучению симметричной деформации торообразных оболочек были посвящены труды Г. Висслера^[1], К. Штанге^[2] и В. И. Феодосьева^[3]. В этих работах решение однородной задачи было дано в виде степенных рядов, которые во многих частных случаях оказываются неудобными ввиду медленной сходимости.

Излагаемый ниже метод расчета симметричной деформации торообразных оболочек в значительной мере свободен от указанного выше недостатка. В нем решение однородной задачи выражается (приближенно) через функции Ханкеля, для вычисления которых в области малых значений аргумента ($\xi < 1$) удобно пользоваться хорошо сходящимися степенными рядами, а в области больших значений аргумента ($\xi > 1$) — известными в теории бесселевых функций асимптотическими формулами.

Что касается частного решения, то оно определяется в форме тригонометрического ряда, коэффициенты которого представлены в виде бесконечных цепных дробей (сходящихся достаточно быстро).

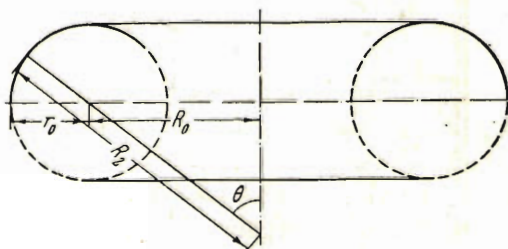
1. Дифференциальное уравнение симметричной деформации торообразной оболочки. Рассмотрим торообразную оболочку, ограниченную двумя параллельными кругами, схема которой дана на фиг. 1.

Радиусы кривизны ее средней поверхности будут равны:

$$R_1 = r_0, \quad R_2 = R_0 \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\sin \theta} \quad (1.1)$$

где

$$\alpha = \frac{r_0}{R_0}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Подставляя выражения (1.1) в основное дифференциальное уравнение теории симметричной деформации оболочек вращения^[4], представим это уравнение в следующем виде:

$$\frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{(1 + \alpha \sin \theta)^2}{\sin \theta} \frac{d\tilde{T}}{d\theta} + i2k^2 \tilde{T} = i2k^2 F(\theta) \quad (1.3)$$

Здесь

$$2k^2 = \sqrt{12(1 - \mu^2)} \frac{r_0}{R_0 \delta} \quad (1.4)$$

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2, \quad \tilde{T}_1 = T_1 - \frac{i}{c} \frac{M_2 - \mu M_1}{1 - \mu^2}, \quad \tilde{T}_2 = T_2 - \frac{i}{c} \frac{M_1 - \mu M_2}{1 - \mu^2} \quad (1.5)$$

причем \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 — так называемые комплексные усилия.

Входящая в правую часть (1.3) функция поверхностной нагрузки $F(\theta)$ равна:

$$F(\theta) = T_1^* + T_2^* \quad (1.6)$$

где T_1^* , T_2^* — значения усилий T_1 и T_2 , какие дает для симметрично нагруженного тора безмоментная теория.

В представляющем наибольший практический интерес частном случае, когда поверхностной нагрузкой на рассматриваемую оболочку является равномерное нормальное давление p :

$$T_1^* = \frac{pr_0}{2} \frac{2 + \alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\alpha A}{(1 + \alpha \sin \theta) \sin \theta}, \quad T_2^* = \frac{pr_0}{2} + \frac{A}{\sin^2 \theta} \quad (1.7)$$

В большинстве задач постоянная A статически определима. Чтобы ее найти, достаточно знать значение осевого усилия Q_z на каком-либо одном из параллельных кругов оболочки. Последнее вытекает из того, что усилие Q_z в любом сечении оболочки определяется по формуле

$$Q_z = T_1^* \sin \theta \quad (1.8)$$

В соответствии со сказанным функцию $F(\theta)$ можно считать заданной. Продифференцируем уравнение (1.3) по θ и введем новую неизвестную:

$$Z = \frac{(1 + \alpha \sin \theta)^2}{\sin \theta} \frac{d\tilde{T}}{d\theta} \quad (1.9)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (1 + \alpha \sin \theta)^2 \frac{d}{d\theta} \frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dZ}{d\theta} + i2k^2 \sin \theta Z = \\ = -i2k^2 \left[\alpha \frac{pr_0}{2} + A \frac{2 + 3\alpha \sin \theta}{\sin^3 \theta} \right] \cos \theta \end{aligned} \quad (1.10)$$

Полученное уравнение выгодно отличается от (1.3) тем, что его коэффициенты конечны во всей области изменения θ . Этого, однако, нельзя сказать о его правой части, которая, как и в уравнении (1.3), обращается в бесконечность при $\theta = 0$, $\theta = \pm \pi$.

Чтобы это устранить, введем в (1.10) подстановку:

$$Z = V - i2k^2 A \operatorname{ctg} \theta \quad (1.11)$$

Тогда для комплексной вспомогательной функции V получим уравнение

$$(1 + \alpha \sin \theta) \frac{d^2 V}{d\theta^2} - \alpha \cos \theta \frac{dV}{d\theta} + i2k^2 \sin \theta V = 2k^2 D \cos \theta \quad (1.12)$$

где постоянная D определяется формулой

$$D = -2k^2 A - i \frac{\alpha}{2} pr_0 \quad (1.13)$$

Найдя вспомогательную функцию V , можно вслед за тем выразить через нее все комплексные усилия. Так, на основании (1.9), (1.11) и уравнения (1.3) имеем

$$\tilde{T} = \frac{i}{2k^2} \frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dV}{d\theta} + \frac{pr_0}{2} \frac{3 + 2\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \quad (1.14)$$

Используя далее ряд формул теории симметричной деформации оболочек вращения (см. книгу [4], гл. IV, формулы (5.8), (8.14)), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1 &= \frac{ic}{R_1} \operatorname{ctg} \theta \frac{d\tilde{T}}{d\theta} + T_1^* = \frac{i\alpha}{2k^2} \frac{\cos \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} V + \frac{pr_0}{2} \frac{2 + \alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} - \frac{\alpha(\alpha + \sin \theta)}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} A \\ \tilde{T}_2 &= \tilde{T} - \tilde{T}_1 = \frac{i}{2k^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{V}{1 + \alpha \sin \theta} \right) + \frac{pr_0}{2} + \frac{\alpha(\alpha + \sin \theta)}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} A \\ \tilde{\vartheta} &= -\frac{1}{E\delta} \frac{R_2}{R_1} \frac{d\tilde{T}}{d\theta} = \vartheta + i \frac{2k^2}{\alpha^2} \frac{1 + \alpha \sin \theta}{\sin \theta} \frac{N_1}{E\delta} = \\ &= -\frac{1}{E\delta} \frac{1}{\alpha(1 + \alpha \sin \theta)} [V - i2k^2 A \operatorname{ctg} \theta]\end{aligned}\quad (1.15)$$

Отделяя здесь вещественные части от мнимых, найдем общие выражения для усилий T_1 , T_2 , N_1 моментов M_1 , M_2 , и угла поворота ϑ . После этого могут быть определены и перемещения:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= w \sin \theta + u \cos \theta = \frac{R_0(1 + \alpha \sin \theta)}{E\delta} (T_2 - \mu T_1) \\ \Delta_z &= w \cos \theta - u \sin \theta = -r_0 \int_0^\theta (\vartheta \cos \theta + \varepsilon_1 \sin \theta) d\theta \approx -r_0 \int_0^\theta \vartheta \cos \theta d\theta\end{aligned}\quad (1.16)$$

Формулы (1.15), (1.16) исчерпывают рассматриваемую задачу, в соответствии с чем расчет симметрично деформированной торообразной оболочки сводится к определению комплексной вспомогательной функции V , т. е. к интегрированию уравнения (1.12).

2. Решение однородной задачи. Уравнение (1.12) без его правой части может быть записано в виде

$$\frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{dV}{d\theta} \right) + i2k^2 \frac{\sin \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^3} V = 0 \quad (2.1)$$

Входящий сюда постоянный параметр $2k^2$ изменяется в практических задачах в довольно широких пределах. Он может быть и величиной порядка единицы и величиной порядка нескольких десятков.

Существующие методы решения однородной задачи для тора [1, 2, 3] основываются на использовании степенных рядов, скорость сходимости которых примерно соответствует скорости сходимости степенного ряда для функции e^{ky} (где $y = \theta$ или $\frac{1}{2}\pi - \theta$), откуда следует, что данные методы удобны лишь в тех случаях, когда параметр k достаточно мал.

Чтобы понять природу трудностей, связанных с интегрированием уравнения (2.1), напомним об известной аналогии [1] между задачами о симметричной деформации оболочек вращения и об изгибе арки на упругом основании. Особенностью торообразной оболочки является то, что у нее «упругость основания» существенным образом изменяется вдоль меридиана срединной поверхности: в окрестностях точек $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ параметр упругого основания равен k , а в окрестностях точек $\theta = 0$ и $\theta = \pm \pi$, он стремится к нулю (как $k\theta$ в первом и как $k(\pi \mp \theta)$ в двух

других случаях). Ввиду этого элементарная арка-полоска, выделенная из торообразной оболочки двумя близкими меридиональными сечениями, будет деформироваться вблизи точек $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ как арка на достаточно жестком упругом основании, а вблизи точек $\theta = 0, \theta = \pm \pi$ как обычная арка. Отсюда становится понятным, что ни решение в степенных рядах (удобное вблизи $\theta = 0, \theta = \pm \pi$ и неудобное вблизи $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$), ни решение, даваемое асимптотическим методом интегрирования (удобное, наоборот, вблизи $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ и неприемлимое в окрестностях точек $\theta = 0, \theta = \pm \pi$), не могут иметь — каждое по отдельности — успеха в рассматриваемой задаче. Излагаемый ниже метод основывается по существу на комбинировании асимптотического решения с решением в рядах, причем каждое из них используется именно в той области, где оно удобно.

Начнем с того, что определим интегралы однородного уравнения (2.1) в интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Используя в этом уравнении обозначения

$$d\chi = (1 + \alpha \sin \theta) d\theta, \quad f^2 = i 2k^2 \frac{\sin \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^3} \quad (2.2)$$

приводим его к виду

$$\frac{d^2 V}{d\chi^2} + f^2 V = 0 \quad (2.3)$$

Выполним далее преобразование Блюменталья, т. е. введем в (2.3) новую неизвестную

$$W = \sqrt{f} V \quad (2.4)$$

и новый аргумент

$$dx = f d\chi = \sqrt{2i} k \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{1 + \alpha \sin \theta}} d\theta, \quad x = \sqrt{2i} \xi \quad (2.5)$$

$$\xi = k \int_0^\theta \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{1 + \alpha \sin \theta}} d\theta \quad (2.6)$$

После этого преобразования будем иметь

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + (1 + \Delta) W = 0 \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{2f^{1/2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f^{1/2}} \frac{df}{dx} \right) = \\ &= \frac{1}{i 2k^2} \left\{ \frac{5}{16} \frac{1 + 0.6 \alpha \sin \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{1}{16 \sin \theta} - \frac{11}{16} \alpha - \frac{15}{16} \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{(1 + \alpha \sin \theta) \sin \theta} \right\} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Функция Δ в рассматриваемом интервале монотонно убывает, причем

$$\Delta \approx -\frac{5}{32k^2} \frac{i}{\theta^4} \quad \text{вблизи } \theta = 0 \quad (2.9)$$

$$\Delta = \frac{1 - 2\alpha}{8k^2} i \quad \text{в точке } \theta = \frac{1}{2}\pi \quad (2.10)$$

В большинстве практических задач $2k^2 > 5$. На этом основании можно определять Δ приближенной формулой (2.9) во всем рассматриваемом интервале $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, поскольку при малых значениях θ данная формула достаточно точна, а при значениях θ , близких к $\frac{1}{2}\pi$, где ее погрешность

велика, Δ , будучи мало (по модулю) по сравнению с единицей, не играет существенной роли в уравнении (2.7).

Попытаемся, далее, выразить Δ через x . Входящий в x интеграл [см. формулу (2.6)] может быть взят лишь путем разложения подинтегральной функции в ряд по степеням θ .

Выполняя это разложение, будем иметь

$$\xi = k \int_0^{\theta} \frac{V \sin \theta}{V 1 + \alpha \sin \theta} d\theta = \frac{2}{3} k \theta^{3/2} \left[1 - \frac{1}{28} \theta^2 + \frac{1}{5280} \theta^4 - \dots - \right. \quad (2.11)$$

$$\left. - \frac{3}{10} \alpha \theta \left(1 - \frac{5}{36} \theta^2 + \frac{11}{1170} \theta^4 - \dots \right) + \frac{9}{56} \alpha^2 \theta^2 \left(1 - \frac{35}{152} \theta^2 + \frac{91}{2700} \theta^4 - \dots \right) + \dots \right]$$

Этой формулой следует пользоваться при практическом вычислении значений ξ .

Как уже было сказано, мы заинтересованы в достаточно точном определении Δ лишь в области малых значений θ , для которых формулы (2.6), (2.11) дают

$$\xi \approx \frac{2}{3} k \theta^{3/2}, \quad x \approx \frac{2}{3} (1 + i) k \theta^{3/2} \quad (2.12)$$

Отсюда

$$\theta^3 \approx -\frac{9i}{8k^2} x^2, \quad \Delta \approx \frac{5}{36x^2} \quad (2.13)$$

Подставляя последнее выражение в (2.7), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \left(1 + \frac{5}{36x^2} \right) W = 0 \quad (2.14)$$

которое принадлежит к числу интегрирующихся в функциях Бесселя. Его общим решением будет выражение

$$W = C_1 h_{1/3}^{(1)}(x) + C_2 h_{1/3}^{(2)}(x) \quad (2.15)$$

Здесь C_1, C_2 — две комплексные произвольные постоянные:

$$h_{1/3}^{(1)}(x) = \sqrt{1/2 \pi x} H_{1/3}^{(1)}(x), \quad h_{1/3}^{(2)}(x) = \sqrt{1/2 \pi x} H_{1/3}^{(2)}(x) \quad (2.16)$$

причем $H_{1/3}^{(1)}(x), H_{1/3}^{(2)}(x)$ — функция Ханкеля первого и второго рода порядка $\frac{1}{3}$.

Функции Ханкеля (а не какие-либо другие из бесселевых функций) использованы выше не случайно. Они в данной задаче удобнее остальных, так как одна из них возрастает по экспоненциальному закону с возрастанием ξ , а другая, наоборот, убывает по такому же закону, в соответствии с чем каждый из двух интегралов решения (2.15) будет характеризовать (в основном) напряженное состояние в оболочке вблизи одного из двух ее краев. Это позволит в некоторых задачах (при достаточно малой толщине оболочки и достаточно большом угловом расстоянии между ее краями) пренебрегать взаимным влиянием граничных условий, что существенно упрощает расчет.

Возвращаясь от W к вспомогательной функции V [см. формулы (2.2), (2.4)], будем иметь

$$V = \left(\frac{\eta}{\sin \theta} \right)^{1/4} (1 + \alpha \sin \theta)^{3/4} [C_1 V_1 (\sqrt{2i} \xi) + C_2 V_2 (\sqrt{2i} \xi)] \quad (2.17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} V_1 (\sqrt{2i} \xi) &= V^{1/2} \pi (\sqrt{2i} \xi)^{1/2} H_{1/2}^{(1)} (\sqrt{2i} \xi) \\ V_2 (\sqrt{2i} \xi) &= V^{1/2} \pi (\sqrt{2i} \xi)^{1/2} H_{1/2}^{(2)} (\sqrt{2i} \xi) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\eta^{3/2} = \frac{3}{2k} \xi = \theta^{3/2} \left[1 - \frac{1}{28} \theta^2 + \dots \right] \quad (2.19)$$

Как видно из (2.14), (2.19), отношение $(\eta / \sin \theta)^{1/4}$ в интервале $-\frac{1}{2} \pi \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi$ будет весьма близко к единице, отличаясь от нее не более чем на несколько процентов.

На этом основании положим в (2.17) $(\eta / \sin \theta)^{1/4} \approx 1$, после чего получим следующее окончательное выражение:

$$V = (1 + \alpha \sin \theta)^{3/4} [C_1 V_1 (\sqrt{2i} \xi) + C_2 V_2 (\sqrt{2i} \xi)] \quad (2.20)$$

Можно указать достаточно удобные способы вычисления V_1 и V_2 (интересующие нас функции Ханкеля, повидимому, не табулированы).

При малых значениях ξ ($\xi < 1$) можно рекомендовать формулы

$$\begin{aligned} V_1 (\sqrt{2i} \xi) &= \sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 e^{1/2} \pi i \xi^{2/3} [f_1(\xi) - if_2(\xi)] - 1.079i [g_1(\xi) - ig_2(\xi)] \} \\ V_2 (\sqrt{2i} \xi) &= \sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 \xi^{2/3} [f_1(\xi) - if_2(\xi)] + 1.079i [g_1(\xi) - ig_2(\xi)] \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

в которых

$$\begin{aligned} f_1(\xi) - if_2(\xi) &= \left(\frac{1}{3} \right)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1/3)!} \left(-\frac{i\xi^2}{2} \right)^k = \\ &= 1 - \frac{i\xi^2}{1!2(1+1/3)} - \frac{\xi^4}{2!2^2(1+1/3)(2+1/3)} + \frac{i\xi^6}{3!2^3(1+1/3)(2+1/3)(3+1/3)} + \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} g_1(\xi) - ig_2(\xi) &= -\left(\frac{1}{3} \right)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k-1/3)!} \left(-\frac{i\xi^2}{2} \right)^k = \\ &= 1 - \frac{i\xi^2}{1!2(1-1/3)} - \frac{\xi^4}{2!2^2(1-1/3)(2-1/3)} + \frac{i\xi^6}{3!2^3(1-1/3)(2-1/3)(3-1/3)} \end{aligned}$$

При достаточно больших значениях ξ ($\xi > 1$) ряды (2.22) оказываются, ввиду своей медленной сходимости, неудобными. В этом последнем случае для вычисления V_1 и V_2 рационально пользоваться формулами

$$\begin{aligned} V_1 (\sqrt{2i} \xi) &= 2^{-1/2} \xi^{-1/6} e^{-\xi} \left[\cos \left(\xi - \frac{11}{24} \pi \right) + i \sin \left(\xi - \frac{11}{24} \pi \right) \right] \\ V_2 (\sqrt{2i} \xi) &= 2^{-1/2} \xi^{-1/6} e^{\xi} \left[\cos \left(\xi - \frac{3}{8} \pi \right) - i \sin \left(\xi - \frac{3}{8} \pi \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

которые получаются при удержании в известных асимптотических рядах по одному их первому члену. Следует отметить, что в рассматриваемой задаче индекс бесселевых функций получился близким к 0.5. Это обстоя-

тельство благоприятно в том отношении, что позволяет пользоваться асимптотическими формулами даже при относительно малых значениях аргумента (в частности, при $\xi = 1$), т. е. области, в которых удобно пользоваться формулами (2.21) и (2.23), подходят вплотную одна к другой.

Для решения однородной задачи в интервале $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0$ сделаем в (2.1) замену $\psi = -\theta$, $\beta = -\alpha$, $m^2 = -k^2$. Тогда мы придем к уравнению

$$\frac{1}{1 + \beta \sin \psi} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{1}{1 + \beta \sin \psi} \frac{dV}{d\psi} \right) + i2m^2 \frac{\sin \psi}{(1 + \beta \sin \psi)^3} V = 0 \quad (2.24)$$

интегралы которого надо определить в области $0 \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi$. Но это уравнение совпадает с уравнением (2.1) (с точностью до значений постоянных коэффициентов). Совпадают также и интервалы, в которых мы ищем решение этих уравнений. Отсюда ясно, что решение уравнения (2.24) может быть написано по аналогии с предыдущим, причем после возвращения к старым обозначениям θ , α и k получатся следующие формулы:

$$V = (1 + \alpha \sin \theta)^{1/2} [C_1 V_1(\sqrt{2i} \zeta) + C_2 V_2(\sqrt{2i} \zeta)] \quad (2.25)$$

$$\zeta = ik \int_0^\theta \frac{V \sin \theta}{\sqrt{1 + \alpha \sin \theta}} d\theta = \frac{2}{3} k \psi^{3/2} \left[1 - \frac{1}{28} \psi^2 + \frac{1}{5280} \psi^4 - \dots + \right. \\ \left. + \frac{3}{10} \alpha \psi \left(1 - \frac{5}{36} \psi^2 + \frac{11}{1170} \psi^4 - \dots \right) + \frac{9}{56} \alpha^2 \psi^2 \left(1 - \frac{35}{132} \psi^2 + \frac{91}{2700} \psi^4 - \dots \right) \right] \quad (2.26)$$

$$V_1(\sqrt{2i} \zeta) = \sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 e^{-1/2 \pi i} \zeta^{1/2} [f_1(\zeta) + i f_2(\zeta)] + 1.079 i [g_1(\zeta) + i g_2(\zeta)] \} \\ V_2(\sqrt{2i} \zeta) = \sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 \zeta^{1/2} [f_1(\zeta) + i f_2(\zeta)] - 1.079 i [g_1(\zeta) + i g_2(\zeta)] \} \quad (2.27)$$

Здесь $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$, $g_1(\zeta)$, $g_2(\zeta)$ вычисляются по формулам (2.22).

При $\zeta > 1$ вместо (2.27) надо пользоваться выражениями

$$V_1(\sqrt{2i} \zeta) = 2^{-1/2} \zeta^{-1/2} e^{-\zeta} \left[\cos \left(\zeta - \frac{11}{24} \pi \right) - i \sin \left(\zeta - \frac{11}{24} \pi \right) \right] \\ V_2(\sqrt{2i} \zeta) = 2^{-1/2} \zeta^{-1/2} e^{\zeta} \left[\cos \left(\zeta - \frac{3}{8} \pi \right) + i \sin \left(\zeta - \frac{3}{8} \pi \right) \right] \quad (2.28)$$

Наконец, рассмотрим случай, когда решение уравнения (2.1) требуется определить в интервале $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. В этом случае $V_1(\sqrt{2i} \zeta)$ и $V_2(\sqrt{2i} \zeta)$, как функции угла θ , не будут продолжениями интегралов $V_1(\sqrt{2i} \xi)$, $V_2(\sqrt{2i} \xi)$ в область отрицательных значений θ . Таковыми будут другие функции, являющиеся линейными комбинациями функций (2.27), а именно

$$V_1' = -\sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 e^{1/2 \pi i} \zeta^{1/2} [f_1(\zeta) + i f_2(\zeta)] + 1.079 i [g_1(\zeta) + i g_2(\zeta)] \} \\ V_2' = -\sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 \zeta^{1/2} [f_1(\zeta) + i f_2(\zeta)] - 1.079 i [g_1(\zeta) + i g_2(\zeta)] \} \quad (2.29)$$

Соответственно функции

$$V_1' = -\sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 e^{-1/2 \pi i} \xi^{1/2} [f_1(\xi) - i f_2(\xi)] - 1.079 i [g_1(\xi) - i g_2(\xi)] \} \\ V_2' = -\sqrt{1/2} \pi \{ 1.293 \xi^{1/2} [f_1(\xi) - i f_2(\xi)] + 1.079 i [g_1(\xi) - i g_2(\xi)] \} \quad (2.30)$$

будут продолжениями интегралов $V_1(\sqrt{2i}\zeta)$, $V_2(\sqrt{2i}\zeta)$ из отрицательной в положительную область угла θ .

В соответствии со сказанным общее решение уравнения (2.1) в интервале $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ может быть записано в виде

$$V = (1 + \alpha \sin \theta)^{3/4} [C_1 V_1 + C_2 V_2] \quad (2.31)$$

где функции V_1 , V_2 определяются либо формулами (2.21), (2.23) в области $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ и тогда формулами (2.29) в области $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0$, либо формулами (2.27), (2.28) в области $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq 0$ и тогда формулами (2.30) в области $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Определенные таким образом линейно независимые решения уравнения (2.1) будут непрерывными вместе со всеми своими производными функциями θ во всех точках рассматриваемой области, включая и $\theta = 0$. При решении конкретных задач можно пользоваться любым из двух приведенных выше вариантов определения функций V_1 , V_2 .

3. Определение частного решения. Безмоментная теория дает для торообразных оболочек, как правило, бесконечно большие значения усилий и перемещений в точках $\theta = 0$, $\theta = \pm \pi$ (см. формулы (1.7), а также интересный пример № 122 в книге В. И. Феодосьева^[5], в котором, несмотря на конечность усилий, перемещения безмоментного тора оказываются бесконечными). Ввиду этого при расчете симметричной деформации рассматриваемых оболочек нельзя подменять (как это делают обычно для других оболочек вращения) частное решение моментного уравнения (которое должно оставаться конечным во всех точках оболочки) решением соответствующей безмоментной задачи.

В связи со сказанным необходимо дать достаточно удобный метод определения частного решения уравнения (1.12). Поскольку правая часть этого уравнения, а также все его коэффициенты являются периодическими функциями угла θ (с периодом 2π), постольку частное решение уравнения (1.12) можно искать в форме тригонометрического ряда:

$$V^* = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta + \dots + \\ + b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + b_n \sin n\theta + \dots \quad (3.1)$$

подставляя который в (1.12), получим следующую цепь рекуррентных зависимостей между коэффициентами a_m , b_n :

$$-n^2 a_n + \frac{1}{2} [2ik^2 - \alpha(n+1)(n+2)] b_{n+1} - \frac{1}{2} [2ik^2 - \alpha(n-1)(n-2)] b_{n-1} = \beta_n \\ -n^2 b_n + \frac{1}{2} [2ik^2 - \alpha(n-1)(n-2)] a_{n-1} - \frac{1}{2} [2ik^2 - \alpha(n+1)(n+2)] a_{n+1} = 0$$

где $\beta_n = 2k^2 D$ при $n = 1$, $\beta_n = 0$ при $n > 1$, $n = 0$.

Из зависимостей (3.2) следует, что мы имеем по существу две независимые бесконечные линейные алгебраические системы уравнений, в одну из которых входят a с нечетными и b с четными индексами, а в другую, наоборот, a с четными и b с нечетными индексами. При этом вторая система будет однородной, а следовательно (поскольку сейчас ищется

лишь частное решение), все входящие в нее неизвестные могут быть приняты равными нулю: $a_{2n} = b_{2n+1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

В соответствии с этим ряд (3.1) будет иметь вид:

$$V^* = a_1 \cos \theta + b_2 \sin 2\theta + a_3 \cos 3\theta + b_4 \sin 4\theta + \dots \quad (3.3)$$

причем для определения его коэффициентов может быть написана на основании (3.2) следующая бесконечная алгебраическая линейная система:

$$\begin{aligned} 1^2 i \frac{a_1}{k^2} + \left(1 + i \frac{2 \cdot 3}{2k^2} \alpha\right) b_2 &= -i2D \\ 2^2 i \frac{b_2}{k^2} + a_1 - \left(1 + i \frac{3 \cdot 4}{2k^2} \alpha\right) a_3 &= 0 \\ 3^2 i \frac{a_3}{k^2} + \left(1 + i \frac{4 \cdot 5}{2k^2} \alpha\right) b_4 - \left(1 + i \frac{1 \cdot 2}{2k^2} \alpha\right) b_2 &= 0 \\ 4^2 i \frac{b_4}{k^2} + \left(1 + i \frac{3 \cdot 2}{2k^2} \alpha\right) a_3 - \left(1 + i \frac{5 \cdot 6}{2k^2} \alpha\right) a_5 &= 0 \\ 5^2 i \frac{a_5}{k^2} + \left(1 + i \frac{6 \cdot 7}{2k^2} \alpha\right) b_6 - \left(1 + i \frac{4 \cdot 3}{2k^2} \alpha\right) b_4 &= 0 \\ 6^2 i \frac{b_6}{k^2} + \left(1 + i \frac{5 \cdot 4}{2k^2} \alpha\right) a_5 - \left(1 + i \frac{7 \cdot 8}{2k^2} \alpha\right) a_7 &= 0 \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эта система может быть решена в форме бесконечной цепной дроби, для чего первое из ее уравнений надо разделить на ia_1 , второе на ib_2 и т. д. и затем последовательно исключать неизвестные (отношения коэффициентов a и b), идя сверху вниз. В результате получим

$$a_1 = -2D\Psi_1(k, \alpha) \quad (3.5)$$

где

$$\Psi_n(k, \alpha) = \frac{1 + i \frac{(n-1)(n-2)}{2k^2} \alpha}{\frac{n^2}{k^2} + \left[1 + i \frac{n(n-1)}{2k^2} \alpha\right] \left[1 + i \frac{(n+1)(n+2)}{2k^2} \alpha\right] + \frac{(n+1)^2}{k^2} + \left[1 + i \frac{(n+1)n}{2k^2} \alpha\right] \left[1 + i \frac{(n+2)(n+3)}{2k^2} \alpha\right] + \frac{(n+2)^2}{k^2} + \left[1 + i \frac{(n+2)(n+1)}{2k^2} \alpha\right] \left[1 + i \frac{(n+3)(n+4)}{2k^2} \alpha\right] + \frac{(n+3)^2}{k^2} + \dots} \quad (3.6)$$

Эта бесконечная цепная дробь при $\alpha = 0$ сходится, каково бы ни было значение k^2 , поскольку ряд $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots$ расходится (см. [61]). При этом скорость ее сходимости будет тем лучше, чем k^2 меньше.

В интересующей нас задаче $0 \leq \alpha \leq 1$, причем обычно $\alpha < 0.5$. Как показывает практика расчетов, при этих значениях скорость сходимости дроби (3.6) остается примерно такой же, как и при $\alpha = 0$.

При помощи цепных дробей могут быть выражены и все прочие коэффициенты ряда (3.3) (через коэффициенты, им предшествующие). Последнее вытекает из того, что если отбросить в системе (3.4) несколько первых ее уравнений и рассматривать в остающейся после этого бесконечной системе коэффициент с наименьшим индексом как известную величину,

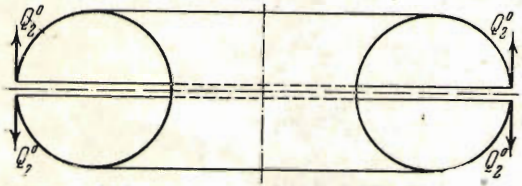
то по отношению к данной системе могут быть применены рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых была получена формула (3.5).

Выполняя указанные выше выкладки, будем иметь

$$a_n = -ib_{n-1} \Psi_n(k, \alpha), \quad b_{n+1} = ia_n \Psi_{n+1}(k, \alpha) \quad (3.7)$$

Теперь коэффициенты ряда (3.3) определены. Заметим, что цепные дроби являются достаточно удобным вычислительным алгоритмом.

Полученное в форме ряда (3.3) периодическое частное решение уравнения симметричной деформации торообразной оболочки (1.12) отвечает задаче, изображенной на фиг. 2, т. е. соответствует случаю, когда



Фиг. 2

замкнутая торообразная оболочка, нагруженная равномерным нормальным давлением, разрезана вдоль своей параллели $\theta = \frac{1}{2}\pi$ и загружена на образующихся при этом краях усилиями

$$Q_2^0 = \frac{pr_0}{2} \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} A \quad (3.8)$$

величина которых (благодаря наличию в (3.8) произвольной постоянной A) может быть выбрана какой угодно. На краях $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\theta = -\frac{3}{2}\pi$, кроме того, считаются равными нулю перерезывающие усилия N_1 и углы поворота ϑ . Подставляя ряд (3.3) в (1.15), можно убедиться в том, что поставленные выше краевые условия удовлетворяются.

Сформулированная выше задача, являясь периодической для усилий, моментов, угла поворота и перемещения w , не будет периодической для перемещений u и Δ_2 . Именно, перемещения u и Δ_2 будут неодинаковы при $\theta = \frac{1}{2}\pi$ и $\theta = -\frac{3}{2}\pi$, что ясно из фиг. 2 и подтверждается вычислением, если подставить (3.3) в (1.15) и (1.16).

Поступила 18 VI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Wissler H. Festigkeitsberechnung von Ringsflächenschalen. Promotionsarbeit. Zürich. 1916.
2. Stange K. Der Spannungszustand einer Kreisringschale. Ing. Archiv. 1931. Bd. 11. S. 47.
3. Феодосьев В. И. К расчету гофрированных коробок (сильфонов). Инженерный сборник АН СССР. 1947. Т. IV. Вып. 1.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. 1947.
5. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. Гос. изд. техн.-теор. литературы. 1950.
6. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 1949.
7. Штаерман И. Я. Расчет купола как арки на упругом основании. Проект и стандарт. 1933. № 9.