Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

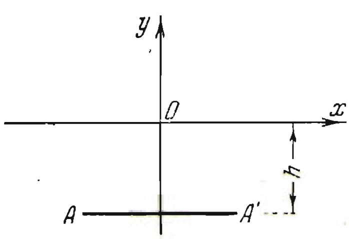
КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С УЧЕТОМ МАЛЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. К. Белякова (Москва)

В работе Н. Е. Кочина [1] дается решение плоской задачи о волновых движениях, возникающих в тяжелой жидкости при колебании под свободной поверхностью жидкости. В предположении, что колебания тела, а следовательно, и амплитуда образующихся волн будут малы, применяются обычные упрощения теории волн достаточно малой амплитуды, т. е. пренебрегаются величины второго и более высокого порядка малости по сравнению с компонентами скорости u и v и их производными. В упомянутой выше работе даются формулы для определения амплитуды возникающих волн, энергии, затраченной на образование этих волн, и сил, действующих на колеблющееся тело.

Для частного случая колеблющейся по вертикали пластинки под свободной поверхностью жидкости амплитуда образующихся волн оказывается равной:

$$a = 2\pi\beta l e^{-\nu h} |J_1(\nu l)| \tag{1}$$



Фиг. 1

где β — амплитуда колебаний пластинки, $2l$ — ее ширина, $\nu = \omega^2 / g$, ω — частота колебаний пластинки, g — ускорение силы тяжести, h — глубина погружения пластинки при отсутствии колебаний, J_1 — функция Бесселя первого рода. Энергия, затраченная на образование этих волн, отнесенная к единице времени, равна:

$$T = \frac{1}{4} a^2 g \rho c \tag{2}$$

где ρ — плотность жидкости, c — скорость распространения волн. Пластинка будет испытывать подъемную силу за счет гидродинамического воздействия, средняя величина которой за период будет равна:

$$Y_{\text{ср.}} = \pi\rho\beta^2 g\nu l \text{ v. p.} \int_0^\infty \frac{\mu+\nu}{\mu-\nu} e^{-2\mu h} J_1(\mu l)\, d\mu \tag{3}$$

Формула (1) показывает, что при определенных частотах колебаний пластинки, а именно, когда $\nu l = s_k$, где s_k — положительные корни функции Бесселя $J_1(s)$, волны не образуются. Тем не менее пластинка будет испытывать подъемную силу, величина которой дается формулой (3). Такой результат можно объяснить приближенным характером теории.

Ниже приводится решение задачи с колебанием пластинки под свободной поверхностью с учетом малых второго порядка.

Под свободной поверхностью, которая в состоянии равновесия совпадает с x (фиг. 1), помещена пластинка AA' шириной $2l$. Закон колебания пластинки по вертикали дается формулой

$$\eta = \beta \sin \omega t \tag{4}$$

Предполагая колебания пластинки малыми, возникшее движение жидкости потенциальным, будем считать, что величины β и производные потенциалы скоростей φ являются величинами первого порядка малости. Глубина погружения пластинки h предполагается достаточно большой.

Давление p определяется из интеграла Коши—Лагранжа

$$p = -\rho g y - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^3\right] + F(t)$$

На свободной поверхности, уравнение которой $y = \delta(x, t)$, он может быть записан в виде

$$g\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{5}$$

Принимая во внимание условие о том, что частица жидкости, принадлежащая границе, не покидает границу, получим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \delta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial t} \quad \text{при } y = \delta(x, t) \tag{6}$$

Производные $\partial\delta / \partial x$ и $\partial\delta / \partial y$ найдем из (5). После подстановки в (6) получим условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{7}$$

которое будем считать выполняющимся при $y = 0$.

Условие, выполняющееся на пластинке, будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta\omega\cos\omega t \tag{8}$$

и выражает, что нормальная составляющая скорости частиц жидкости, соприкасающихся с пластинкой, равна скорости пластинки.

При решении задачи с учетом малых первого порядка предполагается, что это условие выполнено на неподвижной пластинке. Чтобы учесть колебания пластинки, перейдем к новым координатам по формулам

$$x_1 = x, \qquad y_1 = y - \beta\sin\omega t + h \tag{9}$$

Условие (7) в новых координатах примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^2 \partial y_1}\frac{1}{g} - \frac{\omega^2}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)\beta\sin\omega t + \frac{\beta\omega}{g}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial y_1}\cos\omega t -$$
$$-\frac{\beta\omega}{g}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t \partial y_1}\cos\omega t - \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}\right)^2\right] \quad \text{при } y_1 = h$$

Если ввести комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$, где ψ — функция тока, то это условие можно переписать иначе:

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{i}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = \qquad \text{при } y_1 = h \tag{10}$$
$$= \operatorname{Im}\left\{\left[-i\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{g}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} + \frac{\omega^2}{g}\frac{\partial w}{\partial z}\right]\beta\sin\omega t - \frac{\beta\omega}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}\cos\omega t - \frac{i}{g}\frac{\partial}{\partial t}[v\bar{v}]\right\}$$

где $z = x_1 + iy_1$ и $\bar{v} = \partial w / \partial z$. Граничное условие (8) принимает вид:

$$\operatorname{Im}\frac{\partial w}{\partial z} = -\beta\omega\cos\omega t \qquad \text{при } y_1 = 0 \tag{11}$$

Комплексный потенциал $w(z, t)$ будем искать в виде

$$w(z, t) = w_1(z, t) + \beta w_2(z, t) + \beta^2 w_3(z, t) + \ldots$$

Ограничиваясь малыми второго порядка и подставляя это выражение в (10) и (11), найдем те условия, которым должны удовлетворять функции w_1 и w_2:

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{\partial w_1}{\partial z}+\frac{i}{g}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right\}_{y_1=h}=0 \tag{12}$$

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{\partial w_2}{\partial z}+\frac{i}{g}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\right\}_{y_1=h}=\operatorname{Im}\left\{\left(-i\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}-\frac{1}{g}\frac{\partial^3 w_1}{\partial z\partial t^2}+\frac{\omega^2}{g}\frac{\partial w_1}{\partial z}\right)\sin\omega t-\right.$$
$$\left.-\frac{\omega}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}\cos\omega t-\frac{i}{\beta g}\frac{\partial}{\partial t}(v_1\overline{v}_1)\right\}_{y_1=h}$$

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial w_1}{\partial z}\right\}_{y_1=0}=-\beta\omega\cos\omega t,\qquad \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial w_2}{\partial z}\right\}_{y_1=0}=0 \tag{13}$$

Согласно методу, изложенному в работе [1], функция $w_1(z, t)$, удовлетворяющая условиям (12) и (13) соответствующая $\overline{v}_1=\partial w_1/\partial z$, определяются формулой

$$\overline{v}_1=\overline{v}_{11}(z)\cos\omega t+\overline{v}_{12}(z)\sin\omega t$$

В этой формуле

$$\overline{v}_{11}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\overline{v}_0(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty H_1(\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda-\frac{\nu}{\pi}\ \text{v. p.}\int\limits_0^\infty\frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}e^{-i\lambda(z-ih)}d\lambda$$
$$\overline{v}_{12}=-\nu\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu(z-ih)}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий пластинку, и

$$\overline{v}_0(z)=-i\beta\omega\left[1-\frac{z}{\sqrt{z^2-l^2}}\right],\qquad \overline{H}_1(\nu)=-2\pi i\beta\omega l e^{-\nu h}J_1(\nu l)$$

Условие (12) для определения w_2 перепишется так:

$$\operatorname{Im}\left\{-\frac{\partial w_2}{\partial z}+\frac{i}{g}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}\right\}_{z=x+ih}=\operatorname{Im}\{A(z)\cos 2\omega t+B(z)\sin 2\omega t+C(z)\}_{z=x+ih}$$

где
$$C(z)=\frac{\nu^2}{2}\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu(z-ih)}$$

$$A(z)=\frac{\nu\beta}{2\pi g}H_1(\nu)e^{-i\nu(z-ih)}\left(-\nu g\pi+4\omega^2\pi-\frac{2\omega}{\beta}\int\limits_C\frac{v_0(\zeta)\,d\zeta}{z-2ih-\zeta}\right)-$$
$$-\frac{2i\omega\nu^2}{\pi g\beta}\left[\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu(z-ih)}\ \text{v. p.}\int\limits_0^\nu\frac{H_1(\lambda)}{\lambda-\nu}e^{i\lambda(z-ih)}d\lambda+\right.$$
$$\left.+H_1(\nu)e^{i\lambda(z-i\lambda)}\ \text{v. p.}\int\limits_\nu^\infty\frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}e^{-i\lambda(z-ih)}d\lambda\right]-$$
$$-\frac{i\omega\nu}{\pi g\beta}\left[\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu(z-ih)}\int\limits_0^\nu H_1(\lambda)e^{i\lambda(z-i\lambda)}\,d\lambda+\right.$$
$$\left.+H_1(\nu)e^{i\nu(z-ih)}\int\limits_\nu^\infty\overline{H}_1(\lambda)e^{-i\lambda(z-ih)}d\lambda\right]$$

$$B(z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_C \frac{\overline{v}_0\,d\zeta}{(z-\zeta)^2}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,\lambda\,d\lambda+$$

$$+\frac{\nu}{2\pi}\,\text{v. p.}\int\limits_0^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,\mu\,d\mu-\frac{i\omega^2}{\pi g}\int\limits_C \frac{\overline{v}_0\,d\zeta}{z-\zeta}-$$

$$-\frac{\omega^2}{\pi g}\left[\int\limits_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda+2\,\text{v. p.}\int\limits_0^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\right]+$$

$$+\frac{\omega}{2\pi^2 g\beta}\int\limits_C \frac{v_0\,d\zeta}{z-2ih-\zeta}\left[\int\limits_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda+\nu\,\text{v. p.}\int\limits_0^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\right]+$$

$$+\frac{i\omega\nu^2}{\pi^2 g\beta}\left[\text{v. p.}\int\limits_0^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\;\text{v. p.}\int\limits_0^\lambda \frac{H_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{i\lambda(z-ih)}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\,\text{v. p.}\int\limits_0^\infty \frac{H_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{i\lambda(z-i\lambda)}\,d\lambda\;\text{v. p.}\int\limits_\lambda^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\right]+$$

$$+\frac{i\omega\nu}{\pi^2 g\beta}\left[\int\limits_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\;\text{v. p.}\int\limits_0^\lambda \frac{H_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{i\lambda(z-ih)}\,d\mu+\int\limits_0^\infty H_1(\lambda)\,e^{i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\times\right.$$

$$\left.\times\,\text{v. p.}\int\limits_\lambda^\infty \frac{\overline{H}_1(\lambda)}{\lambda-\nu}\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\right]+\frac{i\omega}{4\pi^2 g\beta}\int\limits_C \frac{\overline{v}_0\,d\zeta}{z-\zeta}\int\limits_C \frac{v_0\,d\zeta}{z-2ih-\zeta}+$$

$$+\frac{i\omega}{4\pi^2 g\beta}\left[\int\limits_0^\infty \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\int\limits_0^\lambda H_1(\lambda)\,e^{i\lambda(z-ih)}\,d\lambda+\int\limits_0^\infty H_1(\lambda)\,e^{i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_\lambda \overline{H}_1(\lambda)\,e^{-i\lambda(z-ih)}\,d\lambda\right]-\frac{i\omega\nu^2}{g\beta}\,\overline{H}_1(\nu)\,H_1(\nu)$$

Будем искать потенциал $w_2(z, t)$ в виде

$$w_2(z, t)=w_{21}(z)\cos 2\omega t+w_{22}(z)\sin 2\omega t+w_{20}(z)$$

Тогда для определения w_{2k} $(k=0, 1, 2)$ получим уравнения

$$\frac{dw_{20}}{dz}=-C_1(z),\quad \frac{dw_{21}}{dz}+4i\nu w_{21}=-A(z),\quad \frac{dw_{22}}{dz}+4i\nu w_{22}=-B(z)$$

Решения этих уравнений даются формулами

$$w_{20}=-\int\limits_{-\infty}^{z} C(u)\,du,\quad w_{21}=\left[-\int\limits_{\infty}^{z} e^{4i\nu u}A(u)\,du+C_{21}\right]e^{-4i\nu z}$$

$$w_{22}=\left[-\int\limits_{\infty}^{z} e^{4i\nu u}B(u)\,du+C_{22}\right]e^{-4i\nu z}$$

Функция w_{20} дает комплексный потенциал, не зависящий от времени, т. е. не носящий волнового характера.

Постоянные интеграции C_{21} и C_{22} определяются из условия о том, что волны должны расходиться от начала координат как в положительном направлении оси x, так и в отрицательном. Для этого найдем

$$\lim_{x\to\infty} w_{2k}(x+ih), \qquad \lim_{x\to-\infty} w_{2k}(x+ih) \qquad (k=1,\,2)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left\{w_{21}(x+ih)-\tfrac{1}{2}\nu i\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu x}-C_{21}e^{4\nu h-4i\nu x}\right\}=0\\
&\lim_{x\to\infty}\left\{w_{22}(x+ih)+\tfrac{1}{2}\nu i H_1(\nu)e^{-i\nu x}+C_{22}e^{4\nu h-4i\nu x}\right\}=0\\
&\lim_{x\to-\infty}\left\{w_{21}(x+ih)-\tfrac{1}{2}\nu i\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu x}-[M(\nu)+C_{21}e^{4\nu h}]e^{-4i\nu x}\right\}=0\\
&\lim_{x\to-\infty}\left\{w_{22}(x+ih)+\tfrac{1}{2}\nu i\overline{H}_1(\nu)e^{-i\nu x}-[N(\nu)+C_{22}e^{4\nu h}]e^{-4i\nu x}\right\}=0
\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$M(\nu)=-4\nu^2\pi l e^{-3\nu h}J_1(3\nu l)\overline{H}_1(\nu)-\frac{3\omega\nu i}{g\beta}H_1(\nu)\overline{H}_1(5\nu)$$

$$N(\nu)=-\frac{i\omega}{2\pi^2 g\beta}e^{4\nu h}L+\frac{i\omega}{\pi g\beta}m_1+\frac{4\omega\nu^2 i}{\pi g\beta}m_2+\frac{4\omega\nu i}{\pi g\beta}m_3+\frac{2\omega l}{\pi g}e^{-4\nu h}(m_4+2m_5)$$

$$L=\lim_{x\to-\infty}(-2\pi i)\int_C\overline{v}_0(\zeta)\,d\zeta\int_C v_0\frac{e^{4i\nu\zeta}-e^{4i\nu\overline{\zeta}-8\nu h}}{\zeta-2ih-\overline{\zeta}}\,d\overline{\zeta}$$

$$m_1=\int_{4\nu}^{\infty}\overline{H}_1(\lambda)H_1(\lambda-4\nu)\,d\lambda, \qquad m_2=\text{v. p.}\int_{4\nu}^{\infty}\frac{\overline{H}_1(\lambda)H_1(\lambda-4\nu)}{(\lambda-4\nu)\,(\lambda-\nu)}\,d\lambda$$

$$m_3=\text{v. p.}\int_{4\nu}^{\infty}\frac{\overline{H}_1(\lambda)H_1(\lambda-4\nu)}{\lambda-5\nu}\,d\lambda, \qquad m_4=\int_0^{\infty}J_1[(4\nu-\lambda)\,l]\,\overline{H}_1(\lambda)e^{\lambda h}\,d\lambda$$

$$m_5=\text{v. p.}\int_0^{\infty}\frac{J_1[(4\nu-\lambda)\,l]}{\lambda-\nu}\overline{H}_1(\lambda)e^{\lambda h}\,d\lambda$$

Отметим, что $M(\nu)$ и $N(\nu)$ являются чисто мнимыми выражениями, причем $M(\nu)=0$; когда $J_1(s_k)=0$, где $s_k=\nu l$, можно показать, что $L(\nu)$ является действительным числом; далее $m_k\,(k=1,2,3)$ являются действительными числами, а m_4 и m_5 — мнимыми числами.

Перейдем к определению C_{21} и C_{22}. Из первых двух формул (14) для $x>0$ и достаточно большого имеем

$$w_2(x+ih)\approx C_{21}e^{4\nu h}\cos 2\omega t+C_{22}e^{4\nu h}\sin 2\omega t=D_+e^{2i\omega t}\tag{15}$$

Из третьей и четвертой формул (14) для $x<0$ и достаточно большого по модулю получим

$$w_2(x+ih)\approx[M(\nu)+C_{21}e^{4\nu h}]\cos 2\omega t+[N(\nu)+C_{22}e^{4\nu h}]\sin 2\omega t=D_-e^{-2i\omega t}\tag{16}$$

Сравнивая эти выражения, находим

$$\begin{aligned}
e^{4\nu h}C_{21}&=D_+, \qquad & M(\nu)+C_{21}e^{4\nu h}&=D_-\\
e^{4\nu h}C_{22}&=iD_+, \qquad & N(\nu)+C_{22}e^{4\nu h}&=-iD_-
\end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$D_+=\frac{-M(\nu)-iN(\nu)}{2}, \qquad C_{21}=\frac{-M(\nu)+iN(\nu)}{2}e^{-4\nu h}$$

$$D_-=\frac{M(\nu)+iN(\nu)}{2}, \qquad C_{22}=\frac{-iM(\nu)-N(\nu)}{2}e^{-4\nu h}$$

Ввиду того что $M(\nu)$ и $N(\nu)$ являются чисто мнимыми, то $|D_+| = |D_-|$.

Чтобы получить профиль волн, обратимся к интегралу Коши-Лагранжа (5). Так как

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{y=\delta} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{y=0} + \delta \left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y}\right|_{y=0} + \ldots, \qquad \delta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \text{(в первом приближении)}$$

то на основании этого находим, что уравнение профиля волны будет

$$\delta(x, t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{g^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y} - \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \text{ при } y = 0$$

Если перейти к подвижным координатам, связанным с пластинкой, то согласно (9) получим при $y_1 = h$

$$\begin{aligned}\delta(x, t) = {} & \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\sin\omega t - \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\cos\omega t\right) + \frac{2\omega\beta}{g}(\varphi_{21}\sin 2\omega t - \varphi_{22}\cos 2\omega t) + \\ & + \frac{1}{4g}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{\beta\omega}{2g}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\right) + \\ & + \frac{1}{4g}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\right)^2\right\}\cos 2\omega t - \\ & - \frac{\beta\omega}{2g}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\right)\cos 2\omega t - \frac{1}{2g}\left(3\,\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\,\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}\right)\sin 2\omega t \end{aligned} \tag{17}$$

Исследование формы свободной поверхности представляет значительные трудности, поэтому ограничимся исследованием лишь для $|x|$ достаточно большого.

1. Пусть $x > 0$ и достаточно велико. Как показано в статье Н. Е. Кочина [1]:

$$\overline{v}_{1k}(x + ih) \approx C_{1k}\, e^{-i\nu x} \qquad (k = 1, 2)$$

где

$$C_{11} = i\nu[\overline{H}_1(\nu) - iH_2(\nu)], \qquad C_{22} = -\nu[\overline{H}_1(\nu) - iH_2(\nu)]$$

Замечая, что для случая пластинки, колеблющейся по вертикали, $\overline{H}_2(\nu) = 0$, получим

$$\overline{v}_1(x + ih) \approx 2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)[\cos\nu x - i\sin\nu x]$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} \approx 2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\cos\nu x, \qquad \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y} \approx 2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\sin\nu x$$

Аналогично

$$\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} \approx 2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\sin x, \qquad \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y} \approx -2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\cos\nu x$$

На основании (15) получим, что

$$\varphi_{21}(x + ih)\sin 2\omega t - \varphi_{22}(x + ih)\cos 2\omega t \approx$$

$$\approx \operatorname{Re}\left\{i\,\frac{-M(\nu) + iN(\nu)}{2}\,e^{-i(4\nu x + 2\omega t)} - \frac{\beta\nu}{2}H_1(\nu)\,e^{-i(\nu x + 2\omega t)}\right\}$$

Амплитуда волн типа $e^{-i(4\nu x - 2\omega t)}$ будет

$$A_+ = \frac{\omega\beta}{g}\,|-M(\nu) + iN(\nu)|$$

Если выполняется соотношение $J_1(\nu l) = 0$, то

$$A_+ = \frac{\omega\beta}{g}\,|N(\nu)|$$

В этом случае будут присутствовать лишь волны типа $e^{-i\,(4\nu x+2\omega t)}$. Уравнение свободной поверхности представится в виде

$$
\begin{gathered}
\delta(x,\,t) \approx 2\pi\nu l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\cos(\nu x-\omega t)+\\
+\frac{2\omega\beta}{g}\left[\varphi_{21}(x+ih)\sin 2\omega t-\varphi_{22}(x+ih)\cos 2\omega t\right]+\\
+\pi\nu^2\, l e^{-\nu h} J_1(\nu l)\left[\sin\nu x-\cos\nu x+(\sin\nu x+\cos\nu x)\cos 2\omega t+\right.\\
\left.+\pi\nu l e^{-\nu h} J_1(\nu l)\sin 4\nu x\right]\beta^2
\end{gathered}
\tag{18}
$$

2. Пусть $x<0$ и достаточно велико по модулю. В этом случае

$$
\overline{v}_{1k}(x+ih)\approx\left[C_{1k}-2i\nu\overline{H}_k(\nu)\right]e^{-i\nu x}\qquad (k=1,2)
$$

Так как $\overline{H}_2(\nu)=0$, то

$$
\overline{v}_{11}(x+ih)\approx-i\nu\overline{H}_1(\nu)\,e^{-i\nu x},\quad \overline{v}_{12}(x+ih)\approx-\nu\overline{H}_1(\nu)\,e^{-i\nu x}
$$

Отсюда

$$
\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}\approx-2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\cos\nu x,\qquad \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial y}\approx-2\pi\nu\omega l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\sin\nu x
$$

$$
\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x}\approx\ \ 2\pi\nu l\omega\beta e^{-\nu h} J_1(l\nu)\sin\nu x,\qquad \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}\approx-2\pi\nu l\omega\beta e^{-\nu h} J_1(l\nu)\cos\nu x
$$

Выражение

$$
\varphi_{21}\sin 2\omega t-\varphi_{22}\cos 2\omega t=-\mathrm{Re}\left\{-i\,\frac{M+iN}{2}\,e^{-i\,(4\nu x+2\omega t)}+\frac{\beta\nu}{2}\overline{H}_1(\nu)\,e^{-i(\nu x+2\omega t)}\right\}
$$

Уравнение свободной поверхности получим в виде

$$
\begin{gathered}
\delta(x,\,t)=2\pi\nu l\beta e^{-\nu h} J_1(\nu l)\cos(\nu x+\omega t)+\frac{2\omega\beta}{g}(\varphi_{21}\sin 2\omega t-\varphi_{22}\cos 2\omega t)-\\
-\pi\nu^2\, l e^{-\nu h} J_1(\nu l)\left[\sin\nu x+\cos\nu x-(\cos\nu x-\sin\nu x)\cos 2\omega t+\right.\\
\left.+\pi\nu e^{-\nu h} J_1(\nu l)\sin 4\nu x\right]\beta^2
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Амплитуда волн типа $e^{-i\,(4\nu x+2\omega t)}$ будет

$$
A_-=\frac{\beta\omega}{g}\,|\,M(\nu)+iN(\nu)\,|
$$

Если $J_1(\nu l)=0$, то

$$
A_-=\frac{\beta\omega}{g}\,|\,N(\nu)\,|
$$

Вследствие того что $M(\nu)$ и $N(\nu)$ — чисто мнимые выражения, $A_+=A_-$.

Сравнение выражений (18) и (19) показывает, что образующиеся волны будут симметричны относительно оси y.

Таким образом, учет малых второго порядка дает возможность ответить на вопрос о присутствии волн в том случае, если νl является корнем функции Бесселя J_1. В этом случае по обе стороны от начала координат будут распространяться волны периода $T=\pi/\omega$ и длины волны $\lambda=\pi g/2\omega^2$.

Амплитуда их $A=\beta\omega\,|N(\nu)|/g$, причем A имеет порядок β^2.

Поступила 4 VII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Плоская задача об установившихся колебаниях тел под свободной поверхностью тяжелой несжимаемой жидкости. Известия АН СССР. Техническая серия. 1939. № 4.