Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О КРУЧЕНИИ ВАЛОВ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Б. Л. Абрамян, М. М. Джрбашян

(Ереван)

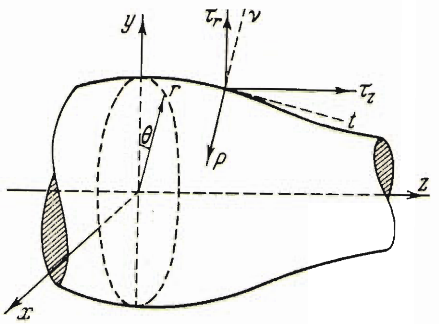
В работе приводится точное решение задачи о кручении ступенчатого цилиндрического вала при произвольном симметричном нагружении.

При решении задачи методом Фурье разделения переменных применен способ введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна[1] в отдельных частях осевого сечения вала. Эти функции были введены Н. Х. Арутюняном при решении задачи о кручении призматического стержня с полигональным поперечным сечением, когда решение задачи сводилось к интегрированию уравнения Пуассона при нулевых граничных условиях.

Решение задачи представляется рядами по бесселевым функциям, при этом коэффициенты разложений определяются из бесконечной, вполне регулярной системы линейных уравнений. Даются формулы, зависящие от геометрических параметров вала, для определения напряжений при кручении. В качестве примера рассмотрена задача о кручении ступенчатого цилиндрического вала, когда скручивающая нагрузка приложена на двух участках его боковой поверхности.

§ 1. Постановка задачи и введение вспомогательных функций.

1°. Для случая, когда нагрузка, скручивающая вал, распределена симметрично относительно оси вала, дифференциальное уравнение кручения валов переменного сечения получено Мичеллом[2,3,8] при следующих предположениях: первое — поперечные сечения вала при кручении остаются плоскими; второе — перемещение вдоль радиуса вала равно нулю. При этих условиях естественно использовать цилиндрическую систему координат, совместив ось z с осью вала (фиг. 1).



Фиг. 1

Известно, что напряженное состояние валов переменного сечения при кручении характеризуется двумя касательными напряжениями τ_z и τ_r.

Величины напряжений τ_r и τ_z определяются из формул

$$\tau_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \tau_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{1.1}$$

где $\Phi(r, z)$ — функция напряжений, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.2}$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $\Phi(r, z)$ на границе осевого сечения вала, определяются законом распределения напряжений на всей поверхности вала.

В сплошном валу напряжения τ_r и τ_z на оси вала должны быть равны нулю, так как скручивающая нагрузка распределена симметрично относительно оси вала. Отсюда и из формул (1.1) следует, что

$$\Phi(0, z) = C_0 = \text{const} \tag{1.3}$$

причем без ограничения общности можно принять $C_0 = 0$.

В том случае когда боковая поверхность вала свободна от внешних сил, на боковой поверхности вала должно иметь место

$$\Phi(r, z) = C = \text{const} \tag{1.4}$$

При этом момент, скручивающий вал, определяется по формуле

$$M_{\text{кр}} = 2\pi C \tag{1.5}$$

Если боковая поверхность вала не свободна от внешних сил, тогда граничное условие (1.4) изменяется. В этом случае функция $\Phi(r, z)$ уже не постоянна на образующей вала, а определяется из формулы

$$\Phi(r(s), z) = -\int_0^s P(s)\, r^2(s)\, ds \tag{1.6}$$

где $P(s)$ — проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения на расстоянии s по длине образующей вала:

$$P(s) = \tau_r(s)\frac{dz}{ds} - \tau_z(s)\frac{dr}{ds} \tag{1.7}$$

а $r(s)$ — радиус вала в данном месте.

При решении уравнения (1.2) методом Фурье разделения переменных получаются два вещественных решения в виде произведения функции от r на функцию от z:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= (A \operatorname{sh} \lambda z + B \operatorname{ch} \lambda z)\,[Cr^2 J_2(\lambda r) + Dr^2 Y_2(\lambda z)] \\ \Phi(r, z) &= (A \sin \lambda z + B \cos \lambda z)\,[Cr^2 I_2(\lambda r) + Dr^2 K_2(\lambda r)] \end{aligned} \tag{1.8}$$

где λ — произвольный вещественный параметр, $J_2(x)$ и $Y_2(x)$ — функции Бесселя второго порядка соответственно первого и второго рода, а $I_2(x)$ и $K_2(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента[4].

Отметим, наконец, что функции

$$r^4, \ r^4 z, \ z \tag{1.9}$$

также являются частными решениями уравнения (1.2).

2°. Рассмотрим задачу о кручении вала со ступенчатым осевым сечением (фиг. 2).

Пусть нагрузка, скручивающая вал, на поверхности вала распределена по закону

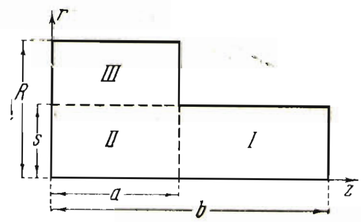
$$\begin{aligned}
\tau_z(r, 0) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=0} = \varphi_1(r) && (0 \leqslant r \leqslant R) \\
\tau_r(R, z) &= -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=R} = \varphi_2(z) && (0 \leqslant z \leqslant a) \\
\tau_z(r, a) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=a} = \varphi_3(r) && (s \leqslant r \leqslant R) \\
\tau_r(s, z) &= -\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=s} = \varphi_4(z) && (a \leqslant z \leqslant b) \\
\tau_z(r, b) &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{z=b} = \varphi_5(r) && (0 \leqslant r \leqslant s) \\
\tau_r(0, z) &= \tau_z(0, z) = \Phi(0, z) = 0 && (0 \leqslant z \leqslant b)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где функции $\{\varphi_i\}$ — кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

При таких предположениях функции $\varphi_2(z)$ и $\varphi_4(z)$ в точках непрерывности могут быть представлены в виде рядов Фурье:

$$\varphi_2(z) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\frac{k\pi z}{a} \qquad (0 < z < a)$$

$$\varphi_4(z) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad (a < z < b) \tag{1.11}$$



Фиг. 2

а функции $\varphi_1(r)$, $\varphi_3(r)$ и $\varphi_5(r)$ — в виде рядов Фурье-Дини [5]:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r) &= \begin{cases} a_0 r + a_1 J_1(\mu_1, r/s) + a_2 J_1(\mu_2, r/s) + \cdots & (0 < r < s) \\ b_0 r + b_1 W_1(\lambda_1 r) + b_2 W_1(\lambda_2 r) + \cdots & (s < r < R) \end{cases} \\
\varphi_3(r) &= f_0 r + f_1 W_1(\lambda_1 r) + f_2 W_1(\lambda_2 r) + \cdots \qquad (s < r < R) \\
\varphi_5(r) &= q_0 r + q_1 J_1(\mu_1 r/s) + q_2 J_1(\mu_2 r/s) + \cdots \qquad (0 < r < s)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь числа $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ суть соответственно корни [5,7] уравнений

$$J_2(x) = 0, \qquad J_2(sx)\, Y_2(Rx) - J_2(Rx)\, Y_2(sx) = 0 \tag{1.13}$$

а функция $W_n(\lambda_k r)$ определяется из формулы

$$W_n(\lambda_k r) = \frac{J_n(\lambda_k r)}{J_2(\lambda_k R)} - \frac{Y_n(\lambda_k r)}{Y_2(\lambda_k R)} \tag{1.14}$$

Заметим, что функция $W_n(x)$ удовлетворяет тем же рекуррентным формулам, что и функции $J_n(x)$ и $Y_n(x)$, см.[4,5].

Пользуясь интегралами Ломмеля [4], легко получить формулы

$$\int_0^s xJ_1\left(\mu_k \frac{x}{s}\right)J_1\left(\mu_p \frac{x}{s}\right)dx = \frac{\mu_k}{\mu_p}\int_0^s xJ_2\left(\mu_k \frac{x}{s}\right)J_2\left(\mu_p \frac{x}{s}\right)dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ {}^1/_2\,[sJ_1(\mu_k)]^2 & \text{при } p = k \end{cases} \tag{1.15}$$

$$\int_s^R xW_1(\lambda_k x)\,W_1(\lambda_p x)\,dx = \frac{\lambda_k}{\lambda_p}\int_s^R xW_2(\lambda_k x)\,W_2(\lambda_p x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq k \\ \omega_k & \text{при } p = k \end{cases} \tag{1.16}$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}\left\{[RW_1(\lambda_k R)]^2 - [sW_1(\lambda_k s)]^2\right\}$$

$$\int_0^s x^2 J_1\left(\mu_k \frac{x}{s}\right)dx = \int_s^R x^2 W_1(\lambda_k x)\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.17}$$

При помощи формул (1.15) — (1.17) коэффициенты разложений (1.12) определяются единственным образом.

Формулы (1.6) и (1.7) дают возможность, исходя из значений касательных напряжений на контуре вала, даваемых формулами (1.10)—(1.12), получить значения функции напряжений $\Phi(r, z)$ на границе осевого сечения вала при условии, что

(1.18)

$$\Phi(0, z) = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant b)$$

$$\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} r^4 + sr^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_k} J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 \leqslant r \leqslant s)$$

$$\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(r^4 - s^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r) \qquad (s \leqslant r \leqslant R)$$

$$\Phi(R, z) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2}{2} z - \frac{aR^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} \sin\frac{k\pi z}{a} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a)$$

$$\Phi(r, a) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4}(R^4 - s^4) + \frac{f_0}{4}(r^4 - R^4) - \frac{c_0 a R^2}{2} +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r) \qquad (s \leqslant r \leqslant R)$$

$$\Phi(s, z) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 a R^2}{2} -$$

$$- \frac{g_0 s^2}{2}(z - a) - \frac{s^2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad (a \leqslant z \leqslant b)$$

$$\Phi(r, b) = \frac{a_0 - q_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4}(R^4 - s^4) - \frac{c_0 a R^2}{2} -$$

$$- \frac{s^2 g_0 (b-a)}{2} + \frac{q_0}{4} r^4 + sr^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\mu_k} J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 \leqslant r \leqslant s)$$

При этом отметим, что все фигурирующие в (1.18) разложения равномерно сходятся в соответствующих замкнутых промежутках. Так как

$\Phi(0, b) = 0$, то последняя из формул (1.18) дает

$$\frac{a_0 - q_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 a R^2}{2} - \frac{g_0 s^2 (b-a)}{2} = 0 \tag{1.19}$$

Полученное равенство (1.19) есть уравнение равновесия действующих на вал крутящих моментов. Ищем функцию $\Phi(r, z)$ в виде

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1(r, z) & \text{в области I} \\ \Phi_2(r, z) & \text{в области II} \\ \Phi_3(r, z) & \text{в области III} \end{cases} \tag{1.20}$$

Из формул (1.10), (1.11) и (1.12) следует, что на контуре осевого сечения вала функции Φ_1, Φ_2 и Φ_3 удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(0, z) = 0 && (a \leqslant z \leqslant b) \\ &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{z=b} = q_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} q_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) && (0 < r < s) \\ &-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{r=s} = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi (z-a)}{b-a} && (a < z < b) \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} &\Phi_2(0, z) = 0 && (0 \leqslant z \leqslant a) \\ &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{z=0} = a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) && (0 < r < s) \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{z=a} = f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r) && (s < r < R) \\ &-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)_{z=R} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a} && (0 < z < a) \\ &\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{z=0} = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r) && (s < r < R) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Кроме того, на смежных сторонах прямоугольников I и II, II и III должны быть выполнены условия сопряжения

$$\Phi_1(r, a) = \Phi_2(r, a), \qquad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a} \qquad (0 < r < s) \tag{1.24}$$

$$\Phi_2(s, z) = \Phi_3(s, z), \qquad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{r=s} \qquad (0 < z < a) \tag{1.25}$$

На линиях сопряжения $\tau_r(s, z)$ и $\tau_z(r, a)$ определим разложениями

$$\tau_r(s, z) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos \frac{k\pi z}{a} \qquad (0 < z < a) \tag{1.26}$$

$$\tau_z(r, a) = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 < r < s) \tag{1.27}$$

где η_k и ξ_k — неизвестные, подлежащие определению.

§ 2. Построение вспомогательных функций. Используя решения (1,8) — (1.9) уравнения (1.2), построим функции $\Phi_i(r, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ так, чтобы удовлетворялись условия (1.21) — (1,23) и (1.26), (1.27).

1°. Ищем функцию $\Phi_1(r, z)$ в виде

$$\Phi_1(r, z) = r^4(Az + B) + Cz + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \mu_k \frac{z}{s} + B_k \operatorname{ch} \mu_k \frac{z}{s}\right) J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right) + D_k K_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)\right] \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a} \tag{2.1}$$

Чтобы удовлетворить условиям (1.21) и (1.27), мы должны иметь

$$\Phi_1(0, z) = Cz + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left[r^2 K_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)\right]_{r=0} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a} = 0 \quad (a \leqslant z \leqslant b) \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial r}\right)_{z=b} = 4r(Ab + B) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \mu_k \frac{b}{s} + B_k \operatorname{ch} \mu_k \frac{b}{s}\right) \frac{\mu_k}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) =$$

$$= q_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} q_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 < r < s) \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{r=s} = -As^2 - \frac{C}{s^2} - \frac{\pi}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) + \right. \tag{2.4}$$

$$\left. + D_k K_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\right] k \cos \frac{k\pi(z-a)}{a-b} = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad (a < z < b)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{z=a} = 4r(Aa + B) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \mu_k \frac{a}{s} + B_k \operatorname{ch} \mu_k \frac{a}{s}\right) \frac{\mu_k}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) =$$

$$= \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 < z < s) \tag{2.5}$$

Если иметь в виду формулы

$$[r^2 K_2(\delta r)]_{r=0} = \frac{2}{\delta^2}, \quad z = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a + (-1)^{k+1} b}{k} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad (a < z < b) \tag{2.6}$$

то в силу единственности разложений (2.2) — (2.5) будем иметь

$$Ab + B = \frac{q_0}{4}, \qquad A_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} + B_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k b}{s} = \frac{s}{\mu_k} q_k \tag{2.7}$$

$$Aa + B = \frac{\xi_0}{4}, \qquad A_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} + B_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k a}{s} = \frac{s}{\mu_k} \xi_k, \qquad As^2 + \frac{C}{s^2} = -\frac{g_0}{2}$$

$$C_k I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) + D_k K_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) = -\frac{b-a}{k\pi} g_k \tag{2.8}$$

$$C[a + (-1)^{k+1} b] + D_k \frac{(b-a)^2}{k\pi} = 0$$

При помощи уравнений (2.8), исключая коэффициенты A, B, C, A_k, B_k, C_k и D_k из (2.1), получаем

$$\Phi_1(r, z) = \frac{r^4}{4(b-a)}[q_0(z-a) + \xi_0(b-z)] + \tag{2.9}$$

$$+ \frac{s^2 z}{4(b-a)}[(\xi_0 - q_0)s^2 - 2g_0(b-a)] +$$

$$+ sr^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \operatorname{csch} \frac{\mu_k(b-a)}{s}\left[\xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k(b-z)}{s} + q_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k(z-a)}{s}\right] J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\frac{s^2}{4}[(q_0 - \xi_0)s^2 + 2g_0(b-a)] \frac{a + (-1)^{k+1}b}{(b-a)^3} k\pi\Delta\left(\frac{k\pi s}{b-a}, \frac{k\pi r}{b-a}\right) \times\right.$$

$$\left.\times I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) - \frac{b-a}{k\pi} g_k I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right) I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\right\} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ a \leqslant z \leqslant b \end{pmatrix}$$

где

$$\Delta(x, y) = I_2(x) K_2(y) - I_2(y) K_2(x) \tag{2.10}$$

2°. Ищем функцию $\Phi_2(r, z)$ в виде

$$\Phi_2(r, z) = r^4(Ez + F) + Gz + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(E_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{s} + F_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{s}\right) J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_k I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right) + H_k K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)\right] \sin \frac{k\pi z}{a} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Удовлетворив условиям (1.22), (1.26) и (1.27), получим

$$\Phi_2(0, z) = Gz + \sum_{k=1}^{\infty} H_k \left[r^2 K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)\right]_{r=0} \sin \frac{k\pi z}{a} = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant a) \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{z=a} = 4r(Ea + F) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(E_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} + \right. \tag{2.13}$$

$$\left. + F_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k a}{s}\right) \frac{\mu_k}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \qquad (0 < r < s)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{z=0} = 4rF + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \frac{\mu_k}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) = a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) \quad (0 < r < s) \tag{2.14}$$

$$-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{r=s} = -Es^2 - \frac{G}{s^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + H_k K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\right] \frac{k\pi}{a} \cos \frac{k\pi z}{a} = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos \frac{k\pi z}{a} \qquad (0 < z < a) \tag{2.15}$$

В силу (2.6) и формулы

$$z = \frac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi z}{a} \qquad (0 \leqslant z \leqslant a) \tag{2.16}$$

из разложений (2.12) — (2.15) получим

$$
\begin{gathered}
(-1)^{k+1} G + \frac{a}{k\pi} H_k = 0, \qquad Ea + F = \frac{\xi_0}{4} \\
E_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} + F_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k a}{s} = \frac{s}{\mu_k} \xi_k, \qquad F = \frac{a_0}{4}, \qquad F_k = \frac{s}{\mu_k} a_k \\
Es^2 + \frac{G}{s^2} = -\frac{\eta_0}{2}, \qquad G_k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) + H_k K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) = -\frac{a}{k\pi}\eta_k
\end{gathered} \tag{2.17}
$$

Исключив из (2.11) коэффициенты E, F, G, E_k, F_k, G_k, H_k при помощи уравнений (2.17), для функции $\Phi_2(r, z)$ будем иметь выражение

$$
\begin{gathered}
\Phi_2(r, z) = \frac{r^4}{4a}[\xi_0 z + a_0(a - z)] + \frac{s^2}{4a}[(a_0 - \xi_0) s^2 - 2\eta_0 a] z + \\
+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{s} \operatorname{csh} \frac{\mu_k a}{s} + a_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k (a - z)}{s} \operatorname{csh} \frac{\mu_k a}{s}\right] \frac{s}{\mu_k} J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) + \\
+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{(-1)^k \frac{\pi s^2}{4a^2}[(a_0 - \xi_0) s^2 - 2a\eta_0] k \frac{\Delta(k\pi s / a, k\pi r / a)}{I_2(k\pi s / a)} - \right. \\
\left. - \frac{a}{k\pi}\eta_k \frac{I_2(k\pi r / a)}{I_2(k\pi s / a)}\right\} \sin \frac{k\pi z}{a} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.18}
$$

3°. Функцию $\Phi_3(r, z)$ ищем в виде

$$
\begin{gathered}
\Phi_3(r,z) = r^4(Mz + N) + Pz + Q + r^2 \sum_{k=1}^{\infty}(M_k \operatorname{sh} \lambda_k z + N_k \operatorname{ch} \lambda_k z) W_2(\lambda_k r) + \\
+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k I_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right) + Q_k K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)\right] \sin \frac{k\pi z}{a} \qquad \begin{pmatrix} s \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{2.19}
$$

Удовлетворив условиям (1.23) и (1.26), получим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{z=a} = 4r(Ma + N) + \sum_{k=1}^{\infty}(M_k \operatorname{sh} \lambda_k a + \\
+ N_k \operatorname{ch} \lambda_k a) \lambda_k W_1(\lambda_k r) = f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r) \qquad (s < r < R)
\end{gathered} \tag{2.20}
$$

$$
\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{z=0} = 4rN + \sum_{k=1}^{\infty} N_k \lambda_k W_1(\lambda_k r) = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r) \qquad (s < r < R) \tag{2.21}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)_{r=s} = -s^2 M - \frac{P}{s^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) + \right. \\
\left. + Q_k K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\right] \frac{k\pi}{a} \cos \frac{k\pi z}{a} = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos \frac{k\pi z}{a} \qquad (0 < z < a)
\end{gathered} \tag{2.22}
$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)_{r=R} = -R^2 M - \frac{P}{R^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[P_k I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right) + \right. \\
\left. + Q_k K_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)\right] \frac{k\pi}{a} \cos \frac{k\pi z}{a} = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a} \qquad (0 < z < a)
\end{gathered} \tag{2.23}
$$

Из (2.20) — (2.23) в силу единственности разложений имеем

$$Ma+N=\frac{f_0}{4},\qquad M_k \operatorname{sh}\lambda_k a+N_k \operatorname{ch}\lambda_k a=\frac{f_k}{\lambda_k},\qquad N=\frac{b_0}{4}$$

$$s^2M+\frac{P}{s^2}=-\frac{\eta_0}{2},\qquad P_kI_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)+Q_kK_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)=-\frac{a}{k\pi}\eta_k \tag{2.24}$$

$$R^2M+\frac{P}{R^2}=-\frac{c_0}{2},\qquad P_kI_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)+Q_kK_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)=-\frac{a}{k\pi}c_k$$

Из (2.24) находим,

$$\eta_0=\frac{f_0-b_0}{2as^2}(R^4-s^4)+\frac{R^2}{s^2}c_0 \tag{2.25}$$

Исключив при помощи соотношений (2.24) коэффициенты M, N, P, M_k, N_k, P_k, Q_k и имея в виду (2.25), получим

$$\Phi_3(r,z)=r^4\left(\frac{f_0-b_0}{4a}z+\frac{b_0}{4}\right)+\frac{R^2}{4a}[(b_0-f_0)R^2-2ac_0]z+ \tag{2.26}$$

$$+Q+r^2\sum_{k=1}^{\infty}[f_k\operatorname{sh}\lambda_kz+b_k\operatorname{sh}\lambda_k(a-z)]\frac{\operatorname{csh}\lambda_ka}{\lambda_k}W_2(\lambda_kr)+\qquad\begin{pmatrix}s\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix}$$

$$+\frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\eta_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)-c_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\sin(k\pi z/a)}{k\Delta(k\pi R/a,\,k\pi s/a)}$$

Удовлетворяя первым из условий (1.24), (1.25), в силу (1.19) найдем

$$\xi_0=q_0+\frac{2(b-a)g_0}{s^2}\qquad Q=\frac{a_0-b_0}{4}s^4 \tag{2.27}$$

Подставив (2.25) и (2.27) в формулы (2.9), (2.18) и (2.26), получим

$$\Phi_1(r,z)=r^4\left[\frac{q_0}{4}+\frac{g_0(b-z)}{2s^2}\right]+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(b-z)+\right.$$

$$\left.+q_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(z-a)\right]\frac{s}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)-$$

$$-\frac{(b-a)r^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{k}I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a}\qquad\begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\a\leqslant z\leqslant b\end{pmatrix} \tag{2.28}$$

$$\Phi_2(r,z)=r^4\left\{\left[\frac{q_0-a_0}{4}+\frac{(b-a)g_0}{2s^2}\right]\frac{z}{a}+\frac{a_0}{4}\right\}+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k\operatorname{sh}\frac{\mu_kz}{s}+a_k\operatorname{sh}\frac{\mu_k}{s}(a-z)\right]\frac{s}{\mu_k}\operatorname{csch}\frac{\mu_ka}{s}J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right)-$$

$$-\frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\eta_k}{k}\frac{I_2(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)}\sin\frac{k\pi z}{a}\qquad\begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

$$\Phi_3(r,z)=r^4\left(\frac{f_0-b_0}{4a}z+\frac{b_0}{4}\right)+\frac{R^2}{4a}[(b_0-f_0)R^2-4ac_0]z+\frac{a_0-b_0}{4}s^4+$$

$$+r^2\sum_{k=1}^{\infty}[f_k\operatorname{sh}\lambda_kz+b_k\operatorname{sh}\lambda_k(a-z)]\frac{\operatorname{csch}\lambda_ka}{\lambda_k}W_2(\lambda_kr)+\qquad\begin{pmatrix}s\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$$+\frac{ar^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[\eta_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)-c_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\Delta^{-1}\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)\sin\frac{k\pi z}{a}$$

§ 3. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений. В выражениях для функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 имеются две бесконечные последовательности неизвестных $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Покажем, что эти неизвестные вполне определяются, если потребовать выполнение также вторых условий сопряжения из (1.24) и (1.25).

1°. Потребуем чтобы $\Phi_1(r, z)$ и $\Phi_2(r, z)$ удовлетворяли условию

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a} \qquad (0 < r < s) \tag{3.1}$$

Из формул (2.28) и (2.29), составляя равенство (3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_k \operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s} - a_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s} - \right.$$
$$\left. - q_k\operatorname{csch}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right) + \frac{r^2}{2a}\left[\frac{g_0 b}{s^2} + \frac{q_0 - a_0}{2}\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\eta_k(-1)^k\frac{I_2(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)} - \sum_{k=1}^{\infty} g_k I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) \qquad (s < r < s) \tag{3.2}$$

Умножив обе части тождества (3.2) на $rJ_2(\mu_p r/s)$ и интегрируя в пределах $(0, s)$, будем иметь

$$\xi_p = \frac{1}{sJ_1(\mu_p)}\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_p(b-a)}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_p b}{s}\left\{\frac{2\mu_p}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_p^2/s^2 + k^2\pi^2/a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{s}\left[\left(\frac{q_0 - a_0}{2}s^2 + g_0 b\right)\frac{s^2}{2a\mu_p} + \mu_p\sum_{k=1}^{\infty} g_k\frac{1}{\mu_p^2/s^2 + k^2\pi^2/(b-a)^2}\right]\right\} +$$
$$+ a_p\operatorname{sh}\frac{\mu_p(b-a)}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_p b}{s} + q_p\operatorname{sh}\frac{\mu_p a}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_p b}{s} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.3}$$

При этом использованы формула (1.16) и значения интегралов

$$\int_0^s r^3 J_2\left(\mu_p\frac{r}{s}\right)dr = -\frac{s^4}{\mu_p}J_1(\mu_p) \tag{3.4}$$

$$\int_0^s rI_2(Ar)J_2\left(\mu_p\frac{r}{s}\right)dr = -\frac{\mu_p I_2(As)J_1(\mu_p)}{A^2 + \mu_p^2/s^2} \tag{3.5}$$

Введем обозначения

$$sJ_1(\mu_k)\operatorname{sh}\frac{\mu_k b}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k}{s}(b-a)\,\xi_k = L_k, \quad (-1)^{k+1}a\eta_k = \alpha F_k \tag{3.6}$$

где $0 < \alpha < 1$. Тогда бесконечную систему линейных уравнений (3.3) приведем к виду

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk}F_k + \beta_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \frac{1}{\mu_p^2 / s^2 + k^2\pi^2 / a^2} \tag{3.8}$$

$$\beta_p = a_p s J_1(\mu_p) \operatorname{csch} \frac{\mu_p a}{s} + q_p s J_1(\mu_p) \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s}(b-a) +$$

$$+ 2\left[\left(\frac{q_0 - a_0}{2} s^2 + g_0 b\right)\frac{s}{2a\mu_p} + \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\mu_p^2 / s^2 + k^2\pi^2 / (b-a)^2}\right] \tag{3.9}$$

2°. Потребуем, чтобы $\Phi_2(r, z)$ и $\Phi_3(r, z)$ удовлетворяли условию

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r}\right)_{r=s} \qquad (0 < z < a) \tag{3.10}$$

Из формул (2.29) и (2.30), составляя равенство (3.10), будем иметь

$$\left[(q_0 - a_0 + b_0 - f_0)s + \frac{2g_0(b-a)}{s}\right]\frac{z}{a} + (a_0 - b_0)s + \qquad (0 < z < a)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{csch} \frac{\mu_k a}{s} J_1(\mu_k) \left[\xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{s} + a_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k(a-z)}{s}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{csch} \lambda_k a W_1(\lambda_k s)\left[f_k \operatorname{sh} \lambda_k z + b_k \operatorname{sh} \lambda_k (a-z)\right] =$$

$$= \frac{a}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\eta_k I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right) I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{a}\right) - c_k\right] \frac{\sin(k\pi z / a)}{k\Delta(k\pi R / a,\ k\pi s / a)} \tag{3.11}$$

При этом использованы рекуррентные соотношения для бесселевых функций и формула Вронского [4]

$$K_{n+1}(x) I_n(x) + K_n(x) I_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \tag{3.12}$$

Умножая тождество (3.11) на $(2 / a)\sin(p\pi z / a)$ и интегрируя по z в пределах $(0, a)$, после некоторых преобразований получим

$$\eta_p = (-1)^{p+1} \frac{2s}{a} \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{J_1(\mu_k)}{\mu_k^2 / s^2 + p^2\pi^2 / a^2} +$$

$$+ c_p \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} + \frac{2}{a} s\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} \left\{\left[1 + (-1)^{p+1}\right](a_0 - b_0)s + \right.$$

$$+ (-1)^{p+1}\left[(q_0 - a_0 + b_0 - f_0)s^2 + 2g_0(b-a)\right]\frac{1}{s} + \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$\left. + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k J_1(\mu_k)}{\mu_k^2 / s^2 + p^2\pi^2 / a^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k + (-1)^{p+1} f_k}{\lambda_k^2 + p^2\pi^2 / a^2} W_1(\lambda_k s)\right]\right\} \tag{3.13}$$

Введя в (3.13) обозначения (3.6), эту бесконечную систему приводим к виду

$$F_p = \sum_{k=1}^{\infty} C_{kp} L_k + \gamma_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{3.14}$$

где

$$C_{kp}=\frac{2}{\alpha}\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)\frac{I_2(p\pi s\,/\,a)}{I_2(p\pi R\,/\,a)}\times$$

$$\times\operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s}\operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s}\operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s}\frac{1}{\mu_k^2\,/\,s^2+p^2\pi^2\,/\,a^2}\tag{3.15}$$

$$\gamma_p=\frac{2}{\alpha}\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\ \frac{p\pi s}{a}\right)\frac{I_2(p\pi s\,/\,a)}{I_2(p\pi R\,/\,a)}\Big\{(q_0-f_0)s^2+(-1)^{p+1}(a_0-b_0)s^2+$$

$$+2g_0(b-a)+s\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kJ_1(\mu_k)}{\mu_k^2\,/\,s^2+p^2\pi^2\,/\,a^2}-$$

$$-s\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k+(-1)^{p+1}b_k}{\lambda_k^2+p^2\pi^2\,/\,a^2}W_1(\lambda_k s)\Big\}+(-1)^{p+1}\frac{a}{\alpha}\frac{I_2(p\pi s\,/\,a)}{I_2(p\pi R\,/\,a)}c_p\tag{3.16}$$

Совокупность двух бесконечных систем уравнений (3.7) и (3.14) можно привести к одной системе

$$Z_p=\sum_{k=1}^{\infty}A_{pk}Z_k+B_p\qquad(p=1,2,\ldots)\tag{3.17}$$

если ввести обозначения

$$\begin{gathered}Z_{2p-1}=L_p,\qquad Z_{2p}=F_p,\qquad B_{2p-1}=\beta_p,\qquad B_{2p}=\gamma_p\\ A_{2p,\,2k}=0,\qquad A_{2p-1,\,2k-1}=0,\qquad A_{2p-1,\,2k}=a_{pk},\qquad A_{2p,\,2k-1}=C_{pk}\end{gathered}\tag{3.18}$$

§ 4. Исследование бесконечной системы линейных уравнений. Докажем, что введенное в обозначении (3.6) $0<\alpha<1$ число можно выбрать таким образом, чтобы система (3.17) была вполне регулярной.

Одновременно покажем, что совокупность свободных членов $\{B_p\}$ ограничена. Это даст нам возможность, пользуясь теорией бесконечных, вполне регулярных систем линейных уравнений [6], решить систему (3.17) с заданной точностью, т. е. решить эффективно уравнение (1.2) кручения ступенчатого вала при граничных условиях (1.10).

1°. Предварительно вычислим сумму следующего ряда:

$$S_k=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_p^2\,/\,s^2+\pi^2k^2\,/\,a^2}\tag{4.1}$$

где μ_p — корни уравнения $J_2(x)=0$.

Разложим функцию $I_1(k\pi r\,/\,a)$ по системе функций $\{J_1(\mu_p r\,/\,s)\}$ на интервале $(0, s)$. Такое разложение должно иметь вид [5]:

$$I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)=A_0r+\sum_{p=1}^{\infty}A_pJ_1\left(\mu_p\frac{r}{s}\right)\tag{4.2}$$

При этом в силу (1.15)

$$A_p=\frac{2}{[sJ_1(\mu_p)]^2}\int_0^s rI_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)J_1\left(\mu_p\frac{r}{s}\right)dr\tag{4.3}$$

Интеграл, стоящий в правой части (4.3), имеет значение

$$\int_0^s rI_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)J_1\left(\frac{\mu_p}{s}r\right)dr = \frac{1}{\mu_p{}^2 / s^2 + k^2\pi^2 / a^2}\,\frac{k\pi s}{a}\,I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)J_1(\mu_p) \qquad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим

$$A_p = \frac{2k\pi}{as}\,\frac{1}{\mu_p{}^2 / s^2 + k^2\pi^2 / a^2}\,\frac{I_2(k\pi s / a)}{J_1(\mu_p)} \qquad (p = 1, 2, \ldots) \qquad (4.5)$$

Для определения A_0 умножим обе части (4.2) на r^2 и интегрируем по r в интервале $(0, s)$. Замечая далее, что

$$\int_0^s r^2 J_1\left(\mu_p\frac{r}{s}\right)dr = 0, \quad \int_0^s r^2 I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right)dr = \frac{as^2}{k\pi}I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) \qquad (4.6)$$

получим

$$A_0 = \frac{4a}{k\pi s^2}I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) \qquad (4.7)$$

Подставляя в (4.2) значение A_p из (4.5) и A_0 из (4.7), имеем $(0 < r < s)$

$$I_1\left(\frac{k\pi r}{a}\right) = \frac{4ar}{k\pi s^2}I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) + \frac{2k\pi}{as}I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_p{}^2 / s^2 + \pi^2k^2 / a^2}\,\frac{J_1(\mu_p r / s)}{J_1(\mu_p)} \qquad (4.8)$$

Но (4.8) справедливо [5] и для значения $r = s$:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_p{}^2 / s^2 + \pi^2k^2 / a^2} = \frac{as}{2k\pi}\,\frac{I_3(k\pi s / a)}{I_2(k\pi s / a)} \qquad (4.9)$$

При этом использовано соотношение

$$I_1(x) - \frac{4}{x}I_2(x) = I_3(x) \qquad (4.10)$$

2°. Заметим также, что функции $K_2(x)$, $I_2(x)$ неотрицательны и их отношение $F(x) = K_2(x) / I_2(x)$ с возрастанием x убывает. Действительно, при $x > 0$

$$F'(x) = \frac{1}{I_2{}^2(x)}[K_2'(x)I_2(x) - K_2(x)I_2'(x)] = -\frac{1}{xI_2{}^2(x)} < 0$$

При этом использовано соотношение

$$I_2'(x)K_2(x) - I_2(x)K_2'(x) = \frac{1}{x}$$

Отсюда следует, что

$$0 < K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) - K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) =$$

$$= I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)\left[\frac{K_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi s / a)} - \frac{K_2(p\pi R / a)}{I_2(p\pi R / a)}\right] < I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) \qquad (4.11)$$

Далее нетрудно видеть, что

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \infty) \qquad (4.12)$$

Теперь докажем, что бесконечная система линейных уравнений (3.17) удовлетворяет условию вполне регулярности, если выбрать $\alpha = 2^{-1/2}$. Рассмотрим отдельно два следующих случая.

Первый случай

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p-1,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{2\mu_p\alpha}{as} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_p^2/s^2 + k^2\pi^2/a^2} =$$

$$= \alpha \left(\operatorname{cth} \frac{\mu_p a}{s} - \frac{s}{\mu_p a} \right) \leqslant \alpha \tag{4.13}$$

в силу обозначений (3.8), (3.17) и неравенства (4.12), причем использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right) \tag{4.14}$$

Второй случай

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,\,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |C_{pk}| =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 \Delta \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a} \right) \frac{I_2(p\pi s/a)}{I_2(p\pi R/a)} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \times$$

$$\times \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s} \frac{1}{\mu_k^2/s^2 + p^2\pi^2/a^2} \tag{4.15}$$

Но, как нетрудно видеть:

$$\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-a)}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s} \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.16}$$

и в силу неравенства (4.11)

$$\Delta \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a} \right) \frac{I_2(p\pi s/a)}{I_2(p\pi R/a)} < I_2 \left(\frac{p\pi s}{a} \right) K_2 \left(\frac{p\pi s}{a} \right) \tag{4.17}$$

Из (4.15), (4.16), (4.17) и формулы (4.9) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,\,k}| \leqslant \frac{1}{2\alpha} \frac{p\pi s}{a} I_3 \left(\frac{p\pi s}{a} \right) K_2 \left(\frac{p\pi s}{a} \right) \tag{4.18}$$

Но из соотношения Вронского $I_3(x) K_2(x) + I_2(x) K_3(x) = x^{-1}$ в силу неотрицательности обоих слагаемых имеем

$$x I_3(x) K_2(x) < 1 \tag{4.19}$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,\,k}| \leqslant \frac{1}{2\alpha} \tag{4.20}$$

Из оценок (4.13) и (4.20), потребуя, чтобы $\alpha = 2^{-1/2}$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{p,\,k}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{4.21}$$

тем самым доказана вполне регулярность системы (3.17).

3°. Докажем, что совокупность свободных членов $\{B_p\}$ системы (3.17) ограничена. Из теории бесселевых функций известно:

а) При $x \to +\infty$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \qquad K_n(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} \tag{4.22}$$

б) При $x \to \infty$ (для n — целого)

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_n(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4}\right) \tag{4.23}$$

в) Если $t^{1/2} f(t)$ имеет ограниченное полное изменение на (a, b), где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, то при $\lambda \to \infty$

$$\int_a^b t f(t)\, J_\nu(\lambda t)\, dt = O(\lambda^{-3/2}) \tag{4.24}$$

при этом (4.24) сохраняет силу, если в нем заменить $J_\nu(\lambda t)$ через $Y_\nu(\lambda t)$.

г) Для корней μ_k уравнения $J_2(x) = 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\mu_k = \pi\left(k + \frac{3}{4}\right) + O(k^{-1}) \tag{4.25}$$

а для корней уравнения $J_2(sx)\, Y_2(Rx) - J_2(Rx)\, Y_2(sx) = 0$ имеем

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{R - s} + O(k^{-1}) \qquad \text{при} \quad k \to \infty \tag{4.26}$$

Имея в виду, что

$$\int_0^1 t J_2^2(\mu_k t)\, dt = \frac{1}{2} J_1^2(\mu_k)$$

из разложений (1.12) и из формул (4.23), (4.24) будем иметь

$$a_k = O(\mu_k^{-1/2}), \qquad q_k = O(\mu_k^{-1/2}) \qquad \text{при } k \to \infty \tag{4.27}$$

Для оценки порядка b_k и f_k в разложениях (1.12) заметим, что

$$\omega_k = \int_s^R t W_1^2(\lambda_k t)\, dt = \frac{1}{2}\{[RW_1(\lambda_k R)]^2 - [sW_1(\lambda_k s)]^2\}$$

$$W_1(\lambda_k s) = \frac{J_1(\lambda_k s)\, Y_2(\lambda_k R) - J_2(\lambda_k R)\, Y_1(\lambda_k s)}{J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)} \sim \frac{O(k^{-1})}{\lambda_k J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)} \tag{4.28}$$

в силу (4.23) и (4.26). Далее, имея в виду, что

$$W_1(\lambda_k R) = \frac{1}{\lambda_k R J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)}$$

получим

$$\frac{1}{\omega_k} = O\{[\lambda_k J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)]^2\} \tag{4.29}$$

Из разложений (1.12) имеем

$$b_k = \frac{1}{\omega_k} \int_s^R t \varphi_1(t)\, W_1(\lambda_k t)\, dt \quad f_k = \frac{1}{\omega_k} \int_s^R t \varphi_3(t)\, W_1(\lambda_k t)\, dt$$

Отсюда в силу (4.23), (4.24) и (4.28) заключаем, что при $k \to \infty$

$$
\begin{aligned}
b_k &= O\left\{\frac{[\lambda_k J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)]^2}{\lambda_k}\right\} = O(\lambda_k^{-1}) \\
f_k &= O\left\{\frac{[\lambda_k J_2(\lambda_k R)\, Y_2(\lambda_k R)]^2}{\lambda_k}\right\} = O(\lambda_k^{-1})
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Кроме того, из (4.26), (4.28) и (4.30) следует

$$
b_k W_1(\lambda_k s) = O(\lambda_k^{-2}), \qquad f_k W_1(\lambda_k s) = O(\lambda_k^{-2}) \tag{4.31}
$$

Наконец, отметим, что из разложений (1.11) следует

$$
c_k = O(k^{-1}), \qquad g_k = O(k^{-1}) \tag{4.32}
$$

так как функции $\varphi_2(z)$ и $\varphi_4(z)$ имеют ограниченное изменение в соответствующих промежутках. Основываясь на приведенных оценках, можно установить не только ограниченность последовательности $\{B_p\}$, но и ее стремление к нулю при $p \to \infty$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $B_{2p-1} = \beta_p$, где β_p определяется из (3.9). Из (3.9), (4.22), (4.23), (4.27) и (4.32), очевидно, имеем

$$
B_{2p-1} = O(\mu_p^{-1}) + \mu_p O\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,[\mu_p^2 / s^2 + k^2\pi^2 / (b-a)^2]}\right\}
$$

Но, как нетрудно показать, при $\mu_p \to \infty$

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,[\mu_p^2 / s^2 + k^2\pi^2 / (b-a)^2]} < O(\mu_p^{-(1+\delta)})
$$

где $0 < \delta < 1$ — любое. Следовательно, имея в виду (4.25), получим

$$
B_{2p-1} = O(p^{-\delta}) \quad \text{при } p \to \infty \qquad (0 < \delta > 1) \tag{4.33}
$$

2. Пусть $B_{2p} = \gamma_p$, где γ_p определяется из формулы (3.16). Отдельно оценим члены этой формулы. Заметим, что в силу (4.17) и (4.22)

$$
p\left|\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)\right| \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} = O(1) \text{ при } p \to \infty
$$

Следовательно, из (3.16), (4.23), (4.27), (4,31) и (4.32) будем иметь

$$
B_{2p} = O\left(\frac{1}{p}\right) + pO\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k\,[\mu_k^2 / s^2 + p^2\pi^2 / a^2]}\right\} + pO\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2\,[\lambda_k^2 + p^2\pi^2 / a^2]}\right\} \tag{4.34}
$$

Имея в виду (4.25) и (4.26), можно показать, что при $p \to \infty$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k\,[\mu_k^2 / s^2 + p^2\pi^2 / a^2]} < O(p^{-(\delta+1)}) \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2\,[\lambda_k^2 + p^2\pi^2 / a^2]} < O(p^{-(\delta+1)})
\end{aligned}
\qquad (0 < \delta < 1) \tag{4.35}
$$

Из оценок (4.35) будем иметь при $p \to \infty$

$$
B_{2p} = O(p^{-\delta}) \qquad (0 < \delta < 1) \tag{4.36}
$$

§ 5. Определение напряжений. Используя обозначения (3.6) из формул для функций напряжений (2.29), (2.30) и (2.31), получим

$$\Phi_1(r, z) = r^4\left[\frac{q_0}{4} + \frac{g_0(b-z)}{2s^2}\right] + r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{J_1(\mu_k)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k a}{s}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(b-z)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} + \right.$$

$$\left. + s q_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(z-a)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\right]\frac{J_2(\mu_k r/s)}{\mu_k} -$$

$$-\frac{r^2(b-a)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{k}\,I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ a\leqslant z\leqslant b\end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$\Phi_2(r, z) = r^4\left\{\left[\frac{q_0-a_0}{2} + \frac{g_0(b-a)}{s^2}\right]\frac{z}{2a} + \frac{a_0}{4}\right\} + \tag{5.2}$$

$$+ r^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{J_1(\mu_k)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k z}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} + \right. \qquad \begin{pmatrix}0\leqslant r\leqslant s\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix}$$

$$\left. + s a_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(a-z)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k a}{s}\right]\frac{J_2(\mu_k r/s)}{\mu_k} - \frac{r^2}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}F_k\frac{I_0(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)}\sin\frac{k\pi z}{a}$$

$$\Phi_3(r, z) = r^4\left(\frac{f_0-b_0}{4a}z + \frac{b_0}{4}\right) + [(b_0-f_0)R^2 - 2ac_0]\frac{R^2 z}{4a} + \frac{a_0+b_0}{4}s^4 +$$

$$+ r^2\sum_{k=1}^{\infty}[f_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k z + b_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k(a-z)]\frac{\mathrm{csch}\,\lambda_k a}{\lambda_k}W_2(\lambda_k r) + \qquad \begin{pmatrix}s\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant a\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$$+\frac{r^2}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2}}F_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - ac_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)\right\}\frac{\sin(k\pi z/a)}{k\Delta(k\pi R/a,\ k\pi s/a)}$$

Пользуясь формулами (1.1) для определения напряжений при кручении вала и рекуррентными формулами бесселевых функций, из (5.1)—(5.3) получим:

для области I (фиг. 2)

$$\tau_z(r, z) = r\left[q_0 + \frac{2g_0(b-z)}{s^2}\right] + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{sJ_1(\mu_k)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k a}{s}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(b-z)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} + \right.$$

$$\left. + q_k\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k(z-a)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\right]J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}g_k\,I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \tag{5.4}$$

$$\tau_r(r, z) = \frac{g_0}{2}\frac{r^2}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{sJ_1(\mu_k)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\mu_k a}{s}\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu_k(b-z)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} - \right.$$

$$\left. - q_k\,\mathrm{ch}\,\frac{\mu_k(z-a)}{s}\,\mathrm{csch}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}g_k I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)\cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \tag{5.5}$$

для области II

$$\tau_z(r, z) = r\left\{\left[q_0 - a_0 + \frac{2g_0(b-a)}{s^2}\right]\frac{z}{a} + a_0\right\} + \tag{5.6}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{sJ_1(\mu_k)}\,\text{sh}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\,\text{sh}\,\frac{\mu_k}{s}\,z\,\text{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} +\right.$$

$$\left.+ a_k\,\text{sh}\,\frac{\mu_k(a-z)}{s}\,\text{csch}\,\frac{\mu_k a}{s}\right]J_1\left(\frac{\mu_k}{s}r\right) - \frac{1}{a\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}F_k\,\frac{I_1(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)}\sin\frac{k\pi z}{a}$$

$$\tau_r(r, z) = \left[\frac{a_0 - q_0}{2} - \frac{g_0(b-a)}{s^2}\right]\frac{r^2}{2a} - \tag{5.7}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{L_k}{sJ_1(\mu_k)}\,\text{sh}\,\frac{\mu_k(b-a)}{s}\,\text{ch}\,\frac{\mu_k z}{s}\,\text{csch}\,\frac{\mu_k b}{s} -\right.$$

$$\left.- a_k\,\text{ch}\,\frac{\mu_k(a-z)}{s}\,\text{csch}\,\frac{\mu_k a}{s}\right]J_2\left(\mu_k\frac{r}{s}\right) + \frac{1}{a\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}F_k\,\frac{I_2(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)}\cos\frac{k\pi z}{a}$$

для области III

$$\tau_z(r, z) = r\left(\frac{f_0 - b_0}{a}z + b_0\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}[f_k\,\text{sh}\,\lambda_k z + b_k\,\text{sh}\,\lambda_k(a-z)]\,\text{csch}\,\lambda_k a W_1(\lambda_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{F_k}{a\sqrt{2}}\,\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - c_k\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\sin(k\pi z/a)}{\Delta(k\pi R/a, k\pi s/a)}$$

$$\tau_r(r, z) = \frac{b_0 - f_0}{4a}r^2 - \left(\frac{b_0 - f_0}{4a}R^2 - \frac{c_0}{2}\right)\frac{R^2}{r^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}[f_k\,\text{ch}\,\lambda_k z - b_k\,\text{ch}\,\lambda_k(a-z)]\,\text{csch}\,\lambda_k a W_2(\lambda_k r) - \tag{5.9}$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{k+1}\frac{F_k}{a\sqrt{2}}\,\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) - c_k\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)\right]\frac{\cos(k\pi z/a)}{\Delta(k\pi R/a, k\pi s/a)}$$

где введено обозначение

$$\Omega(x, y) = I_1(x)K_2(y) + K_1(x)I_2(y) \tag{5.10}$$

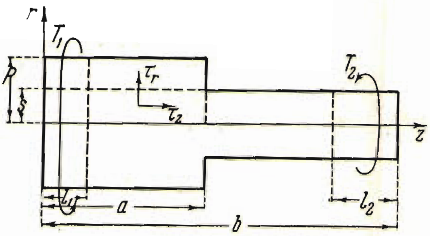
Формулами (5.4)—(5.9) определяются напряжения в любой точке осевого сечения вала.

Заметим, что ряды, входящие в (5.4)—(5.9), на линиях сопряжения обладают слабой сходимостью. Для более точного определения напряжений на этих линиях нужно при решении бесконечной системы линейных уравнений (3.17) взять укороченную систему [6] с бóльшим числом уравнений и оценить первые значения неизвестных точнее.

§ 6. Вал, скручиваемый моментами, равномерно распределенными на двух участках боковой поверхности. 1°. Рассмотрим задачу о кручении ступенчатого цилиндрического вала, когда скручивающая нагрузка приложена на двух участках его боковой поверхности (фиг. 3).

Пусть нагрузка приложена на участках длины l_1 и l_2 по концам вала по следующему закону:

$$
\begin{aligned}
&\tau_z(r, 0) = 0 && (0 \leqslant r \leqslant R) \\
&\tau_z(r, a) = 0 && (s \leqslant r \leqslant R) \\
&\tau_r(r, b) = 0 && (0 \leqslant r \leqslant s) \\
&\tau_r(R, z) = -T_1 && (0 \leqslant z \leqslant l_1) \quad (6.1) \\
&\tau_r(R, z) = 0 && (l_1 \leqslant z \leqslant a) \\
&\tau_r(s, z) = 0 && (a \leqslant z \leqslant b - l_2) \\
&\tau_r(s, z) = T_2 && (b - l_2 \leqslant z \leqslant b)
\end{aligned}
$$



Фиг. 3

В силу симметрии на оси вала должно выполняться условие

$$\tau_z(0, z) = \tau_r(0, z) = 0$$

Пользуясь разложениями (1.11) и (1.12), имеем

$$a_k = b_k = f_k = g_k = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{6.2}$$

$$
\begin{aligned}
c_0 &= -\frac{2T_1 l_1}{a}, & c_k &= -\frac{2T_1}{k\pi} \sin \frac{k\pi l_1}{a} \\
g_0 &= \frac{2T_2 l_2}{b - a}, & g_k &= \frac{2T_2}{k\pi} (-1)^k \sin \frac{k\pi l_2}{b - a}
\end{aligned}
\qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{6.3}
$$

Подставив (6.2) и (6.3) в (1.19), получим

$$T_1 l_1 R^2 = T_2 l_2 s^2 \tag{6.4}$$

Условие (6.4) обеспечивает равенство крутящих моментов, действующих по концам вала.

Подставив коэффициенты (6.2) и (6.3) в (3.8), (3,9), (3.15) и (3.16) для бесконечной системы (3.17) будем иметь

$$A_{2p-1, 2k} = a_{pk} = \frac{\mu_p \sqrt{2}}{sa} \frac{1}{\mu_p^2 / s^2 + k^2\pi^2 / a^2} \tag{6.5}$$

$$A_{2p, 2k-1} = C_{pk} = 2\sqrt{2} \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} \times \tag{6.6}$$

$$\times \frac{1}{\mu_k^2 / s^2 + p^2\pi^2 / a^2} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b - a)}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_k b}{s}$$

$$B_{2p-1} = \beta_p = \frac{2T_2 s}{\mu_p} \left[\frac{l_2}{a} + \operatorname{sh} \frac{\mu_p l_2}{s} \operatorname{csch} \frac{\mu_p (b - a)}{s}\right] \tag{6.7}$$

$$B_{2p} = \gamma_p = 2\sqrt{2}\, T_1 l_1 \frac{I_2(p\pi s / a)}{I_2(p\pi R / a)} \left[4 \frac{R^2}{s^2} \Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) + (-1)^p \frac{a}{p\pi l_1} \sin \frac{p\pi l_1}{a}\right] \tag{6.8}$$

При этом использована формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin kx}{k\,(k^2+a^2)} = \frac{\pi}{2\,a^2}\left[\frac{x}{\pi} - \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}\right] \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi) \tag{6.9}$$

Из (6.7) и (6.8) имеем

$$|B_{2p-1}| \leqslant \frac{2T_2 s}{\mu_1}\left(\frac{l_2}{a}+1\right) = \frac{2T_1 l_1 R^2}{s\mu_1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{l_1}\right) \tag{6.10}$$

где $\mu_1 = 5.13562\ldots$ и

$$|B_{2p}| \leqslant 2T_1 l_1 \sqrt{2}\left\{1+4\frac{R^2}{s^2}\,\Delta\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)\right\}\frac{I_2(p\pi s/a)}{I_2(p\pi R/a)} \tag{6.11}$$

Используя неравенство (4.17) и заметив, что

$$I_2(x)\,K_2(x) < \frac{1}{4} \tag{6.12}$$

получим

$$|B_{2p}| \leqslant 2\sqrt{2}\,T_1 l_1\left[\frac{I_2(\pi s/a)}{I_2(\pi R/a)} + \frac{R^2}{s^2}\right] \tag{6.13}$$

Для системы (3.17) будем иметь

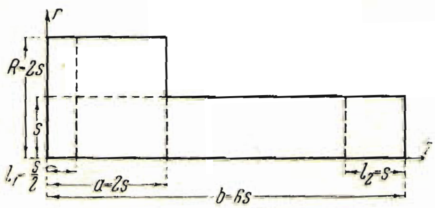
$$|B_p| \leqslant \max\{|B_{2p-1}|, |B_{2p}|\} \qquad (p=1, 2, \ldots) \tag{6.14}$$

2°. В качестве численного примера рассмотрим ступенчатый вал с размерами $R = a = 2s$, $b = 6s$.

При этом примем $l_2 = 2l_1 = s$ (обозначения показаны на фиг. 4).

Для этого случая согласно (6.14) имеем

$$|B_p| \leqslant 7.0711\,T_1 s \tag{6.15}$$



Фиг. 4

Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений[6], получим следующие оценки для неизвестных:

$$\begin{aligned}
1.665\,T_1 s &= L_1^- \leqslant L_1 \leqslant L_1^+ = 2.141\,T_1 s\\
4.155\,T_1 s &= F_1^- \leqslant F_1 \leqslant F_1^+ = 4.394\,T_1 s\\
1.251\,T_1 s &= L_2^- \leqslant L_2 \leqslant L_2^+ = 1.870\,T_1 s\\
3.192\,T_1 s &= F_2^- \leqslant F_2 \leqslant F_2^+ = 3.594\,T_1 s\\
1.001\,T_1 s &= L_3^- \leqslant L_3 \leqslant L_3^+ = 1.700\,T_1 s\\
2.394\,T_1 s &= F_3^- \leqslant F_3 \leqslant F_3^+ = 3.079\,T_1 s
\end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
\beta_k &\leqslant L_k \leqslant 1.392\,T_1 s\\
\gamma_k &\leqslant F_k \leqslant 5.154\,T_1 s
\end{aligned}\right. \qquad (k=4, 5\ldots)$$

Подставив коэффициенты разложений из (6.2) и (6.3) в формулы (5.1)—(5.3) для функции напряжений, получим

$$\Phi_1(r, z) = \frac{T_2 l_2}{s^2} r^4 \frac{b-z}{b-a} + \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ a \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{\mu_k J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-z)}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_2\left(\frac{\mu_k r}{s}\right) -$$

$$- \frac{2T_2}{\pi^2}(b-a) r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right) I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) \sin\frac{k\pi l_2}{b-a} \sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a}$$

$$\Phi_2(r, z) = \frac{T_2 l_2}{s^2} r^4 \frac{z}{a} + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{\mu_k J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_2\left(\frac{\mu_k}{s} r\right) -$$

$$- \frac{r^2}{\sqrt{2}\,\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} F_k \frac{I_2(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)} \sin\frac{k\pi z}{a} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant s \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

$$\Phi_3(r, z) = T_1 l_1 R^2 \frac{z}{a} + \frac{r^2}{\sqrt{2}\,\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+1}}{k} F_k \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) + \right. \tag{6.19}$$

$$\left. + 2\sqrt{2}\frac{T_1 a}{\pi k^2} \sin\frac{k\pi l_1}{a} \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)\right] \frac{\sin(k\pi z/a)}{\Delta(k\pi R/a,\ k\pi s/a)} \qquad \begin{pmatrix} s \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix}$$

Для напряжений τ_z и τ_r из (5.4)—(5.9) получим следующие формулы:

для области I

$$\tau_z(r, z) = \frac{4T_2 l_2}{s^2} \frac{b-z}{b-a} r + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-z)}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) -$$

$$- \frac{2T_2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} I_1\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right) I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) \sin\frac{k\pi l_2}{b-a} \sin\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \tag{6.20}$$

$$\tau_r(r, z) = \frac{T_2 l_2}{b-a} \frac{r^2}{s^2} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k a}{s} \operatorname{ch}\frac{\mu_k(b-z)}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_2\left(\frac{\mu_k r}{s}\right) +$$

$$+ \frac{2T_2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^k}{k} I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right) I_2^{-1}\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right) \sin\frac{k\pi l_2}{b-a} \cos\frac{k\pi(z-a)}{b-a} \tag{6.21}$$

для области II

$$\tau_z(r, z) = \frac{4T_2 l_2}{as^2} rz + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s} \operatorname{sh}\frac{\mu_k z}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right) -$$

$$- \frac{1}{a\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_k \frac{I_1(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)} \sin\frac{k\pi z}{a_1} \tag{6.22}$$

$$\tau_r(r, z) = -\frac{T_2 l_2}{as^2} r^2 - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k}{J_1(\mu_k)} \operatorname{sh}\frac{\mu_k(b-a)}{s} \operatorname{ch}\frac{\mu_k z}{s} \operatorname{csch}\frac{\mu_k b}{s} J_2\left(\frac{\mu_k r}{s}\right) +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_k \frac{I_2(k\pi r/a)}{I_2(k\pi s/a)} \cos\frac{k\pi z}{a} \tag{6.23}$$

для области III

$$\tau_z(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{a\sqrt{2}} F_k \Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2T_1}{k\pi} \sin\frac{k\pi l_1}{a} \Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) \right\} \frac{\sin(k\pi z / a)}{\Delta(k\pi R / a, k\pi s / a)} \qquad (6.24)$$

$$\tau_r(r, z) = -\frac{T_1 l_1}{a} \frac{R^2}{r^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{a\sqrt{2}} F_k \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2T_1}{k\pi} \sin\frac{k\pi l_1}{a} \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) \right\} \frac{\cos(k\pi z / a)}{\Delta(k\pi R / a, k\pi s / a)} \qquad (6.25)$$

Подставив сюда коэффициенты $\{L_k\}$ и $\{F_k\}$, с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений τ_z и τ_r.

Таблица 1

r/s		0.0	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0
$\frac{\tau_z(r, 4s)}{T_1}$		0	1.996	4.000	8.000	—	—
$\frac{\tau_z(r, s)}{T_1}$	С избытком С недостатком	0	0.256 0.223	0.471 0.379	0.620 0.545	0.721 0.711	0.929 0.924
$\frac{\tau_r(r, 4s)}{T_1}$		0	0.001	0.003	0	—	—
$\frac{\tau_r(r, s)}{T_1}$	С избытком С недостатком	0	—0.027 —0.030	—0.102 —0,123	—0.275 —0.360	—0.177 —0.187	0

В табл. 1 приведены некоторые значения напряжений τ_z и τ_r для ступенчатого вала (фиг. 4).

Отметим, что аналогичным методом может быть решена также задача о кручении полого ступенчатого вала при симметричном нагружении и вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы.

Поступила 23 IV 1951

Сектор математики и механики Академии Наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
2. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
3. Солянник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат. М.— Л. 1949.
4. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат. М. 1949.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госиноиздат. М. 1949.
6. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат. М.— Л. 1949.
7. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ОГИЗ. Гостехиздат. М.— Л. 1948.
8. Динник А. Н. Кручение. ОНТИ. 1938.