Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О СОПРОТИВЛЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ В ВЫРЕЗЕ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

Д. Н. Четаев
(Москва)

Рассматривается полупространство $z>0$, заполненное идеальной сжимаемой жидкостью. В отверстии S жесткой стенки $z=0$ колеблется по гармоническому закону $\dot{z}=ve^{i\omega t}$ плоская пластина. Установившийся процесс распространения колебаний в жидкости описывается волновым уравнением для амплитуды потенциала скоростей $\varphi e^{i\omega t}$:

$$\Delta\varphi+k^2\varphi=0 \qquad \left(k=\frac{\omega}{u}\right)$$

где u — скорость распространения волн, с граничным условием

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\begin{cases} v & \text{внутри } S \\ 0 & \text{вне } S\end{cases}$$

Как известно[1], решение этой задачи представляется интегралом

$$\varphi(P)=\frac{v}{2\pi}\iint\limits_S \frac{e^{-ikr}}{r}\,dS \tag{1}$$

где r — расстояние от точки P до элемента пластины dS. Реакция среды на пластину выражается силой, амплитуда которой равна:

$$F=i\sigma\omega\iint\limits_S \varphi\,dS=vZ$$

Здесь σ — плотность среды, а

$$Z=\frac{i\sigma\omega}{v}\iint\limits_S \varphi\,dS \tag{2}$$

сопротивление излучения колеблющейся пластины, принимающее для случая круга следующий вид:

$$Z=\sigma uS\left[1-\frac{J_1(2kc)}{kc}+i\,\frac{H_1(2kc)}{kc}\right] \tag{3}$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода, а H_1 — функция Струве, c—радиус круга.

Эффективная формула для сопротивления излучения была известна только для круглой пластины. Сопротивление излучения прямоугольной пластины рассчитывалось численным методом Риггером [2] (для квадрата и прямоугольника с отношением сторон 1:7), однако метод его вычислений не опубликован и, как указывает сам автор, не может быть использован уже при $kc > 4$ (c — радиус круга равной площади) в силу слишком больших вычислительных трудностей.

В предлагаемой работе упрощается выражение сопротивления пластины произвольной формы; для случая прямоугольной пластины с произвольным отношением сторон дается удобная для вычислений формула и приводятся численные значения сопротивления квадрата.

Упрощение выражения для сопротивления (2) производится при помощи представления решения (1) суммой двух разрывных функций, идеей которого мы обязаны А. Н. Тихонову. В работе [3] это представление было использовано для перенесения асимптотического исследования решения (1) при больших k, проведенного Л. Н. Сретенским для случая круга [4] на пластину произвольной формы. Указанное представление получается следующим образом.

Введем на плоскости $z=0$ полярные координаты ρ, θ с полюсом в проекции p точки P. Будем считать пока область S выпуклой, тогда для внутренней точки p уравнение границы C будет однозначной функцией $\rho(\theta)$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Для фиксированной точки P будет $\rho\, d\rho = r\, dr$; поэтому $dS = \rho\, d\rho\, d\theta = r\, dr\, d\theta$. В интеграле (1) произведем интегрирование по r; получим

$$\varphi = -\frac{vi}{k} e^{-ikz} + \frac{vi}{2\pi k} \int_0^{2\pi} e^{-ikr(\theta)}\, d\theta$$

где $r(\theta) = \sqrt{z^2 + \rho^2(\theta)}$. Считая контур кусочно гладким, перейдем к интегралу по контуру

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{vi}{k} e^{-ikz} + \frac{vi}{2\pi k} \oint_C e^{-ikr(s)} \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}\, ds \tag{4}$$

Здесь s — длина дуги, а α равняется 2π. Аналогичным образом в случае, когда p лежит вне контура, мы получаем для φ выражение (4) при α, равном нулю. Наконец, когда p лежит на контуре, выражение (4) также справедливо, причем α равняется внутреннему углу контура в точке p. В последнем случае предполагается сходимость контурного интеграла, поэтому на контур должны быть наложены дополнительные ограничения; например, достаточным условием ограниченности подинтегрального выражения может служить кусочная дифференцируемость кривизны контура, когда

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} = \frac{1}{2} K$$

где K — предельное значение кривизны в точке p.

Представление (4) решения (1) в виде суперпозиции куска плоской волны над пластиной и контурного интеграла, очевидно, остается справедливым и для контуров, являющихся алгебраическими суммами выпуклых кривых.

При помощи этого представления сопротивление пластины (2) выражается уже не четырехкратным, а трехкратным интегралом:

$$Z = \sigma u \iint\limits_{S} \left[1 - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C} e^{-ik\rho(s)} \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} ds\right] dS \tag{5}$$

Покажем, что сопротивление пластины произвольной формы представляется в виде

$$Z = \sigma u S [1 - Y(ka) + iX(ka)] \tag{6}$$

где a — какой-нибудь линейный размер области, а функции X и Y определяются исключительно формой области. Произведем в (5) преобразование подобия:

$$x = ax_1, \qquad y = ay_1$$

получим

$$Z = \sigma u S \left[1 - \frac{a^2}{2\pi S} \iint\limits_{S_1} \oint\limits_{C_1} e^{-ik\rho_1} \frac{1}{\rho_1} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)^2} ds_1\, dS_1\right] \tag{7}$$

где интегрирование ведется по подобной области S_1, соответствующей значению $a = 1$. Если a—радиус круга равной площади, то независящий от размеров области коэффициент при интеграле равен:

$$\frac{a^2}{2\pi S} = \frac{1}{2\pi^2}$$

а интегрирование производится по области, равновеликой кругу единичного радиуса.

Перейдем к рассмотрению прямоугольной пластины со сторонами $2a$ и $2b$. Активная и реактивная части сопротивления равны:

$$1 - Y = 1 - \frac{1}{2\pi S} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \oint\limits_{C} \cos k\rho(s) \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} ds\, dy\, dx$$

$$X = \frac{1}{2\pi S} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \oint\limits_{C} \sin k\rho(s) \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} ds\, dy\, dx$$

Отсюда, так как, например, на верхней стороне

$$\rho(s) = \sqrt{(b-y)^2 + s^2}, \qquad \frac{1}{\rho(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2} = \frac{b-y}{(b-y)^2 + s^2}$$

получаем

$$J = 2\pi S X = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \left\{ \int\limits_{-(a-x)}^{a+x} \sin k\sqrt{(b-y)^2 + s^2}\, \frac{b-y}{(b-y)^2 + s^2} ds + \right.$$

$$+ \int\limits_{-(a+x)}^{a-x} \sin k\sqrt{(b+y)^2 + s^2}\, \frac{b+y}{(b+y)^2 + s^2} ds + \int\limits_{-(b+y)}^{b-y} \sin k\sqrt{(a-x)^2 + s^2}\, \frac{a-x}{(a-x)^2 + s^2} ds +$$

$$\left. + \int\limits_{-(b-y)}^{b+y} \sin k\sqrt{(a+x)^2 + s^2}\, \frac{a+x}{(a+x)^2 + s^2} ds \right\} dy\, dx$$

Таблица

kc	R(kc)		X(kc)	
	квадрат	круг	квадрат	круг
0.25	0.0312	0.0309	0.2060	0.2087
0.50	0.1197	0.1199	0.3913	0.3969
0.75	0.2552	0.2561	0.5376	0.5471
1.00	0.4201	0.4233	0.6338	0.6468
1.25	0.5954	0.6023	0.6738	0.6905
1.50	0.7617	0.7740	0.6611	0.6801
1.75	0.9025	0.9215	0.5990	0.6238
2.00	1.0068	1.0330	0.5168	0.5349
2.25	1.0698	1.1027	0.4150	0.4293
2.50	1.0933	1.1310	0.3157	0.3231
2.75	1.0841	1.1242	0.2306	0.2300
3.00	1.0528	1.0922	0.1684	0.1594
3.25	1.0114	1.0473	0.1323	0.1159
3.50	0.9708	1.0013	0.1200	0.0989
3.75	0.9397	0.9639	0.1281	0.1036
4.00	0.9232	0.9413	0.1470	0.1220
4.25	0.9224	0.9357	0.1692	0.1456
4.50	0.9354	0.9454	0.1876	0.1663
4.75	0.9576	0.9661	0.1973	0.1782
5.00	0.9834	0.9913	0.1959	0.1784
5.25	1.0073	1.0150	0.1796	0.1668
5.50	1.0252	1.0321	0.1638	0.1464
5.75	1.0348	1.0397	0.1395	0.1216
6.00	1.0356	1.0372	0.1145	0.0973
6.25	1.0267	1.0265	0.0946	0.0779
6.50	1.0136	1.0108	0.0800	0.0662
6.75	0.9987	0.9944	0.0729	0.0631
7.00	0.9847	0.9809	0.0728	0.0676
7.25	0.9744	0.9733	0.0784	0.0770
7.50	0.9694	0.9727	0.0871	0.0881
7.75	0.9699	0.9784	0.0964	0.0973
8.00	0.9754	0.9887	0.1044	0.1021
8.25	0.9844	1.0007	0.1081	0.1013
8.50	0.9950	1.0115	0.1078	0.0948
8.75	1.0051	1.0187	0.1032	0.0843
9.00	1.0129	1.0209	0.0951	0.0719
9.25	1.0172	1.0180	0.0844	0.0602
9.50	1.0175	1.0111	0.0733	0.0515
9.75	1.0142	1.0021	0.0636	0.0470
10.00	1.0073	0.9933	0.0561	0,0473

Отсюда

$$J = -\int_{-a}^{a}\int_{-(a-x)}^{0}\int_{\psi}^{|s|}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dx - \int_{-a}^{a}\int_{0}^{a+x}\int_{\psi}^{|s|}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dx +$$

$$+\int_{-b}^{b}\int_{-(b-y)}^{0}\int_{|s|}^{\chi}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dy + \int_{-b}^{b}\int_{0}^{b+y}\int_{|s|}^{\chi}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dy + \int_{-a}^{a}\int_{-(a+x)}^{0}\int_{|s|}^{\psi}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dx +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-x}\int_{|s|}^{\psi}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dx - \int_{-b}^{b}\int_{-(b+y)}^{0}\int_{\chi}^{|s|}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dy - \int_{-b}^{b}\int_{0}^{b-y}\int_{\chi}^{|s|}\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi\,ds\,dy$$

$$\left(\psi = \sqrt{(4b^2 + s^2)}, \quad \chi = \sqrt{4a^2 + s^2}\right)$$

Проинтегрировав по ξ и обозначив

$$A(s) = \operatorname{Si}\left(k\sqrt{(2a)^2 + s^2}\right) - \operatorname{Si} k|s| = A(-s)$$

$$B(s) = \operatorname{Si}\left(k\sqrt{(2b)^2 + s^2}\right) - \operatorname{Si} k|s| = B(-s)$$

где $\operatorname{Si}\eta$ — интегральный синус:

$$\operatorname{Si}\eta = \int_0^\eta \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

получим

$$J = 2\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-x} B(s)\,ds\,dx + 2\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a+x} B(s)\,ds\,dx +$$

$$+ 2\int_{-b}^{b}\int_{0}^{b-y} A(s)\,ds\,dy + 2\int_{-b}^{b}\int_{0}^{b+y} A(s)\,ds\,dy$$

Изменив порядок интегрирования в двойных интегралах и проинтегрировав по x или соответственно по y, получаем формулу для сопротивления в квадратурах от хорошо табулированных функций:

$$J = \int_0^{2a}\int_{-a}^{a-s} B(s)\,dx\,ds + 2\int_0^{2a}\int_{-a+s}^{a} B(s)\,dx\,ds + 2\int_0^{2b}\int_{-b}^{b-s} A(s)\,dy\,ds +$$

$$+ 2\int_0^{2b}\int_{-b+s}^{b} A(s)\,dy\,ds = 4\int_0^{2b}(2b - s)\,A(s)\,ds + 4\int_0^{2a}(2a - s)\,B(s)\,ds$$

$$X = \frac{4}{2\pi S}\left\{\int_0^{2b}(2b-s)\left[\operatorname{Si}\left(k\sqrt{(2a)^2+s^2}\right) - \operatorname{Si} ks\right]ds +\right.$$

$$\left. + \int_0^{2a}(2a - s)\left[\operatorname{Si}\left(k\sqrt{(2b)^2 + s^2}\right) - \operatorname{Si} ks\right]ds\right\}$$

Обозначим $a/b = n$, тогда

$$X(ka) = \frac{2}{\pi n}\left\{n^2\int_0^1\left[\operatorname{Si}\left(2ka\sqrt{\frac{1}{n^2} + s^2}\right) - \operatorname{Si}(2kas)\right](1 - s)\,ds +\right.$$

$$\left. + \int_0^1\left[\operatorname{Si}\left(\frac{2ka}{n}\sqrt{n^2 + s^2}\right) - \operatorname{Si}\left(\frac{2\,kas}{n}\right)\right](1 - s)\,ds\right\}$$

Вычислим интеграл:

$$\int_0^1(1 - s)\operatorname{Si}\alpha s\,ds = \left(s - \frac{s^2}{2}\right)\operatorname{Si}\alpha s\,\Big|_0^1 - \int_0^1\left(s - \frac{s^2}{2}\right)\frac{\sin\alpha s}{s}\,ds =$$

$$= \frac{\operatorname{Si}\alpha}{2} - \int_0^1 \sin\alpha s\,ds + \frac{1}{2}\int_0^1 s\sin\alpha s\,ds = \frac{\operatorname{Si}\alpha}{2} + \frac{\cos\alpha - 2}{2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{2\alpha^2}$$

Отсюда окончательно

$$X(ka)=\frac{2}{\pi n}\int_0^1\left[\mathrm{Si}\left(\alpha\sqrt{n^2+s^2}\right)+n^2\,\mathrm{Si}\left(\beta\sqrt{\frac{1}{n^2}+s^2}\right)\right](1-s)\,ds-$$
$$-\frac{1}{\pi n}\left[\mathrm{Si}\,\alpha+\frac{\cos\alpha-2}{\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}\right]-\frac{n}{\pi}\left[\mathrm{Si}\,\beta+\frac{\cos\beta-2}{\beta}+\frac{\sin\beta}{\beta^2}\right] \qquad (8)$$

Здесь $\alpha=2ka/n$, $\beta=2ka$, если c — радиус равновеликого круга, то $\alpha=ck\sqrt{\pi/n}$, $\beta=ck\sqrt{\pi n}$.

Для $R(ka)=1-Y(ka)$ получаем подобным образом:

$$R(ka)=1-\frac{2}{\pi n}\int_0^1\left[\mathrm{Ci}\left(\alpha\sqrt{n^2+s^2}\right)+n^2\,\mathrm{Ci}\left(\beta\sqrt{\frac{1}{n^2}+s^2}\right)\right](1-s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{\pi n}\left[\mathrm{Ci}\,\alpha-\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\cos\alpha-1}{\alpha^2}\right]+\frac{n}{\pi}\left[\mathrm{Ci}\,\beta-\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\cos\beta-1}{\beta^2}\right] \qquad (9)$$

Здесь $\mathrm{Ci}\,\eta$ — интегральный косинус:

$$\mathrm{Ci}\,\eta=-\int_\eta^\infty\frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi$$

В таблице на стр. 448 приведены значения функций $R(kc)$ и $X(kc)$, вычисленные по формулам (8) и (9) для квадратной пластины, рядом с соответствующими значениями для круга [5].

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность А. Н. Тихонову и А. А. Самарскому, советами которых он пользовался при выполнении работы.

Поступила 12 II 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука. ОГИЗ. 1944. Т. 2. §§ 278, 302.
2. Riegger H. Zur Theorie des Lautsprechers. Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern. 1924. Bd. 3. Nr. 2.
3. Четаев Д. Н. Об излучении звука поршнем. ДАН СССР. 1951. Т. LXXVI. № 6.
4. Сретенский Л. Н. Распространение волн от звучащего диска. Ученые записки МГУ (механика). 1951. Т.IV.
5. Морз Ф. Колебания и звук. ГИТТЛ. 1949. Стр. 481.