Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЗВУКА ОТ ПЛОСКОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

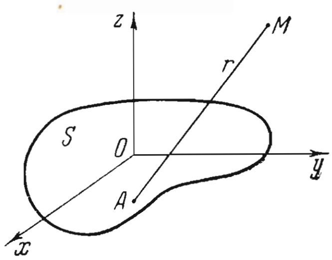
А. А. Каспарьянц

(Одесса)

В работе рассматриваются некоторые нестационарные процессы изменения звукового поля, полученные при действии плоского излучателя, пульсирующего по гармоническому закону в безграничной массе идеального газа.

§ 1. О форме распадения стационарного звукового поля. Пусть стационарное поле образовано действием плоского поршневого излучателя, пульсирующего в безграничной массе идеального (без внутреннего трения) газа.

Другими словами, пусть в непроницаемой плоскости xy вырезана площадка S произвольной формы (фиг. 1), которая совершает гармонические колебания малой амплитуды в направлении оси z.



Фиг. 1

Потенциал скорости стационарного движения газа, которое возникает при этом, может быть получен как потенциал простого слоя звуковых источников, распределенных по площадке (S); его выражение в комплексной форме имеет вид:

$$\Phi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS \qquad (1.1)$$

где v — амплитуда скорости поршневого излучателя, $k = \sigma / c$ — волновое число, σ — частота колебаний диска; c — скорость звука, σt_0 — начальная фаза, r — расстояние от рассматриваемой в пространстве точки $M(x, y, z)$ до переменной точки интегрирования A на площадке S.

Излучатели, поле скоростей которых определяется формулой (1.1), в литературе по акустике носят название плоских поршневых излучателей нулевого порядка и отличаются отсутствием явлений диффракции у границы излучателя. Пусть теперь в момент $t = 0$ действие излучателя прекращается в произвольной фазе σt_0.

Задача состоит в том, чтобы найти потенциал скорости $\varphi(x, y, z; t)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$ в момент t после прекращения действия излучателя.

Иными словами, необходимо найти решение волнового уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = \triangle\varphi \tag{1.2}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} \varphi_{t=0} &= \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma t_0} \iint\limits_S \frac{e^{-ikr}}{r}\, dS \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} &= \frac{v}{2\pi} i\sigma e^{i\sigma t_0} \iint\limits_S \frac{e^{-ikr}}{r}\, dS \end{aligned} \tag{13}$$

Как известно, решение этой задачи можно представить в форме сферических потенциалов [1] в следующем виде:

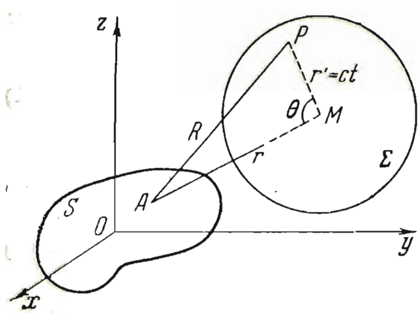
$$\varphi(x, y, z; t) = e^{i\sigma t_0} \frac{v}{2\pi}\frac{1}{4\pi c^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\iint\limits_\Sigma d\Sigma \iint\limits_S \frac{e^{-ikR}}{R}\, dS + \right.$$

$$\left. + \frac{i\sigma}{t}\iint\limits_\Sigma d\Sigma \iint\limits_S \frac{e^{-ikR}}{R}\, dS\right\} \tag{1.4}$$

где Σ — сфера радиуса $r' = ct$ с центром в точке $M(x, y, z)$ (фиг. 2). Формулы (1.4) можно привести к виду, который позволяет судить о качественной стороне процесса распадания. Для этого воспользуемся следующими представлениями [2, 3]

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikR}}{R} &= \frac{e^{1/_4\pi i}}{\sqrt{rr'}}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,K_{m+\frac{1}{2}}(ikr)\,I_{m+\frac{1}{2}}(kr')\,P_m(\cos\theta) \quad \text{для } r' < r \\ \frac{e^{-ikR}}{R} &= \frac{e^{1/_4\pi i}}{\sqrt{rr'}}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,K_{m+\frac{1}{2}}(ikr')\,I_{m+\frac{1}{2}}(kr)\,P_m(\cos\theta) \quad \text{для } r' > r \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $K_{m+\frac{1}{2}}$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода, $I_{m+\frac{1}{2}}$ — функция Бесселя 1-го рода, P_m — полином Лежандра соответствующих порядков.



Фиг. 2

Обозначим наименьшее и наибольшее значения r через r_1 и r_2 и будем различать следующие промежутки времени:

$$0 \leqslant t < \frac{r_1}{c}, \quad \frac{r_1}{c} \leqslant t < \frac{r_2}{c}, \quad t \geqslant \frac{r_2}{c}$$

(в том случае, когда рассматриваемая точка $M(x, y, z)$ находится над излучителем, $r_1 = z$).

В промежутке времени $0 \leqslant t < r_1/c$ в результате подстановки выражения (1.5) в формулу (1.4) получим для потенциала скорости

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_S \frac{e^{-ikr}}{r}\, dS \tag{1.7}$$

В самом деле, если учесть

$$\iint_\Sigma P_m(\cos\theta)\,d\Sigma = 0 \qquad \text{для } m \neq 0$$

то

$$\iint_\Sigma d\Sigma \iint_S \frac{e^{-ikR}}{R}\,dS = 4\pi c^2 t^2 e^{1/_4 \pi i} \frac{I_{\frac{1}{2}}(\sigma t)}{\sqrt{ct}} \iint_S \frac{K_{\frac{1}{2}}(ikr)}{\sqrt{r}}\,dS$$

но

$$I_{\frac{1}{2}}(\sigma t) = \frac{\sin\sigma t}{\sqrt{1/_2\pi}\sqrt{\sigma t}}, \qquad K_{\frac{1}{2}}(ikr) = e^{3/_4\pi i}\frac{\pi}{2} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(-kr) = -e^{3/_4\pi i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ikr}}{\sqrt{kr}}$$

следовательно,

$$\int_\Sigma d\Sigma \int \frac{e^{-ikR}}{R}\,dS = \frac{4\pi ct}{k}\sin\sigma t \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS \tag{1.8}$$

Подставив выражение (1.8) в формулу (1.4), мы тотчас получим формулу (1.7).

Для $t \geqslant r_2 / c$ подобные же вычисления, в которых фигурирует, однако, формула (1.6), приводят к значению потенциала скорости

$$\varphi(x, y, z; t) \equiv 0 \tag{1.9}$$

Формулы (1.7) и (1.9) позволяют сделать вывод о том, что весь процесс распадания стационарного поля концентрируется в промежутке времени $r_1 / c \leqslant t < r_2 / c$ и заканчивается в момент $t_2 = r_2 / c$ полным покоем в газе, причем до момента времени $t_1 = r_1 / c$, как и следовало ожидать, в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$ движение газа продолжает оставаться соответствующим первоначальному движению стационарного поля.

Для промежутка времени $r_1 / c \leqslant t < r_2 / c$, очевидно, приходится применять как формулу (1.5), когда интегрирование ведется по части области S_e, внешней по отношению к сфере Σ, так и формулу (1.6), когда интегрирование ведется по внутренней части области S_i.

В результате в этом случае получаем

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma t_0} \Big\{ e^{i\sigma t} \iint_{S_e} \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS + \frac{1}{\sigma}\sin\sigma t \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_e} \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS + \frac{1}{\sigma} e^{-i\sigma t} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_i} \frac{\sin kr}{r}\,dS \Big\}$$

Если ввести на плоскости xy полярные координаты с центром в точке $m(x, y, 0)$, легко показать, что

$$\sin\sigma t \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_e} \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS + e^{-i\sigma t} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_i} \frac{\sin kr}{r}\,dS \equiv 0 \tag{1.11}$$

Таким образом, окончательное выражение потенциала скорости в промежутке времени $r_1 / c \leqslant t < r_1 / c$ имеет вид:

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint_{S_e} \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS \tag{1.12}$$

Эта формула для значений времени $0 \leqslant t < r_2 / c$ и $t \geqslant r^2 / c$ совпадает соответственно с формулами (1.7) и (1.9), следовательно, она решает вопрос о распадении стационарного поля звуковых волн в любой момент $0 \leqslant t < \infty$; сравнивая ее с формулой (1.1), можно видеть, что она позволяет пользоваться методами исследования, существующими для стационарного звукового поля.

§ 2. О форме установления стационарного звукового поля. Пусть в неограниченной массе газа, находящейся в покое, в момент $t=0$ начинает в произвольной фазе действовать по гармоническому закону плоский поршневой излучатель нулевого порядка. Задача приводится к решению волнового уравнения при следующих условиях:

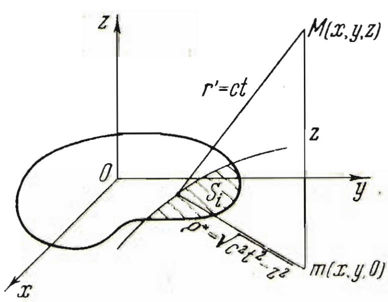
$$\varphi_{t=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -v e^{i\sigma(t+t_0)} \quad \text{на } S, \qquad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad \text{вне } S \tag{2.1}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_{S} \frac{e^{-ikr}}{r} dS - \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_{S_e} \frac{e^{-ikr}}{r} dS$$

или

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_{S_i} \frac{e^{-ikr}}{r} dS \tag{2.2}$$



Фиг. 2

где S_i — часть области S, внутренняя по отношению к сфере Σ.

Легко видеть, что φ является решением волнового уравнения и удовлетворяет начальным условиям (2.1).

Чтобы убедиться в том, что функция φ удовлетворяет и граничным условиям, вычислим $(\partial\varphi / \partial z)_{z=0}$.

Будем считать, что рассматриваемая точка $M(x, y, z)$ лежит не над излучателем, т. е. $m(x, y, 0)$ лежит вне области S (фиг. 3).

На плоскости xy введем полярные координаты с центром в точке m (фиг. 4). Тогда [4]

$$\varphi = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \iint\limits_{S_i} \frac{e^{-ikr}}{r} dS = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \int\limits_{\rho_1}^{\rho^*} \rho\, d\rho \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{-ikr}}{r} d\alpha$$

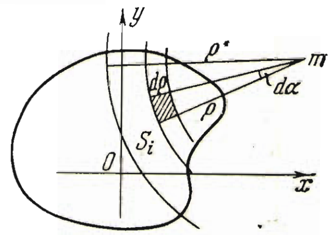
где $\rho^2 = r^2 - z^2$, $\rho_1{}^2 = r_1{}^2 - z^2$, $\rho\, d\rho = r\, dr$, а через α_1 и α_2 обозначены наименьшее и наибольшее значения α при данном ρ.

Следовательно,

$$\varphi = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \int_{r_1}^{ct} e^{-ikr} \vartheta(r)\, dr \qquad (\vartheta(r) = \alpha_2 - \alpha_1) \tag{2.3}$$

Продифференцируем формулу (2.3) по z, учитывая при этом, что в данном случае $\vartheta(r_1) = 0$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{v}{2\pi} e^{-i\sigma(t+t_0)} z \int_{r_1}^{ct} \frac{e^{-ikr}}{r} [\vartheta'(r) - ik\vartheta(r)]\, dr \tag{2.4}$$



Фиг. 4

Так как интеграл, стоящий в правой части равенства (2.4), ограничен при всех значениях t и z, то

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$$

Вычислим теперь значение этой производной в области S. В формуле (2.2) будем при этом считать, что точка $M(x, y, z)$ лежит над излучателем, т. е. $m(x, y, 0)$ лежит в области S (фиг. 5). В этом случае

$$\varphi(x, y, z; t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \left[\iint_{S_i'} \frac{e^{-ikr}}{r} ds + \iint_{S_i - S_i'} \frac{e^{-ikr}}{r} dS\right] =$$

$$= \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \left[2\pi \int_z^{r_1} e^{-ikr} dr + \int_{r_1}^{ct} e^{-ikr} \vartheta(r)\, dr\right]$$

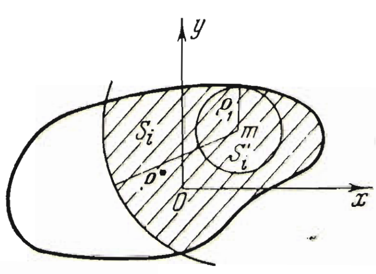
Принимая во внимание, что теперь $\vartheta(r_1) = 2\pi$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \left\{-2\pi e^{-ikz} + z \int_{r_1}^{ct} \frac{e^{-ikr}}{r} [\vartheta'(r) - ik\vartheta(r)]\, dr\right\} \tag{2.5}$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -ve^{i\sigma(t+t_0)}$$

Таким образом, формула (2.2) решает поставленную задачу об установлении стационарного звукового поля от пульсирующего излучателя, причем она обладает теми же преимуществами при изучении процесса установления (формирования) стационарного поля, что и формула (1.12) при изучении его распадения.



Фиг. 5

Отметим, что нигде в своих рассуждениях мы не пользовались условием односвязности для области S.

Кроме того, заметим, что для излучателей, простирающихся в ∞, при распадении стационарного поля будет наблюдаться диффузия звуковых волн.

С другой стороны, стационарное поле не может быть установлено в конечный промежуток времени, как это непосредственно следует из формул (1.12) и (2.2).

Вывод, который можно непосредственно сделать, пользуясь формулой (2.2), состоит в том, что в рассматриваемой точке $M(x, y, z)$ движение отсутствует до момента $t_1 = r_1/c$, затем следует переходный режим движения в промежутке времени

$$r_1/c \leqslant t < r_2/c$$

В этом промежутке и происходит установление стационарного движения в точке M.

Наконец, с момента $t_2 = r_2/c$ в точке M устанавливается стационарное движение газа.

Поступила 13 XI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб. Гидродинамика. Стр. 618.
2. Ватсон. Теория бесселевых функций. Стр. 399.
3. Carslaw. Math. Ann. 1914. Vol. LXXV. P. 141.
4. Сретенский Л. Н. Распространение волн от звучащего диска. Ученые записки МГУ. 1951. Т. IV.