Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ, ПРИМЕНИМЫХ К РЕШЕНИЮ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Я. Риекстыньш

(Рига)

В работах П. И. Кузнецова [1, 2, 3] дано решение телеграфных уравнений при помощи некоторых специальных функций от двух аргументов, именно функций Ломмеля от двух мнимых аргументов.

Ниже исследуются специальные функции от двух аргументов, которые получаются из функций, рассмотренных П. И. Кузнецовым, заменой независимых переменных двумя новыми аргументами. Такая замена упрощает теорию этих функций.

Сперва (§ 1) получены некоторые общие свойства исследуемых специальных функций. Среди них имеются также существенно новые свойства. При этом особое значение для решения телеграфных уравнений имеет дифференциальное уравнение (1.15) со смешанной частной производной второго порядка, которому удовлетворяют функции, рассмотренные в этой работе. Затем (§ 2) получено решение основной задачи телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа, пользуясь рассмотренными специальными функциями. Это решение получено проще, чем аналогичное решение П. И. Кузнецова для той же задачи [1]. Наконец (§ 3), получены асимптотические представления рассматриваемых функций.

§ 1. Общие свойства рассматриваемых специальных функций.

1°. При исследованиях дифракции Ломмель пользовался функциями

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z)$$
$$V_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{-\nu-2m} J_{-\nu-2m}(z) \qquad (1.1)$$

которые впоследствии названы функциями Ломмеля от двух аргументов и встречаются в некоторых задачах физики [4].

П. И. Кузнецов [2] рассмотрел функции, выражаемые через функции Ломмеля от двух мнимых аргументов:

$$\Upsilon_n(w, z) = i^{-n} U_n(iw, iz), \quad \Theta_n(w, z) = i^{-n} V_n(iw, iz) \quad (n \text{ — целое число}) \qquad (1.2)$$

при помощи которых он получил решения телеграфных уравнений [1, 2, 3].

По определению функций $U_n(w, z)$ и $V_n(w, z)$ имеем

$$\Upsilon_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z), \quad \Theta_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z) \qquad (1.3)$$

Исследуем специальные функции от двух аргументов, которые получаются из функций, рассмотренных Кузнецовым, введением новых независимых переменных:

$$u_n(x,\ y) = \Upsilon_n(2x,\ 2\sqrt{xy}) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(2\sqrt{xy}) \tag{1.4}$$

$$v_n(x,\ y) = \Theta_n(2x,\ 2\sqrt{xy}) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(2\sqrt{xy}) \tag{1.5}$$

Очевидно, мы имеем

$$v_n(x,\ y) = u_n(y,\ x) \tag{1.6}$$

и поэтому можем довольствоваться рассмотрением одной из этих функций. Впоследствии будем исследовать функцию $u_\nu(x,\ y)$ при любом вещественном значке ν, которую определим рядом (1.4) с заменой n на ν.

Заметим, что соотношение (1.6) равносильно известной формуле [2]

$$\Upsilon_n(w,\ z) = \Theta_n(z^2/w,\ z)$$

2°. Разложим каждый член ряда (1.4) после замены n на ν в степенной ряд:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}(2\sqrt{xy}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xy)^k x^{\nu+2m}}{k!\,\Gamma(k+\nu+2m+1)} \tag{1.7}$$

Перегруппировав затем члены повторного ряда, получаем при $\nu \neq -n$ (n — целое положительное) разложение по степеням y:

$$u_\nu(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^k}{k!}\, r_{k+\nu}(x) \tag{1.8}$$

где обозначено

$$r_{k+\nu}(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+k+2i}}{\Gamma(2i+\nu+k+1)}$$

Если же $\nu = -n$, то после перегруппировки членов и некоторых преобразований имеем

$$u_{-n}(x,\ y) = \begin{cases}\operatorname{sh}(x+y) - u_{n+2}(y,\ x) & \text{(при нечетном } n)\\ \operatorname{ch}(x+y) - u_{n+2}(y,\ x) & \text{(при четном } n)\end{cases} \tag{1.9}$$

Формулы (1.9) уже известны для функций $\Upsilon_{-n}(w, z)$ и $\Theta_{-n}(w, z)$ [2]. Они оказываются правильными при любом целом n.

Перегруппировав другим образом члены того же повторного ряда, при $\nu \neq -n$ получим разложение по степеням x:

$$u_\nu(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)}\, h_k(y) \tag{1.10}$$

где

$$h_k(y) = \begin{cases}1 + \frac{1}{2!}y^2 + \cdots + \frac{1}{k!}y^k & \text{(при четном } k)\\ y + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots + \frac{1}{k!}y^k & \text{(при нечетном } k)\end{cases}$$

Если же $\nu = -n$, то имеем

$$u_{-n}(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\, h_{n+k}(y) \tag{1.11}$$

Ввиду неравенства $|h_k(y)| \leqslant e^{|y|}$ ряды (1.10) и (1.11) абсолютно сходятся при всех x и y, кроме $x = 0$ при $\nu < 0$ $(\nu \neq -n)$, чем оправдывается[5] перегруппирование членов в ряде (1.4). Пользуясь рядами (1.4), (1.8), (1.10) и (1.11), можно получить все те свойства функций $u_\nu(x, y)$, которые соответствуют известным[2] свойствам функций $\Upsilon_n(w, z)$ и $\Theta_n(w, z)$, например,

$$u_{\nu+2}(x, y) = u_\nu(x, y) - \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^\nu I_\nu(2\sqrt{xy})$$

$$u_{2n}(x, x) = \frac{1}{2}[I_0(2x) + \operatorname{ch}(2x)] - \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k}(2x)$$

$$u_{2n+1}(x, x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x - \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1}(2x)$$

$$u_{2n}(x, 0) = \operatorname{ch} x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad u_{2n+1}(x, 0) = \operatorname{sh} x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$u_\nu(0, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = 0 \\ 0 & \text{при } \nu > 0 \end{cases} \qquad \lim_{\nu \to \infty} u_\nu(x_0, y_0) = 0$$

3°. Из разложений (1.7) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}(2\sqrt{xy})\right] &= \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m-1} I_{\nu+2m-1}(2\sqrt{xy}) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}(2\sqrt{xy})\right] &= \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m+1} I_{\nu+2m+1}(2\sqrt{xy}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} u_\nu(x, y) = u_{\nu-1}(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} u_\nu(x, y) = u_{\nu+1}(x, y) \tag{1.13}$$

Из формул (1.13) и определения функций $u_\nu(x, y)$ следуют уравнения, которым удовлетворяют эти функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} - u_\nu &= \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu-2} I_{\nu-2}(2\sqrt{xy}) \\ \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial y^2} - u_\nu &= -\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu} I_\nu(2\sqrt{xy}) \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x \partial y} - u_\nu = 0 \tag{1.15}$$

При помощи формул (1.13) получается разложение в ряд Тейлора:

$$u_\nu(x, y + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} u_{\nu+k}(x, y) \tag{1.16}$$

После перегруппировки членов последнего ряда имеем еще

$$u_\nu(x, y + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+k} I_{\nu+k}(2\sqrt{xy})\, h_k(\alpha) \tag{1.17}$$

Подобным образом можно получить

$$u_\nu(x+\alpha,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}u_{\nu-k}(x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu-k}I_{\nu-k}(2\sqrt{xy})\,r_k(\alpha) \quad (1.18)$$

4°. Некоторые свойства функций $u_\nu(x,\ y)$, а также и соотношения между функциями $u_\nu(x,\ y)$ и другими специальными функциями можно получить при помощи преобразования Лапласа.

Пользуясь рядами (1.4), (1.8), (1.10) или (1.11), получаем преобразования Лапласа функций $u_\nu(x,\ y)$ (при $\nu>-1$) по переменной $x\geqslant 0$

$$\int_0^\infty e^{-px}u_\nu(x,y)\,dx=\boldsymbol{L}_x\{u_\nu(x,\ y)\}=\frac{e^{y/p}}{p^{\nu-1}(p^2-1)} \quad (1.19)$$

$$\boldsymbol{L}_x\{u_{-n}(x,y)\}=\frac{p^{n+1}}{p^2-1}e^{y/p}-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}h_k(y) \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{L}_x\{u_\nu[\alpha(x-\tau),\ \beta(x+\tau)]\,h(x-\tau)\}=\frac{1}{2}e^{-\tau\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}{2\beta}\right)^\nu\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}+\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right] \quad (1.21)$$

где

$$h(x-\tau)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\tau\\ 1 & \text{при } x>\tau\end{cases}$$

Из формулы (1.21) при $\tau=0$ имеем

$$\boldsymbol{L}_x\{u_\nu(\alpha x,\ \beta x)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}{2\beta}\right)^\nu\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}+\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right] \quad (1.22)$$

и, кроме того, при $\alpha=\beta=1$

$$\boldsymbol{L}_x\{u_\nu(x,\ x)\}=\frac{1}{p^2-4}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4}}{2}\right)^{\nu-1} \quad (1.23)$$

$$\boldsymbol{L}_x\{u_\nu(x-\tau,\ x+\tau)\,h(x-\tau)\}=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-4}}}{p^2-4}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4}}{2}\right)^{\nu-1} \quad (1.24)$$

Преобразование Лапласа по y при целом ν можно получить, пользуясь формулой (1.9). По известным формулам и правилам преобразования Лапласа [6, 7] можно найти многие соотношения между функциями u_ν и другими специальными функциями, среди которых укажем

$$u_\nu(x,\ y)=\begin{cases}\int_0^x(\sqrt{t/y})^{\nu-2}I_{\nu-1}(2\sqrt{ty})\,\mathrm{sh}(x-t)\,dt & (\nu>1)\\ \int_0^x(\sqrt{t/y})^{\nu-1}I_{\nu-1}(2\sqrt{ty})\,\mathrm{ch}(x-t)\,dt & (\nu>0)\end{cases} \quad (1.25)$$

$$u_\nu(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x u_{\nu-\mu}(t,\ y)(x-t)^{\mu-1}\,dt \quad \begin{pmatrix}\nu>\mu-1\\ \mu>0\end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$u_\nu(x,\ y)=\begin{cases}\int_0^x[u_{\nu-2}(t,\ y)+u_\nu(t,\ y)]\sin(x-t)\,dt & (\nu>1)\\ \int_0^x[u_{\nu-1}(t,\ y)+u_{\nu+1}(t,\ y)]\cos(x-t)\,dt & (\nu>0)\end{cases} \quad (1.27)$$

$$u_\nu(\alpha x,\ \beta x) = \alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu-1}\int_0^x I_{\nu-1}(2t\sqrt{\alpha\beta})\,\mathrm{ch}\,[(\alpha+\beta)(x-t)]\,dt -$$

$$-\beta\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu}\int_0^x I_\nu(2t\sqrt{\alpha\beta})\,\mathrm{sh}\,[(\alpha+\beta)(x-t)]\,dt \qquad (\nu>0) \qquad (1.28)$$

$$u_\nu(x,\ y) = \frac{1}{2}e^y\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} + x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}L_k^\nu(x)\Big] + \qquad (\nu>-1)$$

$$+\frac{1}{2}e^{-y}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} + x^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}L_k^\nu(-x)\Big]$$

$$(1.29)$$

$$u_\nu(x,\ y) = \frac{1}{2}e^y\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+k-1}}{\Gamma(\nu+k)} + x^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu)}L_k^{\nu-1}(x)\Big] - \qquad (\nu>0)$$

$$-\frac{1}{2}e^{-y}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{\nu+k-1}}{\Gamma(\nu+k)} + x^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu)}L_k^{\nu-1}(-x)\Big]$$

где $L_k^\nu(x)$ обозначает обобщенный полином Лягерра

$$L_k^\nu(x) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k+\nu}{k-m}\frac{(-x)^m}{m!}$$

Пользуясь неравенством $x^\nu L_k^\nu(x) < x^\nu L_k^\nu(-x) < (1+x)^{k+1}$, существующем при $x>0$, можно получить мажорантный ряд

$$(1+x)^{\nu-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y+xy)^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

для рядов, содержащих обобщенные полиномы Лягерра в формулах (1.29), причем этот мажорантный ряд сходится при всех конечных значениях $x>0$ и y. Поэтому ряды в формулах (1.29) сходятся. Если, в частности, ν — целое, первые ряды в квадратных скобках формулы (1.29) можно выразить через элементарные функции, после чего эти формулы можно использовать для нахождения численных значений функций u_n.

§ 2. Решение телеграфных уравнений при помощи рассмотренных специальных функций. 1°. Уравнение (1.15) дает некоторые указания на связь функций u_ν с телеграфными уравнениями, так как это уравнение является преобразованным телеграфным уравнением.

Более общее формальное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = v \qquad (2.1)$$

получается в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty}a_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{k+\nu}I_{k+\nu}(2\sqrt{xy}) + \sum_{k=0}^{\infty}b_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{k+\nu}I_{k+\nu}(2\sqrt{xy}) \qquad (2.2)$$

так как на основании формул (1.12) отдельные члены рядов (2.2) удовлетворяют уравнению (2.1). При этом ν остается произвольным. Еще более общее решение уравнения (2.1) можно получить суммированием выражения (2.2) по ν. После преобразования независимых переменных оказывается, что обычное телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + RGv \qquad (LC \neq 0) \tag{2.3}$$

в котором $v(x, t)$ означает напряжение $u(x, t)$ или силу тока $i(x, t)$, обладает формальным решением следующего вида:

$$v = e^{-\rho t}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{t-\omega x}{t+\omega x}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\left(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2}\right) + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{t+\omega x}{t-\omega x}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\left(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2}\right)\Bigg] \tag{2.4}$$

где

$$\rho = \frac{RC+LG}{2LC}, \qquad \sigma = \frac{RC-LG}{2LC}, \qquad \omega = \sqrt{LC}$$

и еще может быть выполнено суммирование по ν.

Коэффициенты $a_{k\nu}$ и $b_{k\nu}$ и значки ν следует найти из начальных и граничных условий. Однако мы выберем для определения этих величин другой путь; именно воспользуемся опять преобразованием Лапласа.

2°. Известное решение телеграфных уравнений для полубесконечно длинной линии при начальных условиях $u(x, 0) = i(x, 0) = 0$ и граничном условии $u(0, t) = 1$ можно представить в виде [8]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \boldsymbol{L}_t^{-1}\left\{\frac{1}{p}e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \\ i(x, t) &= \boldsymbol{L}_t^{-1}\left\{\frac{G+Gp}{\omega p}\,\frac{1}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\,e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь символ $\boldsymbol{L}_t^{-1}$ обозначает обращение преобразования Лапласа по t.

Воспользуемся подстановкой $p + \rho = q$. Затем согласно известным правилам совершим обратное преобразование относительно q, и наконец, умножим результат на $e^{-\rho t}$. После этого используем формулу (1.20), которая после замены p на q, x на t и τ на ωx при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ дает

$$\boldsymbol{L}_t\{e^{-\rho t}u_0[\alpha(t-\omega x), \beta(t+\omega x)]\,h(t-\omega x)\} = \tag{2.6}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\omega x\sqrt{q^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{1}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}} + \frac{q}{q^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}\,[q^2-(\alpha+\beta)^2]}\right]$$

$$\boldsymbol{L}_t\{e^{-\rho t}u_1[\alpha(t-\omega x), \beta(t+\omega x)]\,h(t-\omega x)\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\omega x\sqrt{q^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{\alpha+\beta}{q^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{(\alpha-\beta)q}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}\,[q^2-(\alpha+\beta)^2]}\right] \tag{2.7}$$

Введем обозначения

$$t - \omega x = \tau, \qquad t + \omega x = \eta, \qquad \alpha + \beta = \rho, \qquad 4\alpha\beta = \sigma^2$$

При этом предполагаем $\alpha > \beta$. Тогда получаем

$$\boldsymbol{L}_t\{e^{-\rho t}[u_0(\alpha\tau, \beta\eta) + u_0(\beta\tau, \alpha\eta) + u_1(\alpha\tau, \beta\eta) + u_1(\beta\tau, \alpha\eta)]\,h(\tau)\} =$$

$$= e^{-\omega x\sqrt{q^2-\sigma^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{q^2-\sigma^2}} + \frac{1}{q-\rho}\right]$$

Далее в силу соотношения [6]

$$L_t^{-1}\left\{e^{-\omega x\sqrt{q^2-\sigma^2}}\,\frac{1}{\sqrt{q^2-\sigma^2}}\right\} = e^{-\rho t}\, I_0\,(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2})\, h\,(t-\omega x)$$

имеем

$$u\,(x,\,t) = e^{-\rho t}\,[-I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau}) + u_0\,(\alpha\tau,\,\beta\eta) + u_0\,(\beta\tau,\,\alpha\eta) + \\ + u_1\,(\alpha\tau,\,\beta\eta) + u_1\,(\beta\tau,\,\alpha\eta)]\,h\,(\tau) \tag{2.8}$$

Подобным же образом получаем

$$i\,(x,\,t) = \{\sqrt{C/L}\,e^{-\rho t}\,I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau}) + \sqrt{G/L}\,e^{-\rho t}\,[u_0\,(\alpha\tau,\,\beta\eta) - u_0\,(\beta\tau,\,\alpha\eta) + \\ + u_1\,(\alpha\tau,\,\beta\eta) - u_1\,(\beta\tau,\,\alpha\eta)]\}\,h\,(\tau) \tag{2.9}$$

В силу равенств (1.9) при $n=0$ и $n=-1$ формулы (2.8) и (2.9) можно представить еще в следующем виде:

$$u\,(x,\,t) = \{e^{-\omega\mu x} + e^{-\rho t}\,[u_0\,(\beta\tau,\,\alpha\eta) - u_0\,(\beta\eta,\,\alpha\tau) + \\ + u_1\,(\beta\tau,\,\alpha\eta) - u_1\,(\beta\eta,\,\alpha\tau)]\}\,h\,(\tau) \tag{2.10}$$

$$i\,(x,\,t) = \{\sqrt{G/L}\,e^{-\omega\mu x} + \left(\sqrt{C/L} + \sqrt{G/L}\right)e^{-\rho t}\,I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\eta\tau}) - \\ - \sqrt{G/L}\,e^{-\rho t}\,[u_0\,(\beta\eta,\,\alpha\tau) + u_0\,(\beta\tau,\,\alpha\eta) + u_1\,(\beta\eta,\,\alpha\tau) + u_1\,(\beta\tau,\,\alpha\eta)]\}\,h\,(\tau)$$

где

$$\mu = \alpha - \beta = \sqrt{\rho^2-\sigma^2} = \sqrt{RG/LC}$$

Формулы (2.8) и (2.9) совпадают с решением П. И. Кузнецова [1, 2] для той же задачи, найденным другим путем и выраженным через функции Υ_n и Θ_n. Можно также получить решения для линии конечной длины и для некоторых других граничных условий, пользуясь функциями u_n.

§ 3. Асимптотические представления функций $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$.

1°. При выводе этих представлений будем пользоваться преобразованием Лапласа. Предварительно напомним известную теорему [7].

Теорема. Пусть $L_x\{F(x)\} = f(p)$. Положим, что:

1) функция $f(p)$ не имеет других особенностей, кроме точек разветвления и полюсов первого порядка;

2) при $\operatorname{Re} p < 0$ функция $f(p)$ равномерно относительно аргумента φ стремится к нулю, когда $|p| \to \infty$;

3) в окрестности точки разветвления p_0 с наибольшей вещественной частью функция $f(p)$ представима рядом вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(p-p_0)^{n-1/2}$$

4) в полюсах $p_1, p_2, \ldots, p_k$ функция $f(p)$ имеет вычеты $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Тогда **функция** $F(x)$ имеет такое асимптотическое представление:

$$F\,(x) \sim \sum_{n=1}^{k} r_n\,e^{p_n x} + \frac{e^{p_0 x}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\frac{(-1)^n\,\Gamma\,(n+1/2)}{x^{n+1/2}} \tag{3.1}$$

2°. Полагая в формуле (1.22) $\nu = 0$ и $\nu = 1$, имеем при $\alpha \neq \beta$ (3.2)

$$L\{u_0(\alpha x, \beta x)\} = f_0(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} + \frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right]$$

$$L\{u_1(\alpha x, \beta x)\} = f_1(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta}{p^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{(\alpha-\beta)\,p}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right] \quad (3.3)$$

Если же $\alpha = \beta$, то $u_n(\alpha x, \alpha x)$ выражается через известные функции, и асимптотические представления излишни. Можно убедиться, что функции $f_0(p)$ и $f_1(p)$ удовлетворяют условиям (1) и (2) теоремы.

Напомним известные соотношения [6, 7] (3.4)

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\right\} = I_0(2x\sqrt{\alpha\beta}) \sim \frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{2\pi(\alpha\beta)^{1/4}\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}\frac{\Gamma(n+1/2)}{(4x\sqrt{\alpha\beta})^n}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}\right\} = \operatorname{ch}(\alpha+\beta)\,x, \qquad L^{-1}\left\{\frac{\alpha+\beta}{p^2-(\alpha+\beta)^2}\right\} = \operatorname{sh}(\alpha+\beta)\,x \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{p^2-(\alpha+\beta)^2} = \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\left[\frac{1}{p-(\alpha+\beta)} - \frac{1}{p+(\alpha+\beta)}\right]$$

$$\frac{p}{p^2-(\alpha+\alpha)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-(\alpha+\beta)} + \frac{1}{p+(\alpha+\beta)}\right]$$

Поэтому остается только найти вычеты функций

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p-(\alpha+\beta)]}, \qquad \varphi_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p+(\alpha+\beta)]} \quad (3.6)$$

и разложить эти функции по степеням

$$p - 2\sqrt{\alpha\beta} = z$$

3°. Сперва найдем вычеты в точках $(\alpha+\beta)$ и $-(\alpha+\beta)$:

$$r_1 = \lim_{p\to\alpha+\beta}\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta} & \text{при } \alpha>\beta\\[2mm] \dfrac{-1}{\alpha-\beta} & \text{при } \alpha<\beta\end{cases}$$

(3.7)

$$r_2 = \lim_{p\to-(\alpha+\beta)}\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta} & \text{при } \alpha>\beta\\[2mm] \dfrac{-1}{\alpha-\beta} & \text{при } \alpha<\beta\end{cases}$$

Затем мы разложим функции $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ по степеням z:

$$\varphi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1}{\sqrt{z+4\sqrt{\alpha\beta}}}\,\frac{1}{z+2\sqrt{\alpha\beta}-(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{-1}{2(\alpha\beta)^{1/4}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}\,\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1}{1-z/(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right)^n z^n$$

При этом мы воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-cz}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_n)\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$$

которая справедлива в окрестности $z = 0$.

В данном случае имеем

$$c = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}, \qquad a_n = \binom{-{}^1/_2}{n}\left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right)^n$$

Поэтому

$$\gamma_n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{-{}^1/_2}{n}\left[\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]^k$$

Последняя сумма является суммой первых n членов формального разложения бинома

$$\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]^{-{}^1/_2}$$

Для этой суммы введем следующие обозначения:

$$\gamma_n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{2n}}\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]_n^{-{}^1/_2} \tag{3.8}$$

Таким образом, получаем

$$\varphi_1(p) = \frac{-1}{2(\alpha\beta)^{{}^1/_4}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^{n-{}^1/_2} \tag{3.9}$$

Подобным же путем находим разложение функции $\varphi_2(p)$:

$$\varphi_2(p) = \frac{1}{2(\alpha\beta)^{{}^1/_4}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta_n p^{n-{}^1/_2} \tag{3.10}$$

где

$$\delta_n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^{2n}}\left[1-\frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]_n^{-{}^1/_2} \tag{3.11}$$

4°. Согласно формулам (3.1) — (3.10) функции $u_0(\alpha x, \beta x)$ и $u_1(\alpha x, \beta x)$ при $\alpha > \beta$ можно представить в виде асимптотических рядов:

$$u_0(\alpha x, \beta x) \sim \frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta)x} + \frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{4\pi(\alpha\beta)^{{}^1/_4}\sqrt{x}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-{}^1/_2}{n}\frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{(4x\sqrt{\alpha\beta})^n} - \right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_n\frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{x^n} - \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{x^n}\right] \tag{3.12}$$

$$u_1(\alpha x, \beta x) \sim \frac{1}{2}e^{(\alpha+\beta)x} + \frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{8\pi(\alpha\beta)^{{}^1/_4}\sqrt{x}}\left[-\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_n\frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{x^n} + \right.$$

$$\left. +\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{\Gamma(n+{}^1/_2)}{x^n}\right] \tag{3.13}$$

Если же $\alpha < \beta$, то в формулах (3.12) и (3.13) первый член будет соответственно $\frac{1}{2}e^{-(\alpha+\beta)x}$ и $-\frac{1}{2}e^{-(\alpha+\beta)x}$, а остальные члены остаются прежними.

После подстановки $\alpha x = t$, $\beta x = y$ для $t > y$ имеем

$$u_0(t, y) \sim \frac{1}{2} e^{t+y} + \frac{e^{2\sqrt{ty}}}{4\pi (ty)^{1/4}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(4\sqrt{ty})^n} - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}+\sqrt{y}}{\sqrt{t}-\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{2n}} \left[1 + \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-1/2} -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{y}}{\sqrt{t}+\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^{1/4}} \left[1 - \frac{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-1/2} \right\} \qquad (3.14)$$

$$u_1(t, y) \sim \frac{1}{2} e^{t+y} + \frac{e^{2\sqrt{ty}}}{8\pi (ty)^{1/4}} \left\{ - \frac{\sqrt{t}+\sqrt{y}}{\sqrt{t}-\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{2n}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-1/2} + \frac{\sqrt{t}-\sqrt{y}}{\sqrt{t}+\sqrt{y}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^{2n}} \left[1 - \frac{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-1/2} \right\}$$

При $t < y$ первый член здесь будет соответственно $\frac{1}{2} e^{-(t+y)}$ и $-\frac{1}{2} e^{-(t+y)}$. Очевидно, что полученные асимптотические формулы применимы к вычислению значений функций $u_0, (t, y)$ и $u_1(t, y)$ при достаточно больших значениях $\sqrt{t} - \sqrt{y}$.

5°. Из формул (3.12), (3.13) и выражения для $u_n(x, x)$ следует еще

$$\lim_{x \to \infty} e^{-(\alpha+\beta)x} u_\nu(\alpha x, \beta x) = \begin{cases} 1/2 & \text{для } \alpha > \beta \\ 1/4 & \text{для } \alpha = \beta \\ 0 & \text{для } \alpha < \beta \end{cases} \qquad (\nu = 0.1)$$

Возвращаясь затем к формулам (2.10) и (2.11), ввиду неравенств $\alpha\eta > \beta\tau$, $\alpha\tau > \beta\eta$ (среди которых второе имеет место, начиная с достаточно большого t) мы имеем

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} u_\nu(\beta\tau, \alpha\eta) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} u_\nu(\beta\eta, \alpha\tau) = 0 \qquad (\nu = 0.1)$$

Отсюда получаем новым путем известные следствия [2]:

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = e^{-\omega\mu x}, \qquad \lim_{t \to \infty} i(x, t) = \sqrt{\frac{G}{R}} e^{-\omega\mu x}$$

Поступила 3 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П. И. О представлении одного контурного интеграла. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2. Стр. 267—270.
2. Кузнецов П. И. Функции Ломмеля от двух мнимых аргументов. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5. Стр. 555—560.
3. Кузнецов П. И. Распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных однопроводных линий. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 2. Стр. 141—148.
4. Грей Э. Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. 1949. Стр. 79, 224—275.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1948. Т. II. Стр. 382.
6. Диткин В. А. Операционное исчисление. Успехи математических наук. 1947. Т. II. Вып. 6 (22). Стр. 72—158.
7. Лурье А. И. Операционное исчисление. 1950. Стр. 369—388.
8. Коваленков В. И. Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий. 1945. Стр. 127.