Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ПОЛНАЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Бразма (Рига)

1. Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}=\mathbf{Ri}+\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}=\mathbf{Gu}+\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \tag{1}$$

где квадратные матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ порядка $n\,(n>1)$ являются постоянными, симметричными и неотрицательно определенными [1].

П. И. Кузнецов [2], рассматривая случай $n=2$, предполагал полную гиперболичность системы (1). Можно показать, что система (1) оказывается вполне гиперболической для любого n при незначительном условии положительной определенности матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$, которое практически всегда удовлетворено, если не рассматривать особые предельные случаи [1].

2. Будем предполагать матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$ положительно определенными. Для выяснения типа системы (1), как известно [3], надо составить операторную матрицу этой системы

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{L}\dfrac{\partial}{\partial t} & \mathbf{E}_n\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \mathbf{E}_n\dfrac{\partial}{\partial x} & \mathbf{C}\dfrac{\partial}{\partial t}\end{matrix}\right\|$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n, и затем получить характеристическую форму в переменных y и s

$$C(y,s)=\begin{vmatrix}\mathbf{L}s & \mathbf{E}_n y\\ \mathbf{E}_n y & \mathbf{C}s\end{vmatrix}=s^{2n}\begin{vmatrix}\mathbf{L} & \mathbf{E}_n Y\\ \mathbf{E}_n Y & \mathbf{C}\end{vmatrix}\qquad \left(Y=\frac{y}{s}\right)$$

Согласно известной терминологии система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$\begin{vmatrix}\mathbf{L} & \mathbf{E}_n Y\\ \mathbf{E}_n Y & \mathbf{C}\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

вещественны.

3. Воспользуемся следующей, повидимому, известной леммой, простейшее доказательство которой указал автору Э. Я. Риекстыньш.

Лемма 1. Для произвольных симметричных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ существует равенство

$$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}_n\lambda\\ \mathbf{E}_n\lambda & \mathbf{B}\end{vmatrix}=|\mathbf{AB}-\mathbf{E}_n\lambda^2| \tag{3}$$

Доказательство. Как известно, характеристические числа квадрата матрицы равны квадратам характеристических чисел исходной матрицы. Поэтому, если $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{2n}$ суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix}-\mathbf{E}_n\lambda & -\mathbf{A}\\ -\mathbf{B} & -\mathbf{E}_n\lambda\end{vmatrix}=0$$

то из равенства

$$\left\|\begin{matrix}0 & -\mathbf{A}\\ -\mathbf{B} & 0\end{matrix}\right\|^2=\left\|\begin{matrix}\mathbf{AB} & 0\\ 0 & \mathbf{BA}\end{matrix}\right\|$$

следует, что уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AB} - \mathbf{E}_n \lambda & 0 \\ 0 & \mathbf{BA} - \mathbf{E}_n \lambda \end{vmatrix} = |\mathbf{AB} - \mathbf{E}_n \lambda|^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_{2n}^2$. Уравнение

$$|\mathbf{AB} - \mathbf{E}_n \lambda^2| = 0$$

имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$, откуда следует равенство (3) после сравнения коэффициентов у высших степеней λ на обеих сторонах этого равенства.

4. На основании леммы 1 система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$|\mathbf{LC} - \mathbf{E}_n Y^2| = 0 \tag{4}$$

вещественны или же если все корни уравнения

$$|\mathbf{LC} + \mathbf{E}_n Z^2| = 0 \tag{5}$$

чисто мнимы. Затем на основании той же леммы 1 имеем

$$|\mathbf{L}(-\mathbf{C}) - \mathbf{E}_n Z^2| = \begin{vmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{E}_n Z \\ \mathbf{E}_n Z & -\mathbf{C} \end{vmatrix}$$

После этого переменим знаки на обратные у последних n строк детерминанта правой части равенства и, наконец, поменяем местами первый столбец этого детерминанта с $n+1$-м столбцом, второй столбец — с $n+2$-м и т. д. Таким образом, получим

$$|-\mathbf{LC} - \mathbf{E}_n Z^2| = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_n Z & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n Z \end{vmatrix}$$

Следовательно, система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n Z & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n Z \end{vmatrix} = 0$$

или уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & \lambda\mathbf{L} \\ \lambda\mathbf{C} & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(\lambda = \frac{1}{Z}\right) \tag{6}$$

с неизвестным λ чисто мнимы.

Мнимость корней уравнения (6) мы докажем следующим образом. На основании замечания к теореме 3 предыдущей работы [1] корни уравнения (6) имеют неположительную вещественную часть. После подстановки $\lambda = -\mu$ в то же уравнение и перемены знаков на обратные у последних n столбцов и последних n строк детерминанта получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & \mu\mathbf{L} \\ \mu C & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0$$

корни которого также имеют неположительную вещественную часть. Таким образом, корни исходного уравнения (6) имеют одновременно неотрицательную и неположительную вещественные части, и, следовательно, эти корни чисто мнимы.

Из предыдущего имеем следующую теорему.

Теорема. При положительно определенных матрицах $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{C}$ *обобщенная система телеграфных уравнений является вполне гиперболической.*

5. Вещественность всех корней уравнения (4) мы докажем еще другим путем. Эта вещественность означает, что все характеристические числа матрицы $\mathbf{LC}$ положительны, для подтверждения чего рассмотрим следующую лемму, доказательство которой сообщил автору М. А. Наймарк.

Лемма 2. Если **A** и **B** — симметричные положительно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы **AB** положительны.

Доказательство. Матрицу **A** приведем ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\,\mathbf{S}^{-1}, \qquad \lambda_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{S}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}]\,\mathbf{S}^{-1}$$

причем условимся брать, например, $\sqrt{\lambda_k} > 0 \quad (k=1, \ldots, n)$.

Матрица **D** тоже является симметричной, ибо она оказывается равной своей транспонированной матрице. Произведение **AB** преобразуем так:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{DD})\,\mathbf{B}\,(\mathbf{DD}^{-1}) = \mathbf{D}\,(\mathbf{DBD})\,\mathbf{D}^{-1}$$

Тогда матрица **DBD** тоже оказывается симметричной, и мы можем привести ее ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$\mathbf{DBD} = \mathbf{T}[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,\mathbf{T}^{-1}$$

С другой стороны, из положительной определенности матрицы **B**, т. е. положительной определенности квадратичной формы $(\mathbf{Bu}, \mathbf{u})$, следует после линейного преобразования $\mathbf{u} = \mathbf{Dv}$ положительная определенность преобразованной квадратичной формы:

$$\mathbf{Bu} \cdot \mathbf{u} = ([\mathbf{DBD}]\,\mathbf{v}) . \mathbf{v} > 0$$

Таким образом, матрица **DBD** тоже является положительно определенной, и поэтому $\mu_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Наконец, произведение **AB** преобразуем к виду

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{DT})\,[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,(\mathbf{DT})^{-1} \tag{7}$$

и, следовательно, положительные числа μ_k $(k = 1, \ldots, n)$ оказываются характеристическими числами матрицы **AB**, чем доказана лемма.

Замечание 1. Если **A** и **B** симметричные неотрицательно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы **AB** вещественны и неотрицательны. Это утверждение вытекает из леммы 2 при помощи предельного перехода, причем приходится воспользоваться свойством, что корни характеристического уравнения матрицы **AB**, как и всякого алгебраического уравнения с постоянным коэффициентом у старшей степени неизвестной, непрерывно зависят от коэффициентов уравнения.

Замечание 2. Если среди матриц **A** и **B** одна является неотрицательно определенной, а вторая — положительно определенная, то матрицу **AB** можно привести к диагональному виду. Доказательство этого утверждения, в случае предположения положительной определенности матрицы **A**, следует непосредственно из формулы (7). Аналогичным способом доказывается это утверждение также в случае предположения положительной определенности матрицы **B**.

Замечание 3. Можно доказать еще такое свойство: Если **A** и **B** неотрицательно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы **AB** заключены между произведением наименьших характеристических чисел матриц **A** и **B** и произведением наибольших характеристических чисел тех же матриц.

Поступила 3 I 1951

Латвийский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д. Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 4.
2. Кузнецов П. И. Распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных однопроводных линий. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 2.
3. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. М. 1945. Т. II.