Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В настоящей работе рассматривается решение задачи устойчивости установившихся движений в критическом случае, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет пару чисто мнимых корней $\pm \lambda i$ при остальных корнях с отрицательными вещественными частями.

§ 1. Постановка задачи. Допустим, что порядок рассматриваемой системы равен $m = n + 2$. Дифференциальные уравнения возмущенного движения могут быть в этом случае приведены к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\
\frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \\
\frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где X, Y, X_s — аналитические в некоторой окрестности начала координат функции переменных x, y, x_j, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, p_s, q_s и p_{sj} — постоянные, причем p_{sj} таковы, что уравнение

$$\triangle(\rho) = |p_{sj} - \delta_{sj}\rho| = 0 \tag{1.2}$$

где δ_{sj} — символ Кронекера, имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Уравнения (1.1) являются исходными во всех известных способах решения задачи устойчивости в интересующем нас случае. Все эти способы установлены Ляпуновым[1]. Наиболее простой из них, приводящий к наименее громоздким вычислениям, заключается в следующем. Допустим сначала, что предложена система второго порядка:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y) \tag{1.3}$$

Преобразованием

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta \tag{1.4}$$

приводим эту систему к виду

$$\frac{dr}{dt} = rR^*(r, \vartheta), \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta(r, \vartheta) \tag{1.5}$$

а затем, исключая dt, к виду

$$\frac{dr}{d\vartheta} = rR(r, \vartheta) \tag{1.6}$$

Здесь R^*, Θ, R — аналитические функции r, обращающиеся в нуль при $r=0$. Коэффициенты разложения этих функций по степеням r являются полиномами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Уравнению (1.6) попытаемся удовлетворить формальным рядом вида

$$r = c + c^2 r_2(\vartheta) + c^3 r_3(\vartheta) + \cdots \tag{1.7}$$

где c — произвольная постоянная, а r_i — периодические функции ϑ.

Подставляя (1.7) в (1.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получаем для r_i уравнения

$$\frac{dr_i}{d\vartheta} = R_i \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

где R_i — полиномы относительно $r_2, r_3, \ldots, r_{i-1}$ с периодическими коэффициентами. Из этих уравнений функции r_i последовательно определяются одна за другой, но они, вообще говоря, не будут получаться периодическими, так как квадратуры от периодических функций содержат в общем случае непериодические члены. Допустим, что r_k является первой непериодической функцией в ряду $r_2, r_3, \ldots$.

Число k, как показал Ляпунов, всегда является нечетным. Функция r_k будет необходимо иметь вид $r_k = g\vartheta + \varphi(\vartheta)$, где g — постоянная, а φ — периодическая функция. Если $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $g < 0$, то оно устойчиво и притом асимптотически.

Таким образом, решение задачи в рассматриваемом случае приводит к вычислению квадратур от функции R_i. Хотя эти функции получаются полиномами от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, вычисление квадратур приводит к громоздким выкладкам, в особенности при $k > 3$, ввиду быстрого усложнения подинтегральных выражений по мере возрастания i.

Рассмотрим теперь общий случай системы (1.1). Для решения задачи устойчивости, следуя Ляпунову, составляем систему уравнений

$$\frac{\partial x_s}{\partial x}(-\lambda y + X) + \frac{\partial x_s}{\partial y}(\lambda x + Y) = p_s x_1 + \cdots + p_{sn} x_n + p_s x + q_s y + X_s \quad (s=1,\ldots,n) \tag{1.8}$$

которой стараемся удовлетворить формальными рядами вида

$$x_s = x_s^{(1)}(x, y) + x_s^{(2)}(x, y) + \cdots \tag{1.9}$$

где $x_s^{(i)}$ — формы i-го порядка переменных x и y. Такие ряды всегда найдутся и получатся вполне определенными. Этими рядами заменяем величины x_s в первых двух уравнениях (1.1), после чего решаем задачу устойчивости для полученной таким образом системы второго порядка. Для определения форм $x_s^{(i)}$ получаем уравнения вида

$$\lambda\left(x\frac{\partial x_s^{(i)}}{\partial y} - y\frac{\partial x_s^{(i)}}{\partial x}\right) = p_{s1} x_1^{(i)} + \cdots + p_{sn} x_n^{(i)} + X_s^{(i)}(x, y)$$

где $X_s^{(i)}$ — известные формы i-го порядка от x и y. Эти уравнения представят для определения коэффициентов форм $x_s^{(i)}$ систему линейных неоднородных уравнений. Решение этой системы и представляет наиболее громоздкую часть вычислений, так как для коэффициентов форм i-го порядка мы получим систему из $n(i+1)$ уравнений. Выкладки упростятся, если, следуя Ляпунову, уже в уравнениях (1.8) ввести вместо x и y полярные координаты r и ϑ, которые, как указывалось выше, необходимы для решения получаемой впоследствии системы второго порядка. Еще больших упрощений можно добиться приемом, указанным нами в работе[2], который дает возможность сразу определить коэффициенты форм $x_s^{(i)}$, после того как определены коэффициенты форм $x_s^{(1)}$.

Ниже дается новый прием решения задачи, при котором все вычисления упрощаются. При этом для системы второго порядка выкладки сводятся к простому умножению полиномов и не требуют ни вычисления квадратур, ни решения системы алгебраических уравнений. И даже для системы произвольного порядка упрощение вычислений настолько значительно, что можно дать общее выражение для первого коэффициента устойчивости, когда система первого приближения не только не приведена к каноническому виду, но даже когда у нее не выделены критические переменные, как это сделано в системе (1.1).

§ 2. Система второго порядка. Рассмотрим сначала систему второго порядка. Исходные уравнения берутся обычно в форме (1.3), в которой линейная часть приведена к вещественному каноническому виду. Как будет ясно из нижеследующего, это приведение к вещественному виду является источником многих совершенно излишних вычислительных усложнений. Мы будем предполагать, что система первого приближения приведена к каноническому комплексному виду, так что

$$\frac{dx}{dt} = i\lambda x + X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = -i\lambda x + Y(x, y) \tag{2.1}$$

Если уравнения были сразу заданы в виде (1.3), то для приведения их к виду (2.1) достаточно в качестве новых переменных принять величины $x+iy$ и $x-iy$. Необходимо отметить, что в уравнениях (2.1) величины x и y являются комплексно сопряженными, так что второе уравнение можно получить из первого заменой i на $-i$, x на y и y на x.

Для решения задачи устойчивости введем в уравнения (2.1) вместо переменных x и y переменные u и v при помощи подстановки

$$\begin{aligned} x &= u + x^{(2)}(u, v) + x^{(3)}(u, v) + \cdots \\ y &= v + y^{(2)}(u, v) + y^{(3)}(u, v) + \cdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ — некоторые формы j-го порядка, которыми мы постараемся распорядиться таким образом, чтобы уравнения для u и v приняли вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i\lambda u + A_3u^2v + A_5u^3v^2 + \cdots + A_{2k+1}u^{k+1}v^k + \cdots \\ \frac{dv}{dt} &= -i\lambda v + \bar{A}_3uv^2 + \bar{A}_5u^2v^3 + \cdots + \bar{A}_{2k+1}u^kv^{k+1} + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь A_j и $\bar{A}_j$ — некоторые подлежащие определению постоянные, причем $\bar{A}_j$ комплексно сопряжены с A_j, так что переменные u и v также являются комплексно сопряженными.

Подставляя в уравнение (2.1) вместо x и y их выражения (2.2) и принимая во внимание (2.3), получим

$$\left(1+\frac{\partial x^{(2)}}{\partial u}+\cdots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\cdots)+\left(\frac{\partial x^{(2)}}{\partial v}+\cdots\right)\times$$
$$\times(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\cdots)=i\lambda(u+x^{(2)}+\cdots)+X(u+\cdots,\ v+\cdots)$$
$$\left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial u}+\cdots\right)(i\lambda u+A_3u^2v+\cdots)+\left(1+\frac{\partial y^{(2)}}{\partial v}+\cdots\right)\times$$
$$\times(-i\lambda v+\bar{A}_3uv^2+\cdots)=-i\lambda(v+y^{(2)}+\cdots)+Y(u+\cdots,\ v+\cdots)$$

Приравнивая в обеих частях совокупности членов одинаковых порядков, получим для нахождения форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ уравнения

$$\begin{aligned} i\lambda\left(u\frac{\partial x^{(j)}}{\partial u}-v\frac{\partial x^{(j)}}{\partial v}-x^{(j)}\right)&=-A_j u^{1/2(j+1)}v^{1/2(j-1)}+X^{(j)}(u,\ v)\\ i\lambda\left(u\frac{\partial y^{(j)}}{\partial u}-v\frac{\partial y^{(j)}}{\partial v}+y^{(j)}\right)&=-\bar{A}_j u^{1/2(j-1)}v^{1/2(j+1)}+Y^{(j)}(u,\ v)\end{aligned}\qquad(2.4)$$

Здесь A_j при j четных равны нулю и $X^{(j)}$ и $Y^{(j)}$ формы j-го порядка, зависящие от форм $x^{(l)}$ и $y^{(l)}$ и постоянных A_l, для которых $l<j$.

Уравнения (2.4) *дают возможность без всяких вычислений последовательно определять как формы* $x^{(j)}$ *и* $y^{(j)}$, *так и постоянные* A_j.

В самом деле, допустим, что все формы $x^{(l)}$, $y^{(l)}$ и постоянные A_l для $l<j$, уже определены. Тогда $X^{(j)}$ будет известной формой. Пусть

$$X^{(j)}=\sum_{p+q=j}A_{pq}u^pv^q,\qquad x^{(j)}=\sum_{p+q=j}\alpha_{pq}u^pv^q$$

где A_{pq} — известные коэффициенты, а α_{pq} — подлежащие определению. Тогда, приравнивая в (2.4) коэффициенты при подобных членах, получим, что при j четном коэффициенты α_{pq} определяются по формуле

$$\alpha_{pq}=-\frac{A_{\alpha p}\,i}{(p-q-1)\lambda}\qquad(2.5)$$

Той же формулой определяются коэффициенты и при нечетном j, за исключением коэффициента $\alpha_{\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}(j-1)}$. Для этого коэффициента получается уравнение

$$0\cdot\alpha_{\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}(j-1)}=-A_j+A_{\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}(j-1)}\qquad(2.6)$$

Следовательно, коэффициент $\alpha_{\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}(j-1)}$ остается произвольным. Мы положим его равным нулю. Вместе с тем уравнение (2.6) однозначно определяет величину A_j, для которой находим

$$A_j=A_{\frac{1}{2}(j+1),\ \frac{1}{2}(j-1)}\qquad(2.7)$$

Точно таким же путем определяются коэффициенты формы $y^{(j)}$. Однако ни в вычислении этих коэффициентов, ни в составлении для них уравнений нет необходимости, так как в силу сопряженности переменных x, y, а также переменных u и v можно сразу писать

$$y^{(j)}=\sum_{p+q=j}\bar{\alpha}_{pq}u^qv^p$$

Таким путем можно подсчитать любое число форм $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$, а также постоянных A_j. Вычисления нужно производить до тех пор, пока не придем к постоянной A_j с отличной от нуля вещественной частью. Знаком этой вещественной части и решается задача устойчивости.

В самом деле, пусть A_k — первая из постоянных $A_3, A_5, \ldots$, вещественная часть которой отлична от нуля, так что

$$A_3 = iB_3, \quad A_5 = iB_5, \ldots \; A_{k-2} = iB_{k-2}, \quad A_k = g + iB_k \tag{2.8}$$

где постоянные $B_3, \ldots, g$ — вещественны.

Покажем, что при $g > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g < 0$ оно устойчиво и притом асимптотически. Преобразуем с этой целью в уравнениях (2.3) переменные u и v при помощи подстановки:

$$u = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \qquad v = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$$

Имеем

$$\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\vartheta}{dt} = i\lambda r + A_3 r^3 + \cdots + A_k r^k + \cdots$$

где ненаписанные члены имеют порядок, больший k. Выделяя вещественные и мнимые части, найдем

$$\frac{dr}{dt} = gr^k + \cdots, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + B_3 r^3 + \cdots + B_k r^k + \cdots \tag{2.9}$$

Все сделанные нами преобразования (в преобразовании (2.2) мы берем только k первых членов) таковы, что задача устойчивости для исходных уравнений эквивалентна той же задаче для уравнений (2.9). Что же касается последней задачи, то она, очевидно, решается знаком величины g. Таким образом, наше предложение доказано.

Если бы $\operatorname{Re}(A_j) = 0$ при любом i, то это свидетельствовало бы, что задача устойчивости не решается конечным числом членов. В этом случае начало координат было бы центром, невозмущенное движение было бы устойчиво, но не асимптотически.

Приведенный способ решения задачи устойчивости требует только составления уравнений (2.4) для последовательных приближений. Для этого требуется лишь только перемножение многочленов. Эта последняя задача может оказаться утомительной, если задача устойчивости для исследуемых уравнений решается членами высоких порядков.

Однако такие выкладки приходится делать при любом способе решения задачи, после чего в других способах приходится либо разрешать сложные системы линейных алгебраических уравнений, либо вычислять громоздкие квадратуры.

Пример 1. Допустим, что уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^2 + 2y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = x + 4x^2 + y^2$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} = i\xi + \frac{3}{4}(i-1)\xi^2 + \frac{3}{4}(i-1)\eta^2 + \frac{1}{2}(5i+1)\xi\eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -i\eta - \frac{3}{4}(i+1)\xi^2 - \frac{3}{4}(i+1)\eta^2 + \frac{1}{2}(-5i+1)\xi\eta$$

где $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$.

Полагая

$$\begin{aligned} \xi &= u + \xi^{(2)}(u, v) + \xi^{(3)}(u, v) + \cdots \\ \eta &= v + \eta^{(2)}(u, v) + \eta^{(3)}(u, v) + \cdots \end{aligned} \tag{2.10}$$

подбираем формы $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$, $\eta^{(2)}$, $\eta^{(3)}$ таким образом, чтобы u и v удовлетворяли уравнениям (2.3). Имеем

$$i\left(u\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial u} - v\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial v} - \xi^{(2)}\right) = \frac{3}{4}(i-1)u^2 + \frac{3}{4}(i-1)v^2 + \frac{1}{2}(5i+1)uv$$

Отсюда

$$\xi^{(2)} = \frac{3}{4}(i+1)u^2 + \frac{1}{4}(1-i)v^2 + \frac{1}{2}(5i+1)uv$$

Форму $\eta^{(2)}$ получим из $\xi^{(2)}$ заменой i на $-i$, u на v и v на u. Имеем

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{4}(1+i)u^2 + \frac{3}{4}(1-i)v^2 - \frac{1}{2}(i+5)uv$$

Для формы $\xi^{(3)}$ имеем уравнение

$$i\left(\frac{\partial\xi^{(3)}}{\partial u}u - \frac{\partial\xi^{(3)}}{\partial v}v - \xi^{(3)}\right) =$$

$$= -A_3u^2v + \frac{3}{2}(i-1)u\xi^{(2)} + \frac{3}{2}(i-1)v\eta^{(2)} + \frac{1}{2}(5i+1)(u\eta^{(2)} + v\xi^{(2)})$$

Приравнивая справа и слева коэффициенты при u^2v, получим

$$A_3 = \frac{3}{4} - \frac{35}{4}i$$

Так как вещественная часть A_3 положительна, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если бы вещественная часть A_3 равнялась нулю, то пришлось бы вычислить и форму $\xi^{(3)}$ и форму $\xi^{(4)}$. Тогда коэффициент A_5 определился бы из уравнения для $\xi^{(5)}$, для чего нужно было бы в обеих частях уравнения сравнить коэффициенты при u^3v^2. При этом при вычислении форм $\xi^{(3)}$ коэффициент при u^2v можно принять равным нулю. Если бы вещественная часть A_5 также равнялась нулю, то пришлось бы подсчитывать и дальнейшие приближения.

Пример 2. Рассмотрим исследованное Ляпуновым уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2n+1} + F(x, y^2) \qquad \left(y = \frac{dx}{dt}\right)$$

где F — аналитическая функция своих аргументов, разложение которой не имеет членов ниже второго порядка относительно x и y. Полагая

$$\xi = x - i\frac{dx}{dt}, \qquad \eta = x + i\frac{dx}{dt}$$

получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= i\xi + \frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1} + iF^*(\xi, \eta) \\ \frac{d\eta}{dt} &= -i\eta - \frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(\xi-\eta)^{2n+1} - iF^*(\eta, \xi) \end{aligned}$$

где F^* — вещественная функция. Полагая (2.10), имеем

$$\left(1 + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial u} + \cdots\right)(i\lambda u + A_3u^2v + \cdots) +$$

$$+ \left(\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial v} \cdots\right)(-i\lambda v + \bar{A}_3uv^2 + \cdots) =$$

$$= i(u + \xi^{(2)} + \cdots) + \frac{(-1)^n\alpha}{2^{2n+1}}(u - v + \cdots)^{2n+1} + iF^*(u + \cdots, v + \cdots)$$

Отсюда сразу видно, что все формы $\xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(2n)}$ получатся вещественными, а все числа $A_3, A_5, \ldots, A_{2n-1}$ — чисто мнимыми. То же самое будет справедливо для форм $\xi^{(k)}$ и чисел A_k при любом k, если только $\alpha = 0$. Поэтому при $\alpha = 0$ будем иметь устойчивость, но не асимптотическую.

Допустим, что $\alpha \neq 0$. Тогда уравнение для $\xi^{(2n+1)}$ будет иметь вид:

$$i\left(u\frac{\partial \xi^{(2n+1)}}{\partial u} - v\frac{\partial \xi^{(2n+1)}}{\partial v} - \xi^{(2n+1)}\right) =$$

$$= iF^{(2n+1)}(u, v) - A_{2n+1}u^{n+1}v^n + \frac{(-1)^n \alpha}{2^{2n+1}}(u-v)^{2n+1}$$

где $F^{(2n+1)}$ — вещественная форма $2n+1$-го порядка.

Приравнивая коэффициенты при $u^{n+1}v^n$, найдем

$$\operatorname{Re}(A_{2n+1}) = \frac{(2n+1)\,2n\ldots(n+2)}{n!\,2^{2n+1}}\alpha$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $\alpha < 0$ оно устойчиво асимптотически.

§ 3. Системы произвольного порядка. Рассмотрим теперь систему произвольного $m = n + 2$-го порядка. Уравнения возмущенного движения берем не в форме Ляпунова (1.1), а в виде

$$\frac{dx}{dt} = i\lambda x + X(x, y, x_j), \qquad \frac{dy}{dt} = -i\lambda y + Y(x, y, x_j)$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_j) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

Для решения задачи устойчивости мы можем теперь воспользоваться приемом Ляпунова и привести систему (3.1) к системе второго порядка. При этом вследствие того, что уравнения имеют вид (3.1), а не вид (1.1), вычисления значительно упрощаются. В самом деле, уравнения (1.8), определяющие x_s как функции x и y, принимают сейчас вид:

$$\frac{\partial x_s}{\partial x}(i\lambda x + X) + \frac{\partial x_s}{\partial y}(-i\lambda y + Y) = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + p_s x + q_s y + X_s \tag{3.2}$$

и вследствие этого уравнения (1.10) принимают вид:

$$i\lambda\left(\frac{\partial x_s^{(k)}}{\partial x}x - \frac{\partial x_s^{(k)}}{\partial y}y\right) = p_{s1}x_1^{(k)} + \cdots + p_{sn}x_n^{(k)} + X_s^{(k)}(x, y)$$

Если в этих уравнениях положить

$$x_s^{(k)} = \sum_{p+q=k} a_{pq}^{(s)} x^p q^q, \qquad X_s^{(k)} = \sum_{p+q=k} C_{pq}^{(s)} x^p y^q$$

где $C_{pq}^{(s)}$ — известные, а $a_{pq}^{(s)}$ — подлежащие определению коэффициенты, то будем иметь

$$p_{s1}a_{pq}^{(1)} + \cdots + [p_{ss} - (p-q)i\lambda]\,a_{pq}^{(s)} + \cdots + p_{sn}a_{pq}^{(n)} + C_{pq}^{(s)} = 0$$
$$(s = 1, \ldots, n)$$

Таким образом, для определения коэффициентов $a_{pq}^{(s)}$ мы получаем не систему из $n(k+1)$ уравнений, как это было бы, если бы мы пользовались уравнениями (1.1.), а $k+1$ самостоятельных систем, состоящих из n уравнений каждая. Это, разумеется, вносит существенные упрощения в вычисления. Но этим дело не ограничивается. Если пользоваться уравнениями в форме (1.1), то определители систем $n(k+1)$-го порядка, определяющих коэффициенты $a_{pq}^{(s)}$, будут разными для форм разных порядков, т. е. и они будут зависеть от индекса k. Если же пользоваться уравнениями (3.1), то придется все время решать системы одного и того же порядка n, определители которых отличаются лишь диагональными членами. И если

$$A_s = \sum_{j=1}^{n} u_{js}(i\mu)\, a_j$$

является решением уравнений

$$p_{s1} A_1 + \cdots + (p_{ss} - i\mu) A_s + \cdots + p_{sn} A_n + a_s = 0 \tag{3.3}$$

выраженным явно через μ, то для формы $x_s^{(k)}$ любого порядка k имеем

$$x_s^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{p+q=k} u_{js}[(p-q)\, i\mu]\, C_{pq}^{(j)} x^p\, y^q$$

Таким образом, для нахождения всех форм $x_s^{(k)}$ достаточно разрешить лишь одну систему n-го порядка (3.3), т. е. вычислить определитель $\Delta(i\mu)$ и его миноры.

Как уже указывалось, для решения задачи устойчивости для системы (3.1) нужно полученные решения уравнений (3.2) подставить вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ в первые два уравнения и разрешить затем приемом, указанным в предыдущем параграфе, полученную систему второго порядка. Целесообразно одновременно определять и формы $x_s^{(k)}$ и решать задачу устойчивости для системы второго порядка. При этом формы $x_s^{(k)}$ будут определяться по мере надобности. Порядок вычислений будет таким же, как и при решении задачи без выделения критических переменных, к чему мы сейчас и переходим.

Допустим, что в рассматриваемой системе возмущенного движения не выделены критические переменные, так что эта система имеет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = q_{s1} x_1 + \cdots + q_{sm} x_m + X_s(x_1, \ldots, x_m) \tag{3.4}$$

где q_{sj} — постоянные, для которых уравнение

$$D(\rho) = |q_{sj} - \delta_{sj}\,\rho| = 0 \tag{3.5}$$

имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Для решения задачи устойчивости попытаемся найти для уравнений (3.4) по крайней мере формальное частное решение вида

$$x_s = x_s^{(1)}(u, v) + x_s^{(2)}(u, v) + \cdots \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.6}$$

где $x_s^{(k)}$ — формы k-го порядка переменных u и v, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{du}{dt} = i\lambda u + A_3 u^2 v + A_5 u^3 v^2 + \cdots, \quad \frac{dv}{dt} = -i\lambda v + \bar{A}_3 u v^2 + \bar{A}_5 u^2 v^3 + \cdots \tag{3.7}$$

в которых A_j и $\bar{A}_j$ — комплексно сопряженные постоянные.

Ряды (3.6) должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial x_s}{\partial u}(i\lambda u + A_3 u^2 v + \cdots) + \frac{\partial x_s}{\partial v}(-i\lambda v + \overline{A}_3 uv^2 + \cdots) = \\ = q_{s1} x_1 + \cdots + q_{sm} x_m + X_s \qquad (s = 1, \ldots, m) \tag{3.8}$$

Приравнивая в этих уравнениях члены первого порядка, получим

$$i\lambda\left(\frac{\partial x_s^{(1)}}{\partial u} u - \frac{\partial x_s^{(1)}}{\partial v} v\right) = q_{s1} x_1^{(1)} + \cdots + q_{sm} x_m^{(1)}$$

Откуда, полагая $x_s^{(1)} = \alpha_s u + \beta_s v$, найдем

$$q_{s1}\alpha_1 + \cdots + (q_{ss} - i\lambda)\alpha_s + \cdots + q_{sm}\alpha_m = 0$$
$$q_{s1}\beta_1 + \cdots + (q_{ss} + i\lambda)\beta_s + \cdots + q_{sm}\alpha_m = 0$$

Отсюда, принимая во внимание, что $D(i\lambda) = D(-i\lambda) = 0$, получим

$$x_s^{(1)} = D_{1s}(i\lambda) u + D_{1s}(-i\lambda) v \tag{3.9}$$

Здесь D_{js} — алгебраическое дополнение элемента j-й строки и s-й вертикали определителя D. Для форм $x_s^{(2)}(u, v)$ из (3.8) находим

$$i\lambda\left(\frac{\partial x_s^{(2)}}{\partial u} u - \frac{\partial x_s^{(2)}}{\partial v} v\right) = q_{s1}x_1^{(2)} + \cdots + q_{sm} x_m^{(2)} + X_s^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}) \tag{3.10}$$

где через $X_s^{(k)}(x_1, \ldots, x_m)$ мы обозначаем совокупность членов k-го порядка в функциях $X_s(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим соответственно через $A_s^{(20)}$, $A_s^{(11)}$ и $A_s^{(02)}$ коэффициенты при u^2, uv и v^2 в функциях $X_s^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$, так что

$$A_s^{(pq)} = \frac{1}{p!\,q!}\frac{\partial^2}{\partial u^p\,\partial v^q} X_s^{(2)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}) \qquad (p + q = 2,\ 0! = 1) \tag{3.11}$$

Пусть, далее,

$$x_s^{(2)} = \sum_{p+q=2} \alpha_s^{(pq)} u^p v^q \tag{3.12}$$

Тогда из (3.10) находим

$$q_{s1}\alpha_1^{(pq)} + \cdots + [q_{ss} - i\lambda(p - q)]\alpha_s^{(pq)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(pq)} + A_s^{(pq)} = 0$$

Отсюда

$$\alpha_s^{pq} = -\frac{1}{D[(p-q)\,i\lambda]}\sum_{j=1}^{m} A_j^{(pq)} D_{js}[(p - q)\,i\lambda] \quad (s=1, \ldots, m;\ p+q=2) \tag{3.13}$$

По свойству корней уравнения (3.5) все знаменатели в выражениях (3.13) отличны от нуля. Переходим к определению форм $x_s^{(3)}$. Пусть

$$A_s^{(30)} u^3 + A_s^{(21)} u^2 v + A_s^{(12)} uv^2 + A_s^{(03)} v^3 \tag{3.14}$$

где

$$A_s^{(pq)} = \tag{3.15}$$

$$= \frac{1}{p!\,q!}\left\{\frac{\partial^3}{\partial u^p\,\partial v^q}[X_s^{(2)}(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(1)} + x_m^{(2)}) + X_s^{(3)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})]\right\}_{u=v=0}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m;\ p + q = 3;\ 0! = 1)$$

совокупности членов третьего порядка в выражениях

$$X_s^{(3)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}) + X_s^{(2)}(x_1^{(1)} + x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(1)} + x_m^{(2)})$$

Пусть, далее,

$$x_s^{(3)} = \sum_{p+q=3} \alpha_s^{(pq)} u^p v^q$$

искомая форма. Тогда при $p \neq 2$ и $p \neq 1$ будем иметь

$$q_{s1}\alpha_1^{(pq)} + \cdots + [q_{ss} - (p-q)\,i\lambda]\,\alpha_s^{(pq)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(pq)} + A_s^{(pq)} = 0 \tag{3.16}$$

Для коэффициентов же $\alpha_s^{(21)}$ и $\alpha_s^{(12)}$ получатся уравнения

$$\begin{gathered} q_{s1}\alpha_1^{(21)} + \cdots + (q_{ss} - i\lambda)\,\alpha_s^{(21)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(21)} + A_s^{(21)} - A_3 D_{1s}(i\lambda) = 0 \\ q_{s1}\alpha_1^{(12)} + \cdots + (q_{ss} - i\lambda)\,\alpha_s^{(12)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(12)} + A_s^{(12)} - \bar{A}_3 D_{1s}(-i\lambda) = 0 \end{gathered} \tag{3.17}$$

Системы уравнений (3.16) имеют отличные от нуля детерминанты, вследствие чего они допускают единственное решение для искомых коэффициентов. Что же касается уравнений (3.17), то их детерминанты равны нулю. Следовательно, эти уравнения будут допускать решения, только если их правые части связаны определенными соотношениями. Так как ранги определителей этих систем равны $m-1$, то таких соотношений должно существовать для каждой системы только одно. Эти соотношения однозначно определяют A_3 и $\bar{A}_3$. Действительно, исключая из первой системы величины $\alpha_s^{(21)}$, найдем

$$A_3 = \sum_{s=1}^{m} A_s^{(21)} D_{s1}(i\lambda) \Big/ \sum_{s=1}^{m} D_{s1}(i\lambda) D_{1s}(i\lambda) \tag{3.18}$$

Точно так же определится и величина $\bar{A}_3$. Покажем, что при этом величины A_3 и $\bar{A}_3$ действительно получатся комплексно сопряженными В самом деле, уравнения (3.8) не изменяются при замене i на $-i$, u на v и v на u. Тем же самым свойством будут, следовательно, обладать и все формы $x_s^{(k)}$. Поэтому величины $A_s^{(pq)}$ в (3.14) должны быть связаны соотношениями $A_s^{(pq)} = \bar{A}_s^{(qp)}$. Но тогда из (3.17) сразу получаем, что A_3 и $\bar{A}_3$ комплексно сопряжены.

Выбрав таким образом постоянную A_3, мы определим из (3.17) коэффициенты $A_s^{(21)}$ и $A_s^{(12)}$. В выражение этих коэффициентов войдет произвольная постоянная.

Таким путем можно определить любое число форм $x_s^{(k)}$ и постоянных A_k. В самом деле, допустим, что все $x_s^{(j)}$ и A_j, для которых $j < k$, уже вычислены. Тогда для определения $x_s^{(k)}$ мы получим уравнения

$$\begin{gathered} i\lambda\left(u\frac{\partial x_s^{(k)}}{\partial u} - v\frac{\partial x_s^{(k)}}{\partial v}\right) = q_{s1}x_1^{(k)} + \cdots + q_{sm}^{(k)}x_m^{(k)} + F_s^{(k)}(u, v) - \\ - \bar{A}_k D_{1s}(-i\lambda)\, u^{\frac{1}{2}(k-1)} v^{\frac{1}{2}(k+1)} - A_k D_{1s}(i\lambda)\, u^{\frac{1}{2}(k+1)} v^{\frac{1}{2}(k-1)} \end{gathered} \tag{3.19}$$

где $F_s^{(k)}$ — известные формы k-го порядка, зависящие от уже вычисленных форм $x_s^{(j)}$ и коэффициентов A_j, и $A_k = 0$, если k — число четное.

Пусть

$$F_s^{(k)} = \sum_{p+q=k} A_s^{(pq)} u^p v^q, \qquad x_s = \sum_{p+q=k} \alpha_s^{(pq)} u^p v^q$$

Коэффициенты $A_s^{(pq)}$ необходимо связаны соотношениями $A_s^{(pq)} = \overline{A}_s^{(qp)}$. Следовательно, такими же соотношениями связаны коэффициенты $\alpha_s^{(pq)}$, если только форма $x_s^{(k)}$ действительно существует. Это уменьшает вдвое число подлежащих вычислению величин. Из (3.19) находим, что если k — число четное, то коэффициенты $\alpha_s^{(pq)}$ определяются из уравнений

$$q_{s1}\alpha_1^{(pq)} + \cdots + [q_{ss} - (p-q) i\lambda]\alpha_s^{(pq)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(pq)} + A_s^{(pq)} = 0 \qquad (3.20)$$

Из тех же уравнений определяются коэффициенты $\alpha_s^{(pq)}$ и для k нечетного, за исключением коэффициентов $\alpha_s^{(l+1,\, l)}$ и $\alpha_s^{(l,\, l+1)}$, где $2l+1=k$, для которых получаются такие уравнения:

$$\begin{gathered} q_{s1}\alpha_1^{(l+1,\, l)} + \cdots + (q_{ss} - i\lambda)\alpha_s^{(l+1,\, l)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(l+1,\, l)} + \\ + A_s^{(l+1,\, l)} - A_k D_{1s}(i\lambda) = 0 \qquad (3.21) \\ q_{s1}\alpha_1^{(l,\, l+1)} + \cdots + (q_{ss} + i\lambda)\alpha_s^{(l,\, l+1)} + \cdots + q_{sm}\alpha_m^{(l,\, l+1)} + \\ + A_s^{(l,\, l+1)} - \overline{A}_k D_{1s}(-i\lambda) = 0 \end{gathered}$$

Уравнения (3.20) имеют отличные от нуля детерминанты, и поэтому они всегда разрешимы. Детерминант же уравнений (3.21) равен нулю и условие совместности этих уравнений однозначно определяет A_k, Имеем

$$A_k = \sum_{s=1}^{m} A_s^{(l+1,\, l)} D_{1s}(i\lambda) \Big/ \sum_{s=1}^{m} D_{s1}(i\lambda) D_{1s}(i\lambda) \qquad (3.22)$$

Входящую в решение уравнений (3.21) неопределенную постоянную выбираем по произволу.

Итак, мы показали, что уравнениям (3.4) действительно можно удовлетворить формальным решением вида (3.6), где u и v удовлетворяют уравнениям (формальным) (3.7). При этом мы показали способ вычисления как форм $x_s^{(j)}$, так и постоянных A_j. Для решения задачи устойчивости достаточно вычислять указанные формы и постоянные до тех пор, пока мы не придем к такой постоянной A_k, для которой $\mathrm{Re}\,(A_k \neq 0.)$ В самом деле, допустим, что

$$\mathrm{Re}\,(A_3) = \mathrm{Re}\,(A_5) = \cdots = \mathrm{Re}\,(A_{k-2}) = 0, \qquad \mathrm{Re}\,(A_k) = g \neq 0 \qquad (3.23)$$

Тогда, если $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, а если $g < 0$, то оно устойчиво асимптотически.

В справедливости этого утверждения легко убеждаемся из сопоставления с известными методами решения задачи.

Таким образом, решение задачи устойчивости для системы (3.4) сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений вида (3.20) и (3.21). Все эти системы имеют один и тот же порядок m, и для их решения необходимо подсчитать только определитель $D(\rho)$ и его миноры (выразив их как функции ρ). Вычисления значительно упрощаются, если система (3.4) приведена к виду (1.1) Ляпунова. Эти вычисления делаются совершенно элементарными, если линейная часть уравнений возмущенного движения приведена к каноническому виду (комплексному). В этом случае каждое из линейных уравнений, которое придется разрешать, будет содержать только одну неизвестную.

В большинстве случаев, которые встречаются на практике, задача устойчивости решается членами третьего порядка в уравнениях возмущенного движения, т. е. уже коэффициент A_3 имеет отличную от нуля вещественную часть. Этот коэффициент можно подсчитать непосредственно по формулам (3.18), (3.15), (3.12), (3.13), (3.11) и (3.9). Если $X_s^{(2)} = 0$, т. е. если уравнения возмущенного движения не содержат членов второго порядка, то вычисления упрощаются и для первого коэффициента устойчивости получается следующая формула:

$$g = \operatorname{Re} A_3 = \operatorname{Re}\left[2\sum_{s=1}^{m} D_{s1}(i\lambda)\, D_{1s}(i\lambda)\right]^{-1} \frac{\partial^3}{\partial u^2\, \partial v} \sum_{s=1}^{m} X_s^{(3)}(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})\, D_{s1}(i\lambda) \tag{3.24}$$

Н. Н. Баутин [3], решая ту же задачу особым приемом, получает для этого коэффициента

$$g = \frac{1}{3!\, \lambda\Delta}\left[\frac{d^3}{dh^3}\frac{1}{h}\int\limits_0^{2\pi/\lambda} Д\, ds\right]_{h=0}$$

Здесь

$$\Delta = \|\alpha_{ij}\|, \qquad Д = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_3 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial s} & \dfrac{\partial f_2}{\partial s} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial s} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{m3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

причем

$$P_j = X_j^{(3)}(f_1, \ldots, f_m)$$

$$f_j = h\,\{\operatorname{Re}[D_{ij}(i\lambda)]\cos\lambda s - \operatorname{Im}[D_{ij}(i\lambda)]\sin\lambda s\}$$

$$\alpha_{ij} = D_{1i}(\rho_j), \qquad \text{если } \rho_j \text{ — вещественно}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \operatorname{Re} D_{1j}(\rho_j) \\ \alpha_{i,\,j+1} &= -\operatorname{Im} D_{1i}(\rho_j) \end{aligned}\right\} \quad \text{если } \rho_j \text{ и } \rho_{j+1} = \bar{\rho}_j \text{ пара комплексных корней}$$

а $\rho_3, \ldots, \rho_m$ остальные n корней характеристического уравнения.

Этот результат, помимо громоздкости, требует знания всех корней характеристического уравнения, а не только его чисто мнимых корней.

Поступила 12 III 1951

Уральский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат. 1950.
2. Малкин И. Г. О решении задачи устойчивости в случае двух чисто мнимых корней. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
3. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Гостехиздат. 1950.