Институт механики Академии Наук Союза ССР
**Прикладная математика и механика. Том XV, 1951**

# К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

**П. Я. Полубаринова-Кочина**

(Москва)

В книге [1] развита гидравлическая теория установившихся движений в слоистых грунтах.

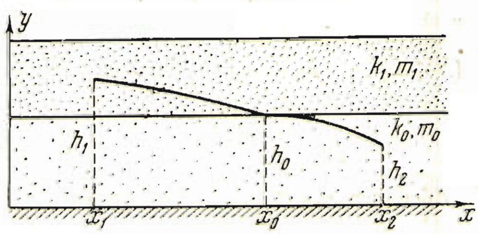
Н. К. Гиринским [2] для решения аналогичных задач введена функция Ф, представляющая обобщение понятия о потенциале осредненного по высоте движения на случай, когда коэффициент фильтрации меняется с высотой. Эта функция имеет вид:

$$\Phi(x, y) = \int_0^h (z-h)\, k(z)\, dz \tag{0.1}$$

Здесь $h$ — напор, рассматриваемый как функция от $x$ и $y$, $k$ — коэффициент фильтрации, рассматриваемый как функция от высоты. Принимается при этом, что функция $h(x, y)$ дает ординату точек свободной поверхности для безнапорного движения.

В случае установившегося движения функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Производные от Ф по координатам дают составляющие вектора-расхода (на единицу площади)

$$q_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad q_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \tag{0.2}$$




Фиг. 1

Нашей целью является составление уравнения для Ф в случае неустановившегося движения в двуслойном грунте и сравнение некоторых решений этого уравнения с соответствующими решениями для однородного грунта. Но предварительно мы сделаем несколько замечаний по поводу установившегося движения в двуслойном грунте.

1. **Установившееся движение в двуслойном грунте**. Пусть нижний слой грунта представляет полосу, ограниченную двумя горизонтальными плоскостями ширины $h_0$, верхний — полосу ширины $h_1$. В нижнем слое пусть коэффициент фильтрации и недостаток насыщения будут соответственно $k_0$ и $m_0$, в нижнем слое $k_1$ и $m_1$ (фиг. 1). Тогда будем иметь

$$\Phi = k_0 \int_0^h (z-h)\, dz + k_1 \int_{h_0}^h (z-h)\, dz = -\frac{1}{2} k_1 \{[h + (c-1) h_0]^2 + c(c-1) h_0^2\} \tag{1.1}$$

$$\Phi = k_0 \int_0^h (z-h)\, dz = -\frac{1}{2} k_0 h^2 \tag{1.2}$$

причем $c = k_0 / k_1$.

Будем рассматривать плоское движение в вертикальной плоскости $xz$. Тогда уравнение Лапласа сведется к уравнению $\partial^2\Phi / \partial x^2 = 0$, общее решение которого имеет вид: $\Phi = C_1 x + C_2$.

Для верхнего слоя грунта можем написать уравнение

$$[h + (c - 1) h_0]^2 = Ax + B \tag{1.3}$$

где $A$ и $B$ — произвольные постоянные, для нижнего — уравнение

$$h^2 = Cx + D \tag{1.4}$$

с произвольными постоянными $C$ и $D$.

Уравнение (1.3) представляет параболу с осью симметрии

$$Z = -(c - 1) h_0 = -b$$

Эта ось лежит под осью $x$ (фиг. 1), если $c > 1$, причем абсолютное значение $b$ в этом случае может быть как угодно большим (при достаточно большом $c = k_0 / k_1$). Чем больше $b$, тем более пологой является свободная поверхность.

Если $c < 1$, то ось параболы (1.3) будет выше оси абсцисс, причем ее расстояние от оси абсцисс $b = (1 - c) h_0$ заключается между нулем и $h_0$.

Предположим, что свободная поверхность проходит через точки $(x_1, h_1)$ и $(x_2, h_2)$, причем первая из этих точек находится в верхнем грунте, вторая—в нижнем грунте.

Обозначим неизвестную абсциссу той точки, в которой $h$ равно $h_0$, т. е. толщине нижнего слоя грунта, через $x_0$. Тогда уравнения парабол (1.3) и (1.4) примут соответственно вид:

$$(h + b)^2 = (h_0 + b)^2 + (h_1 + h_0)(h_1 + h_0 + 2b) \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} \qquad (b = (c - 1)h_0)$$

$$h^2 = h_0{}^2 - (h_0{}^2 - h_2{}^2) \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}$$

Абсцисса $x_0$ определяется при помощи формулы

$$x_0 = \frac{Mx_1 + Nx_2}{M + N}$$

где

$$M = c(h_0 + h_2)(h_0 - h_2), \qquad N = (h_1 - h_0)(h_1 + h_0 + 2b)$$

Мы видим, что метод Н. К. Гиринского представляет обобщение общепринятой гидравлической теории на случай многослойных грунтов. (Не представляет затруднений распространить приведенные выше рассуждения на случай любого числа горизонтальных слоев грунта.) Это обобщение представляет значительный интерес, так как в природе почти всегда имеют место слоистые формы залегания грунтов.

**2. Задача о неустановившемся движении грунтовых вод в двуслойной среде при слабо изменяющейся свободной поверхности.** Рассмотрим количество жидкости, заключенное в столбе грунта с основанием $dx\,dy$ и высотой $h$ к моменту времени $t$. Оно равно, если обозначить через $m_0$ и $m_1$ величины эффективной порозности (недостатка насыщенности) в двух грунтах, выражению

$$[m_0 h_0 + m_1 (h - h_0)]\, dx\, dy \tag{2.1}$$

Изменение расхода через параллелепипед $h\, dx\, dy$ равно

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) dx\, dy$$

С другой стороны, это изменение расхода равно производной по времени от выражения (2.1). Отсюда получается уравнение

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-\frac{\partial m_1 h}{\partial t} \tag{2.2}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\Phi'(h)\frac{\partial h}{\partial t}=-\left[k_0h_0+k_1(h-h_0)\right]\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2.3}$$

Мы считаем $m_0$ и $m_1$ постоянными.

Представим уравнение (2.3) в следующем виде:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{k_0h_0+k_1(h-h_0)}{m_1}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) \tag{2.4}$$

Заменим, подобно тому как это делают при линеаризации уравнения неустановившегося движения для однородного грунта, переменную $h-h_0$ некоторым средним значением $\overline{h}_1$ и положим

$$a^2=\frac{k_0h_0+k_1\overline{h}_1}{m_1} \tag{2.5}$$

Тогда уравнение (10) примет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=a^2\triangle\Phi \tag{2.6}$$

Для одноразмерного течения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

В качестве примера рассмотрим фильтрацию из канала с вертикальной стенкой.

Пусть в начальный момент времени грунтовые воды имеют постоянный уровень $H_0$. Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда свободная поверхность во все время движения находится в верхнем слое грунта. Из этого требования следует, что должно быть $H_1 \geqslant h_0$.

Граничные условия примем такими:

$$H=H_2=\text{const} \qquad \text{при } x=0$$
$$H \quad \text{ограничено при } x=\infty$$

Тогда для $\Phi(x,t)$ граничное и начальное условия примут вид:

$$\Phi(x,0)=-\tfrac{1}{2}k_1(H_1-h_0)^2-k_0h_0+\tfrac{1}{2}k_0h_0{}^2=\Phi_1$$

$$\Phi(0,t)=-\tfrac{1}{2}k_2(H_2-h_0)^2-k_0h_0+\tfrac{1}{2}k_0h_0{}^2=\Phi_2$$

Для $\Phi(x,t)$ получаем известное решение

$$\Phi(x,t)=(\Phi_1-\Phi_2)\,\mathcal{J}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi_2 \tag{2.8}$$

где $\mathcal{J}(\zeta)$ — интеграл вероятности:

$$\mathcal{J}(\zeta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\zeta e^{-\lambda^2}d\lambda \tag{2.9}$$

При этом

$$\begin{gathered}\Phi=-\tfrac{1}{2}k_1\left\{[h+(c-1)h_0]^2+c(c-1)h_0{}^2\right\}\\ \Phi_1-\Phi_2=-\tfrac{1}{2}k_1(H_1-H_2)\left[\tfrac{1}{2}(H_1+H_2)+(c-1)h_0\right]\end{gathered} \tag{2.10}$$

Вычислим расход $q$ в сечении $x=0$. Согласно (2) имеем

$$q(x, t) = (\Phi_1 - \Phi_2)\frac{1}{a\sqrt{t\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2t}\right\}$$

Отсюда

$$q(0, t) = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{a\sqrt{\pi t}} = -\frac{k_1(H_1 - H_2)}{a\sqrt{\pi t}}\left[\frac{H_1 + H_2}{2} + (c-1)h_0\right] \qquad (2.11)$$

где

$$a^2 = \frac{k_0 h_0 + k_1 \overline{h}_1}{m_1}$$

Для однородного грунта, полагая $k_0 = k_1$, $h_0 + \overline{h}_1 = \overline{h}$, получим для расхода $q_*(0, t)$:

$$q_*(0, t) = -\frac{k_1(H_1 - H_2)(H_1 + H_2)}{2a_*\sqrt{\pi t}} \qquad \left(a_*^2 = \frac{k_1\overline{h}}{m_1}\right)$$

Составив отношение $q : q_*$, имеем

$$\frac{q}{q_*} = \left[1 + (c-1)\frac{2h_0}{H_1 + H_2}\right]\sqrt{\frac{h_0 + \overline{h}_1}{ch_0 + \overline{h}_1}} \qquad \left(c = \frac{k_0}{k_1}\right) \qquad (2.12)$$

Полученная формула показывает, что расход может во много раз увеличиться, если под слабо проницаемым грунтом находится слой хорошо проницаемого грунта.

Что касается скорости повышения или понижения свободной поверхности, то она также может значительно меняться, если нижний слой будет другой проницаемости, чем верхний.

Обратим внимание на следующее. В уравнение теплопроводности (27), а следовательно, и в решение этого уравнения время $t$ входит с множителем $a^2$. В случае однородного грунта мы этот множитель обозначили через $a_*^2$. Составив отношение $a^2 / a_*^2$, имеем

$$\frac{a^2}{a_*^2} = 1 + (c-1)\frac{h_0}{\overline{h}_1} \qquad \left(c = \frac{k_0}{k_1}\right)$$

Отсюда видно, что при $c < 1$ имеет место неравенство

$$a^2 < a_*^2$$

и, следовательно, длительность процесса (при прочих равных условиях) для неоднородного грунта будет более медленной, чем для однородного (такого, как верхний грунт). Наоборот, при $c > 1$ процесс должен происходить быстрее, чем для однородного грунта (такого, как верхний).

Для того чтобы найти форму свободной поверхности в различные моменты времени, нужно решить первое из уравнений (2.10) относительно $h$, подставив в него значение $\Phi$ из (2.8). Получим

$$h(x, t) = -(c-1)h_0 + \sqrt{\frac{2\Phi(x, t)}{k_1} - c(c-1)h_0^2} \qquad (2.13)$$

Общее замечание, которое можно сделать по поводу уравнения (2.13), таково: при $c > 1$ свободная поверхность будет более пологой, чем при $c = 1$; наоборот, она будет более крутой при $c < 1$, чем при $c = 1$.

Поступила 30 XII 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А., Разин К. И. Движение подземных вод в неоднородных пластах. ОНТИ. 1935.
2. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология, сборник статей № 9. ВСЕГИНГЕО. 1947.