Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Бразма, А. Д. Мышкис
(Рига)

В центре настоящей работы лежит тождество (1.3), которое с физической точки зрения означает запись закона сохранения энергии. Из этого тождества вытекают единственность решения смешанной задачи и затухание решений, полученных методом разделения переменных. Математический вывод этих утверждений, сделанный А. Д. Мышкисом, составляет содержание § 1. Физическое истолкование полученных результатов и проверка выполнения условий теорем для электромагнитных процессов в пучках проводов даны в § 2; он написан Н. А. Бразма.

§ 1. Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений, записанную в матричном виде:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ являются постоянными и симметричными[1]. От всех функций, составляющих решение

$$u_1(x, t), \ \ldots, \ u_n(x, t), \ i_1(x, t), \ \ldots, \ i_n(x, t) \qquad (n \geqslant 1)$$

будем требовать существование и непрерывную дифференцируемость в частично замкнутой области P:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \qquad 0 \leqslant t < T \qquad (0 < l < \infty, \ 0 < T \leqslant \infty)$$

Граничные условия поставим такие:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l \tag{1.2}$$

Теорема 1. Для любого решения системы (1.1), удовлетворяющего граничным условиям (1.2), выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^l [\mathbf{C}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}]\,dx = -\int_0^l [\mathbf{G}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{R}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}]\,dx \qquad (0 \leqslant t < T) \tag{1.3}$$

Доказательство. Вспомнив, что для симметричной матрицы $\mathbf{A}$ всегда $\mathbf{A}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\mathbf{b}$, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^l [\mathbf{C}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{L}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}]\,dx = \int_0^l \left[\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}\cdot\mathbf{i}\right]dx =$$

$$= -\int_0^l \left[\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{R}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\right]dx =$$

[1] Все участвующие величины считаются конечными и вещественными, если не оговорено противное.

$$= -\mathbf{i}\cdot\mathbf{u}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l [\mathbf{Gu}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{Ri}\cdot\mathbf{i}]\,dx = -\int_0^l [\mathbf{Gu}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{Ri}\cdot\mathbf{i}]\,dx$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Теорема 1 верна и при следующих, более общих граничных условиях: при любом $r = 1, \ldots, n$ для $x = 0$ и для $x = l$ приравнено нулю u_r или i_r.

Впредь считаем матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ неотрицательно определенными.

Теорема 2. Единственность решения смешанной задачи. Пусть из матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{G}$ хотя бы одна является положительно определенной; пусть матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$ обладают тем же свойством. Пусть, далее, даны два решения $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{i}_2$ системы (1.1), причем

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \quad \text{при } t = 0, \qquad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{при } x = 0,\ x = l$$

Тогда

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{i}_1 \equiv \mathbf{i}_2 \qquad \text{в области } P$$

Доказательство. Обозначим $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}$. Тогда в силу неотрицательной определенности матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ правая часть тождества (1.3) неположительна, а потому выражение

$$\int_0^l [\mathbf{Cu}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{Li}\cdot\mathbf{i}]\,dx$$

с ростом t не возрастает; значит, равное нулю при $t = 0$ и неотрицательное, оно тождественно равно нулю. Поэтому тождество (1.3) дает

$$\int_0^l [\mathbf{Cu}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{Ri}\cdot\mathbf{i}]\,dx \equiv 0$$

Из неотрицательной определенности всех матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ имеем

$$\mathbf{Cu}\cdot\mathbf{u} \equiv 0, \quad \mathbf{Li}\cdot\mathbf{i} \equiv 0, \quad \mathbf{Gu}\cdot\mathbf{u} \equiv 0, \quad \mathbf{Ri}\cdot\mathbf{i} \equiv 0 \quad \text{в области } P \tag{1.4}$$

Утверждение теоремы 2 следует теперь из упомянутой в формулировке положительной определенности матриц.

Замечание 1. Теорема 2, очевидно, верна и для граничных условий, описанных в замечании к теореме 1, и соответствующих неоднородных граничных условий, а также для соответствующих неоднородных систем дифференциальных уравнений.

Замечание 2. Пусть $\mathbf{i} \equiv 0$. Тогда из системы (1.1) получим, что $\mathbf{u}$ зависит только от t. Значит, при краевых условиях (1.2) будет и $\mathbf{u} \equiv 0$. Поэтому при таких краевых условиях для единственности решения смешанной задачи достаточна положительная определенность только одной из двух матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$. То же получится и при краевых условиях, описанных в замечании к теореме 1, если только для каждого $r = 1, \ldots, n$ либо $(u_r)_{x=0}$, либо $(u_r)_{x=l}$ приравнено нулю. Нетрудно рассмотреть аналогичным образом и случай $\mathbf{u} \equiv 0$.

Для дальнейшего отметим частный случай, когда $\mathbf{u}$, $\mathbf{i}$ имеют вид:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{j}(t)\cos\frac{k\pi x}{l} \qquad \text{в области } P$$

где k — натуральное число. Тогда

$$\int_0^l \mathbf{Cu}\cdot\mathbf{u}\,dx = \int_0^l \left(\mathbf{Cv}\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\sin\frac{k\pi x}{l}\right)dx = \int_0^l (\mathbf{Cv}\cdot\mathbf{v})\sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2}(\mathbf{Cv}\cdot\mathbf{v})$$

Прочие интегралы в тождестве (1.3) выражаются аналогично, и потому это тождество принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,[\mathbf{Cv}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{Lj}\cdot\mathbf{j}] = -\,[\mathbf{Gv}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{Rj}\cdot\mathbf{j}] \tag{1.5}$$

Система (1.1) переходит в такую:

$$-\frac{k\pi}{l}\,\mathbf{v} = \mathbf{Rj} + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{j}}{dt}, \qquad \frac{k\pi}{l}\,\mathbf{j} = \mathbf{Gv} + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{1.6}$$

Краевые условия (1.2) удовлетворяются автоматически, и поэтому тождество (1.5) справедливо для всех непрерывно дифференцируемых на участке $[0, T)$ решений системы (1.6).

Вспомнив о неотрицательной определенности матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$, получим в результате интегрирования тождества (1.5)

$$\int_0^T [\mathbf{Gv}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] + [\mathbf{Rj}(t)\cdot\mathbf{j}(t)]\,dt \leqslant \frac{1}{2}\,[\mathbf{Cv}(0)\cdot\mathbf{v}(0) + \mathbf{Lj}(0)\cdot\mathbf{j}(0)] \tag{1.7}$$

Будем теперь искать решение системы (1.6) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}e^{\lambda t}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{b}e^{\lambda t} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.8}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные колонные матрицы (быть может, комплексные), λ — комплексное постоянное. Тогда эта система перейдет в такую (алгебраическую):

$$-\frac{k\pi}{l}\,\mathbf{a} = \mathbf{Rb} + \lambda\,\mathbf{Lb}, \qquad \frac{k\pi}{l}\,\mathbf{b} = \mathbf{Ga} + \lambda\,\mathbf{Ca} \tag{1.9}$$

Чтобы полученная система $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ имела ненулевое решение, необходимо и достаточно обращение в нуль определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{k\pi}{l}\,\mathbf{E}_n & \mathbf{R} + \lambda\mathbf{L} \\ \mathbf{G} + \lambda\mathbf{C} & -\frac{k\pi}{l}\,\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0 \tag{1.10}$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n.

Теорема 3. Затухание решений, полученных методом разделения переменных. Все корни уравнения (1.10) имеют неположительную вещественную часть. Если же по крайней мере одна из матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ является положительно определенной, то все корни этого уравнения имеют отрицательную вещественную часть.

Доказательство. Первое утверждение следует из второго, так как неотрицательно определенную матрицу при помощи произвольно малого изменения элементов можно сделать положительно определенной, а корни уравнения (1.10), как и всякого алгебраического уравнения, непрерывно зависят от его коэффициентов.

Пусть теперь $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ является положительно определенной, а уравнение (1.10) имеет решение $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, где $\alpha_0 \geqslant 0$. Тогда подставим

$\lambda = \lambda_0$ в (1.9) и найдем соответствующее нетривиальное решение $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ этой системы. Если после этого отделить в (1.8) вещественную часть от мнимой, то мы получим ненулевое решение системы (1.6), причем каждая из функций $v_r(t)$ и $j_r(t)$ $(r = 1, \ldots, n)$ представляет собой линейную комбинацию функций $e^{\alpha_0 t} \cos \beta_0 t$, $e^{\alpha_0 t} \sin \beta_0 t$.

Из системы (1.6) получаем, что для нетривиального ее решения будет $\mathbf{j} \not\equiv 0$ и $\mathbf{v} \not\equiv 0$. Поэтому в силу предположения о матрицах $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ построенное нами решение обращает в бесконечность левую часть неравенства (1.7), если положить $T = \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему 3. Эта теорема дает ответ на вопрос, неявно поставленный в п. 3 статьи [1].

Замечание. Если нам даны какие-нибудь симметричные неотрицательно определенные матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$, то всегда можно построить систему обобщенных телеграфных уравнений (1.1), положив в ней $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{A}_2$, $\mathbf{G} = \mathbf{A}_3$ и $\mathbf{C} = \mathbf{A}_4$. Затем, применяя к полученной системе теорему 3 при $l = \pi$ и $k = 1$, мы получим следующее чисто алгебраическое утверждение.

При наших предположениях о матрицах $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$ все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 + \lambda \mathbf{A}_4 & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0 \tag{1.11}$$

имеют неположительную вещественную часть; если же, кроме того, по крайней мере одна из матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_3$ является положительно определенной, то все корни уравнения (1.11) имеют отрицательную вещественную часть.

§ 2. Рассмотрим матрицы, имеющие такие выражения [2]:

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} L_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \ldots & M_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & L_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} C_1 & -C_{12} & \ldots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_2 & \ldots & -C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \ldots & C_n \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G_1 & -G_{12} & \ldots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_2 & \ldots & -G_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \ldots & G_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & R_n \end{Vmatrix}$$

Здесь L_k обозначает самоиндукцию k-го провода пучка, а M_{ks} — взаимную индукцию между проводами k и s, рассчитанные на единицу длины пучка. По физическим соображениям мы имеем $M_{ks} = M_{sk}$, т. е. $\mathbf{L}$ — симметричная матрица (матрица индуктивности). Выражение для C_k будет иметь следующий вид

$$C_k = C_k' + \sum_{s=1}^{n}{}' C_{ks} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

причем штрих у суммы здесь и впоследствии означает, что слагаемое с равными значками не берется. При этом C_k' обозначает емкость между k-м проводом и землей, а C_{ks} — емкость между проводами k и s, рассчитанные на единицу длины пучка.

По физическим соображениям [3] имеем $C_{ks} = C_{sk}$, т. е. $\mathbf{C}$ — тоже симметричная матрица (матрица емкости).

Подобным образом G_k имеет выражение

$$G_k = G_k' + \sum_{s=1}^{n}{}' G_{ks} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

причем G_k' обозначает проводимость изоляции между k-м проводом и землей, а G_{ks} — проводимость изоляции между проводами k и s, рассчитанные на единицу длины пучка. Очевидно, мы имеем $G_{sk} = G_{ks}$, и поэтому $\mathbf{G}$ — также симметричная матрица (матрица проводимости изоляции). Наконец, R_k обозначает омическое сопротивление k-го провода пучка ($\mathbf{R}$ — матрица сопротивления).

Затем мы убедимся в том, что предположение относительно неотрицательной определенности матриц § 1 действительно удовлетворено. Кроме того, получим некоторые условия, при которых эти матрицы положительно определенны.

Условимся записывать положительную (неотрицательную) определенность матрицы $\mathbf{A}$ так: $\mathbf{A} > 0$ $(\geqslant 0)$. Мы имеем $\mathbf{C} \geqslant 0$ и $\mathbf{L} \geqslant 0$, так как квадратичные формы $\mathbf{Cu} \cdot \mathbf{u}$ и $\mathbf{Li} \cdot \mathbf{i}$ выражают удвоенные энергии соответственно электрического и магнитного полей пучка проводов [3, 4], рассчитанные на единицу длины пучка, и поэтому должны быть эти квадратичные формы неотрицательно определенными.

Свойство $\mathbf{C} \geqslant 0$ выясняется также другим способом. Ввиду формулы (2.1) квадратичная форма $\mathbf{Cu} \cdot \mathbf{u}$ приводится после перегруппировки членов к следующей сумме неотрицательных членов:

$$\mathbf{Cu} \cdot \mathbf{u} = \sum_{r=1}^{n} C_r' u_r^2 + \sum_{r<s} C_{rs} (u_r - u_s)^2 \tag{2.3}$$

причем член $C_r' u_r^2$ интерпретируется как удвоенная энергия электрического поля между проводом r и землей, рассчитанная на единицу длины пучка, а член $C_{rs} (u_r - u_s)^2$ выражает удвоенную энергию поля между проводами r и s, также рассчитанную на единицу длины.

Из разложения (2.3) следует $\mathbf{C} > 0$, кроме следующих предельных случаев, в которых $\mathbf{C} \geqslant 0$:

а) часть пучка проводов не имеет емкости по отношению к земле и остальным проводам пучка или

б) весь пучок проводов не имеет емкости по отношению к земле.

Оба этих случая объединяются таким условием:

$$C_{r_p}' = C_{r_p s} = 0 \qquad (1 \leqslant r_p \leqslant n, \; p = 1, \ldots, m; \; s \neq r_1, \ldots, r_m)$$

Подобным образом получается $\mathbf{G} > 0$ $(\geqslant 0)$. Именно ввиду формулы (2.2) мы имеем приведение квадратичной формы $\mathbf{Gu} \cdot \mathbf{u}$ к сумме неотрицательных членов:

$$\mathbf{Gu} \cdot \mathbf{u} = \sum_{r=1}^{n} G_r' u_r^2 + \sum_{r<s} G_{rs} (u_r - u_s)^2 \tag{2.4}$$

Здесь член $G_r' u_r^2$ интерпретируется как мощность тепловой энергии, выделяемой ввиду проводимости изоляции между проводом r и землей, а член $G_{rs}(u_r - u_s)^2$ выражает мощность энергии, выделяемой между проводами r и s. (Все рассчитывается на единицу длины пучка проводов.)

Из разложения (2.4) следует $\mathbf{G} > 0$, кроме следующих предельных случаев, в которых $\mathbf{G} \geqslant 0$: а) часть пучка проводов идеально изолирована от земли и остальных проводов пучка или б) весь пучок проводов идеально изолирован от земли. Оба этих случая объединяются таким условием:

$$G_{r'_p}' = G_{r'_p s} = 0 \qquad (1 \leqslant r_p' \leqslant n,\ p = 1, \ldots, m';\ s \neq r_1', \ldots, r'_{m'})$$

Наконец, свойство $\mathbf{R} > 0$ ($\geqslant 0$) очевидно. В выражении

$$\mathbf{Ri} \cdot \mathbf{i} = \sum_{s=1}^{n} R_s i_s^2$$

член $R_s i_s^2$ означает мощность тепловой энергии, выделяемой в проводе s и рассчитанной на единицу длины пучка. Если хотя бы один провод s пучка является идеальным проводником (т. е. $R_s = 0$), то $\mathbf{R} \geqslant 0$. При отсутствии же идеальных проводников в пучке мы имеем $\mathbf{R} > 0$.

Формула (1.3) утверждает, что уменьшение в единицу времени суммы энергий электрического и магнитного полей всего пучка проводов равно сумме мощностей тепловых энергий, выделяемых в изоляции и проводах пучка. Еще удобнее получается это физическое истолкование после умножения вышеуказанной формулы на dt:

$$d\left\{\frac{1}{2}\int_0^l [\mathbf{Cu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Li} \cdot \mathbf{i}]\, dx\right\} = -\left\{\int_0^l [\mathbf{Gu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Ri} \cdot \mathbf{i}]\, dx\right\} dt \qquad (2.5)$$

Именно, *уменьшение в промежуток времени dt суммы энергий электрического и магнитного полей пучка проводов равно сумме тепловых энергий, выделяемых в тот же промежуток времени в изоляции и проводах пучка.* Это выражает закон сохранения энергии пучка проводов при отсутствии перетока энергии через концы пучка. Последнее же будет, если на концах пучка u_r или i_r равно нулю при любом $r = 1, \ldots, n$ для $x = 0$ и для $x = l$, что совпадает с требованием в замечании к теореме 1.

В заключение отметим еще следующее. Затухание решений в теореме 3 при положительной определенности матриц $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ является следствием выделения тепловой энергии соответственно в изоляции или проводах пучка, и таким образом это затухание вполне естественно.

Поступила 3 I 1951

Латвийский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А. Решение основной задачи распространения электромагнитных процессов в многопроводной системе. ДАН СССР. 1949. Т. LXIX. № 3.
2. Коваленков В. И. Теория передачи по линиям электросвязи. М. 1937. Т. I. Стр. 138—141.
3. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники. Ч. III. Л.—М. 1948. Стр. 94—99, 313.
4. Pipes L. Matrix theory of multiconductor transmission lines. Phil. Mag. 1937. Vol. XXIV. P. 97—113.