Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ИЗГИБ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ПЛИТ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНТУРОМ

Я. С. Уфлянд
(Ленинград)

Точное решение задачи изгиба секториальной плиты получено Б. Г. Галеркиным [1] только для случая свободно опертых прямолинейных частей контура. Если же радиусы плиты закреплены, то возникают совершенно такие же трудности, как и при решении соответствующей задачи для прямоугольной плиты. Применяя метод И. Г. Бубнова [2] для случая равномерной внешней нагрузки, Карье [3] подсчитал ценой чрезвычайно громоздких выкладок изгибающие моменты на закрепленном контуре кругового прямоугольника; однако случай сектора им не рассматривался.

При помощи метода, предложенного Г. А. Гринбергом [4] в работе [5], точное решение задачи изгиба секторной плиты с закрепленными радиусами сведено к некоторому интегральному уравнению, допускающему весьма эффективные приближения. Однако указанное решение обладает двумя недостатками: 1) его точность тем ниже, чем меньше центральный угол сектора; 2) оно не пригодно для расчета изгибающих моментов и перерезывающих сил на прямолинейных частях контура.

В настоящей заметке предлагается другой, свободный от этих недостатков способ решения задачи об изгибе секториальной плиты с закрепленным контуром.

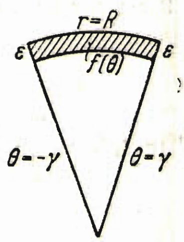
Рассмотрим упругую тонкую плиту, имеющую форму кругового сектора (фиг. 1) Уравнение для прогибов w, вводя другую переменную величину u, запишем в виде

$$\triangle^2 u = q(r, \theta) \qquad \left(u = Dw, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right) \tag{1}$$

где $q(r, \theta)$ — внешняя нагрузка. Граничные условия будут

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{при} \quad \theta = \pm\gamma \tag{2}$$

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \quad r = R \tag{3}$$



Фиг. 1

Будем искать решение уравнения (1) в форме следующего интеграла:

$$u(r, \theta) = r\int_0^\infty v(\theta, z)\,\psi(r, z)\,dz, \qquad \psi(r, z) = \cos\left(z \lg\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{z}\sin\left(z \lg \frac{R}{r}\right) \tag{4}$$

При этом второе граничное условие (3) выполняется.

Приложим теперь по дуге $r = R$ [по полоске ширины ε (фиг. 1)] распределенную нагрузку $f(\theta)$, которую впоследствии определим при помощи первого условия (3). После подстановки (4) в (1) получаем

$$\frac{1}{r^3}\int_0^\infty \left[\frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} + 2(1 - z^2)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (1 + z^2)^2 v\right]\psi(r, z)\,dz = S(r, \theta) \tag{5}$$

$$S(r, \theta) = \begin{cases} q(r, \theta) + \dfrac{1}{\varepsilon} f(\theta) & \text{при } R - \varepsilon < r < R. \\ q(r, \theta) & \text{при прочих } r \end{cases} \tag{6}$$

Теперь, разлагая функцию $r^3S(r, 0)$ на промежутке $(0, R)$ в интеграл по функциям $\psi(r, z)$ с весом r^{-1}, будем иметь для $v(\theta, z)$ (в пределе при $\varepsilon \to 0$) уравнение[1]

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + 2(1-z^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + (1+z^2)^2\right] v(\theta, z) = T(\theta, z) \tag{7}$$

Здесь

$$T(\theta, z) = \frac{2z^2}{\pi(1+z^2)}[p(\theta, z) + \varphi(\theta)]$$

$$p(\theta, z) = \int_0^R r^2 q(r, \theta)\,\psi(r, z)\,dr, \qquad \varphi(\theta) = R^2 f(\theta)$$

Общий интеграл уравнения (7) будет

$$v(\theta, z) = C_1(z)\operatorname{ch}\theta z\cos\theta + C_2(z)\operatorname{ch}\theta z\sin\theta + C_3(z)\operatorname{sh}\theta z\cos\theta +$$
$$+ C_4(z)\operatorname{sh}\theta z\sin\theta + \frac{1}{2z(z^2+1)}\int_0^\theta T(t, z)\,K(t, \theta, z)\,dt \tag{8}$$

где

$$K(t, \theta, z) = \operatorname{sh} z(t-\theta)\cos(t-\theta) - z\operatorname{ch} z(t-\theta)\sin(t-\theta)$$

Постоянные $C_i(z)$ должны быть определены из граничных условий (2), после чего выражение (4) для u будет точно удовлетворять пяти граничным условиям из шести. Остается удовлетворить первому условию (3), которое приводит к следующему интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\varphi(\theta)$:

$$\int_0^\theta \varphi(t)\,F(R, t, \theta)\,dt + \int_0^\gamma \varphi(t)\,H^+(R, t, \theta)\,dt + \int_0^{-\gamma}\varphi(t)H^-(R,t,\theta)\,dt = -\Phi(R, \theta) \tag{9}$$

Здесь введены обозначения:

$$F(r, t, \theta) = \int_0^\infty K(t, \theta, z)\,\psi(r, z)\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} \tag{10}$$

$$H^\pm(r, t, \theta) = \int_0^\infty [A^\pm(\theta, z)\,K(t, \pm\gamma, z) + B^\pm(\theta, z)\,K'(t, \pm\gamma, z)\,\psi(r, z)\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2}$$

$$A^\pm(\theta, z) =$$
$$= \frac{1}{\Delta}[(z\cos\gamma\operatorname{sh}\gamma z - \sin\gamma\operatorname{ch}\gamma z)\sin\theta\operatorname{sh}\theta z - (\cos\gamma\operatorname{sh}\gamma z + z\sin\gamma\operatorname{ch}\gamma z)\cos\theta\operatorname{ch}\theta z] \pm$$
$$\pm \frac{1}{\delta}[(z\cos\gamma\operatorname{ch}\gamma z - \sin\gamma\operatorname{sh}\gamma z)\sin\theta\operatorname{ch}\theta z - (\cos\gamma\operatorname{ch}\gamma z + z\sin\gamma\operatorname{sh}\gamma z)\cos\theta\operatorname{sh}\theta z]$$

$$B^\pm(\theta, z) = \pm\frac{1}{\Delta}[\sin\gamma\operatorname{sh}\gamma z\cos\theta\operatorname{ch}\theta z - \cos\gamma\operatorname{ch}\gamma z\sin\theta\operatorname{sh}\theta z] +$$
$$+ \frac{1}{\delta}[\sin\gamma\operatorname{ch}\gamma z\cos\theta\operatorname{sh}\theta z - \cos\gamma\operatorname{sh}\gamma z\sin\theta\operatorname{ch}\theta z]$$

$$\Delta = \operatorname{sh}2\gamma z + z\sin 2\gamma, \qquad \delta = \operatorname{sh}2\gamma z - z\sin 2\gamma$$

$$K'(t, \theta, z) = \frac{\partial K(t, \theta, z)}{\partial\theta} = (z^2+1)\operatorname{sh} z(t-\theta)\sin(t-\theta)$$

[1] Справедливость указанного разложения может быть без труда доказана обычными приемами.

$$\Phi(r,\theta)=\int_0^\infty\Big[A^+(\theta,z)\int_0^\gamma p(t,z)\,K(t,\gamma,z)\,dt+B^+(\theta,z)\int_0^\gamma p(t,z)\,K'(t,\gamma,z)\,dt+$$

$$+A^-(\theta,z)\int_0^{-\gamma}p(t,z)\,K(t,-\gamma,z)\,dt+B^-(\theta,z)\int_0^{-\gamma}p(t,z)\,K'(t,-\gamma,z)\,dt+$$

$$+\int_0^0 p(t,z)\,K(t,\theta,z)\,dt\Big]\frac{z\psi(r,z)}{(z^2+1)^2}\,dz$$

Если в результате решения уравнения (9) функция $\varphi(\theta)$ найдена, то искомая величина u выражается через нее квадратурами:

$$\frac{\pi}{r}u(r,\theta)=\int_0^\theta\varphi(t)\,F(r,t,\theta)\,dt+\int_0^\gamma\varphi(t)\,H^+(r,t,\theta)\,dt+$$

$$+\int_0^{-\gamma}\varphi(t)\,H^-(r,t,\theta)\,dt+\Phi(r,\theta) \tag{11}$$

Переходим к приближенному решению задачи.

В первом приближении закрепим точку $\theta=0$, $r=R$ и заменим нагрузку $\varphi(\theta)$ сосредоточенной силой $\varphi(0)$. Тогда, полагая в (9) $\theta=0$, имеем

$$\frac{\varphi(0)}{2}=\frac{\Phi(R,0)}{H^-(R,0,0)-H^+(R,0,0)} \tag{12}$$

Приводим приближенные формулы для прогиба в центре плиты и изгибающего момента на прямолинейном краю:[1]

$$u\left(\frac{R}{2},0\right)=\frac{R}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{R}{2},0\right)-\lambda\Phi(R,0)\right],\qquad \lambda=\frac{G(R/2)}{G(R)}$$

$$G(r)=\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^2\gamma z-z^2\sin\gamma}{\operatorname{sh}2\gamma z+z\sin2\gamma}\,\frac{z\psi(r,z)}{(z^2+1)^2}\,dz \tag{13}$$

$$-M(r,\pm\gamma)=\frac{1}{\pi r}\left\{\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\pm\gamma}-\Phi(R,0)\frac{N(r)}{G(R)}\right\}$$

$$N(r)=2\sin\gamma\int_0^\infty\frac{z^2\psi(r,z)\operatorname{sh}\gamma z}{\operatorname{sh}2\gamma z+z\sin2\gamma}\,dz \tag{14}$$

Заметим, что величины $G(r)$ и $N(r)$ в формулах (13) и (14) не зависят от внешней нагрузки[2] и могут быть подсчитаны раз и навсегда для различных значений r и γ.

В качестве примера приведем формулу для изгибающего момента на прямолинейном краю в том случае, когда нагрузка представляет собой силу P, сосредоточенную в точке $r=r_0$, $\theta=0$

$$-\frac{\pi r}{2r_0P\sin\gamma}M(r)=\int_0^\infty[\psi(r_0,z)-\lambda]\frac{\operatorname{sh}\gamma z\psi(r,z)}{\operatorname{sh}2\gamma z+z\sin2\gamma}\,\frac{z^2dz}{z^2+1} \tag{15}$$

---

[1] Изгибающий момент (равным образом и перерезывающая сила) на дуговом краю при таком способе решения вообще не может быть вычислен.

[2] Зависимость от внешней нагрузки дается функцией $\Phi(r,\theta)$.

Из самого способа построения такого приближенного решения следует, что его точность тем выше, чем меньше центральный угол сектора. Однако расчеты показывают, что даже в наихудшем случае полукруглой плиты полученное первое приближение не дает большой погрешности.

Вычислим, например, максимальный изгибающий момент $M_{\max}$ на диаметре полукруглой плиты, достигающийся, очевидно, в точке $(r = 0, \theta = 0)$.

При помощи теоремы о вычетах можно показать, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_0^\infty \psi(r, z)\, \psi(r_0, z)\, \frac{\operatorname{sh}\gamma z}{\operatorname{sh} 2\gamma z + z\sin 2\gamma}\, \frac{z^2 dz}{z^2+1} = 0 \quad \text{при} \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{R}{2}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{\psi(r, z)\operatorname{sh}\gamma z}{\operatorname{sh} 2\gamma z + z\sin 2\gamma}\, \frac{z^2 dz}{z^2+1} = -\frac{1}{2R} \quad \text{при} \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, если сила приложена в центре плиты:

$$-\frac{M_{\max}}{P} = \frac{\lambda}{2\pi} \qquad \text{при} \quad r_0 = \frac{R}{2}$$

Учитывая еще равенства при $\gamma = \frac{1}{2}\pi$

$$4G(R) = 1 - \lg 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2(2k-1)}$$

$$4G\left(\frac{1}{2}R\right) = 1 - 2\lg\frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(^1/_4)^k}{(2k+1)^2(2k-1)}$$

имеем окончательно $-M_{\max} \approx 0.139$, что на 12 % отличается от точного значения 0.158, полученного в работе [6]. Дальнейшие приближения могут быть получены путем закрепления других точек на дуге $r = R$ и вычисления сил, приложенных в этих точках.

Заметим в заключение, что если $R = \infty$ («клиновидная» плита), то в предложенной нами форме (4) может быть найдено точное решение задачи изгиба, так как первое условие (3) при этом уже выполнено, причем граничные условия на кромках $\theta = \pm\gamma$ могут быть произвольными (для случая закрепленных краев такое решение получено И. Е. Сахаровым [7] способом, несколько отличающимся от приведенного здесь).

Поступила 19 IX 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. 1933. Стр. 275.
2. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля, ч. II. 1914. Стр. 465.
3. Carrier. The bending of the clamped sectorial Plate. Journ. of appl. Mech. Trans. ASME. 1944. P. A-134.
4. Гринберг Г. А. и Уфлянд Я. С. Об изгибе прямоугольной пластины с закрепленным контуром под действием произвольной нагрузки. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 4.
5. Уфлянд Я. С. Интегральное уравнение изгиба секторной плиты с закрепленными радиусами. ДАН СССР. 1950. Т. 72. Вып. 2.
6. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ОГИЗ. Гостехиздат. 1950. Стр. 95.
7. Сахаров И. Е. Изгиб клиновидной защепленной пластинки под действием произвольной нагрузки. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.