ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

К. Н. Шевченко (Москва)

В качестве частного случая решения упруго-пластических задач [1] в этой заметке приводится замкнутое решение упруго-пластической задачи для пластинки, нагруженной внутри кругового выреза осесимметричной нагрузкой. Решение этой задачи в квадратурах дано в заметке Г. С. Шапиро [2].

Решение строится без учета сжимаемости материала при линейном законе упрочнения материала.

Будем полагать пластинку бесконечной, нагруженной внутри выреза осесимметричной нагрузкой интенсивности q. При этом граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r = -q \quad \text{при } \rho = 1, \qquad \psi(\rho_s) = 1 \quad \text{при } \rho = \rho_s, \qquad \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \quad \text{при } \rho \to \infty$$

где a — радиус выреза, $\rho = r/a$ и ρ_s — радиус зоны пластичности. (1)

Кроме того, должна выполняться непрерывность компонент напряжения σ_r и σ_φ на границе упругой и пластической областей.

Решение в упругой области ($\rho_s \leqslant \rho < \infty$) имеет вид:

$$\sigma_r = -\frac{C_1}{\rho^2}, \qquad \sigma_\varphi = \frac{C_1}{\rho^2} \qquad (C_1 \text{ — произвольная постоянная}) \tag{2}$$

В пластической области ($1 \leqslant \rho \leqslant \rho_s$) решение задачи сводится к интегрированию уравнения типа Лагранжа (это уравнение приведено в работе [1] в виде (2.8), для данной задачи необходимо положить $\sigma_z = 0$)

$$\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t}\right)^2 - 2\left[\mu - \sigma_r + \frac{3}{2}\mu\,(t + C_2)\right]\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \mu\sigma_r = 0 \qquad (t = \ln \rho) \tag{3}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Уравнение (3) приводится к линейному следующего вида:

$$\frac{dt}{dp} + \frac{3\mu^2}{2p\,(2p-\mu)(p-2\mu)}\,t = \frac{\alpha - \mu p - p^2}{p(2p-\mu)(p-2\mu)} \tag{4}$$

где $2\alpha = -\mu^2(3C_2 + 2)$ и $p = \partial\sigma_r / \partial t$. Заменой переменной

$$\left(1 - \frac{2\mu}{p}\right)^{1/4} = z \tag{5}$$

уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{dt}{dz} + \frac{3\,(1 - z^4)}{z\,(3 + z^4)}\,t = \frac{2\,[\alpha\,(1 - z^4)^2 - 2\mu\,(1 + z^4)]}{\mu^2 z\,(3 + z^4)(1 - z^4)} \tag{6}$$

Интеграл уравнения (6) имеет вид:

$$t = \frac{3 + z^4}{24z}\left[3 \ln\frac{1 - z}{1 + z} - 6 \operatorname{arc\,tg} z - \frac{12\,(2C_2 + 1)\,z}{3 + z^4} + C_3\right] \tag{7}$$

где C_3 — произвольная постоянная.

Компоненты напряжения σ_r и σ_φ через параметр z определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{6\mu}{3 + z^4}\,t + \frac{2\mu\,[(3C_2 + 2)(1 - z^4) - 2]}{(3 + z^4)(1 - z^4)} \\ \sigma_\varphi &= \frac{6\mu}{3 + z^4}\,t + \frac{2\mu\,[(3C_2 + 2)(1 - z^4) + 1 + z^4]}{(3 + z^4)(1 - z^4)} \end{aligned} \tag{8}$$

где t выражено через z при помощи (7). Напряжения отнесены к пределу текучести на сдвиг k. Выражение для функции ψ через параметр z имеет вид:

$$\psi = \frac{z^4}{n} \tag{9}$$

Тогда компоненты деформации запишутся в следующем виде:

$$\varepsilon_r = \frac{\mu z^4}{n(3+z^4)}\left[t - \frac{2}{1-z^4} + C_2 + 1\right], \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{\mu z^4}{n(3+z^4)}\left[t + \frac{1+z^4}{1-z^4} + C_2 + 1\right]$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu z^4}{n(3+z^4)}[2t + 2C_2 + 1] \tag{10}$$

Компоненты деформации отнесены к безразмерной величине k/G.

Значение параметра z на границе упругой и пластической областей ($\rho=\rho_s$) определяется из условия (1) $\psi(\rho_s) = 1$ или согласно (9)

$$z_s^4 = n \tag{11}$$

Значение величины z на внутренней границе выреза ($p = 1$) обозначим через z_0 и определим его из граничных условий. Таким образом, из граничных условий следует определить пять величин C_1, C_2, C_3, ρ_s и z_0.

Из условий (1) непрерывности σ_r и σ_φ на границе упругой и пластической областей и, наконец, из равенства нулю t на внутренней поверхности выреза ($p=1$) и $t_s = \ln\rho_s$ вдоль границы пластичности получим систему пяти уравнений, позволяющих выразить величины C_1, C_2, C_3, z_0 и q через ρ_s:

$$C_1 = \rho_s^2, \qquad C_2 = -\frac{2\ln\rho_s + 1}{2}, \qquad C_3 = 6\,\mathrm{arc\,tg}\, n^{1/4} - 3\ln\frac{1-n^{1/4}}{1+n^{1/4}}$$

$$\frac{24 z_0 \ln\rho_s}{3+z_0^4} - 6\,\mathrm{arc\,tg}\, z_0 + 3\ln\frac{1-z_0}{1+z_0} + 6\,\mathrm{arc\,tg}\, n^{1/4} + 3\ln\frac{1-n^{1/4}}{1+n^{1/4}} = 0$$

$$q = \frac{\mu\,[4 - (1 - 6\ln\rho_s)(1 - z_0^4)]}{(3+z_0^4)(1-z_0^4)} \tag{12}$$

Результаты вычислений приведены в табл. 1, где даны значения z_0, C_1, C_2 и q в зависимости от радиуса пластичности ρ_s, и в табл. 2, где даны значения напряжений и деформаций для $\rho_s = 2$. Коэффициент упрочнения принят равным 0.2, т. е. $n = 0.2$, $\mu = 0.8$. При этих значениях постоянная C_3 согласно (12) равна 8.376.

Таблица 1

ρ_s	1	1.5	2	2.5	3
z_0	0.668	0.801	0.875	0.917	0.938
C_1	1	2.25	4	6.25	9
C_2	—0.5	0.906	—1.194	—1.417	—1.598
q	1	1.927	2.860	3.863	4.936

Таблица 2

ρ	2.00	1.80	1.62	1.46	1.30	1.15	1.00
z	0.668	0.703	0.738	0.773	0.808	0.843	0.875
σ_r	—1	—1.213	—1.443	—1.695	—1.997	—2.378	—2.860
σ_φ	1	0.890	0.832	0.793	0.789	0.853	1.003
ε_r	—0.5	—0.675	—0.919	—1.244	—1.697	—2.360	—3.281
ε_φ	0.5	0.612	0.769	0.975	1.268	1.718	2.374
ε_z	0	0.063	0.150	0.269	0.428	0.642	0.906

Поступила 20 II 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко К. Н. Упруго-пластическая задача для тяжелого полупространства с вертикальным цилиндрическим вырезом. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 6.
2. Шапиро Г. С. Об интегрировании в квадратурах уравнений одномерной плоской задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.

33