Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

П. С. Линейкин

(Москва)

Для исследования вопросов свободной тепловой конвекции Л. Н. Сретенский[1] предложил метод разложения по малому параметру. Таким параметром может служить в данном случае, например, коэффициент теплового расширения жидкости α. Автор настоящей заметки пользовался этим же методом для изучения муссонной конвекции[2] и в некоторых других случаях.

Метод малого параметра обладает здесь тем преимуществом, что нелинейная по существу задача сводится к последовательному решению линейных дифференциальных уравнений, причем этот процесс имеет простой и наглядный физический смысл[2]. Однако до сих пор не выяснен вопрос о сходимости рядов, представляющих решение той или иной задачи.

Этот вопрос мы пытаемся осветить здесь, исследуя плоскую задачу о стационарной конвекции в однородной жидкости, заполняющей данную область, с известным режимом температуры на граничном контуре.

Будем исходить из упрощенного представления о конвекции, принимая линейную зависимость плотности жидкости от температуры и учитывая изменения плотности только в отношении веса частицы жидкости. При этих предположениях основная система уравнений гидромеханики и распространения тепла в жидкости может быть записана так[3]:

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \nabla^2 u - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= \nu \nabla^2 v - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \alpha g T \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial y} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \lambda \nabla^2 T + \frac{A\nu}{C_v} D \tag{3}$$

где D — есть известная диссипативная функция

$$D = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \tag{4}$$

В приведенных выше уравнениях приняты следующие обозначения: u, v — компоненты скорости, p — избыток давления над гидростатическим, T — отклонение температуры от условного нуля, ν, λ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, A — термический эквивалент работы, ρ_0 — плотность жидкости при температуре 0°.

Ось y направим вертикально вверх. Краевые условия задачи на контуре C области σ будут следующие:

$$T_C = \vartheta f(s), \qquad u_C = v_C = 0 \tag{5}$$

Здесь s — координата точки контура. Введем функцию тока $\psi(x, y)$, полагая

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{6}$$

Для дальнейшего перейдем к безразмерным величинам координат x^*, y^* и неизвестных функций T^*, ψ^* при помощи соотношений

$$x = lx^*, \qquad y = ly^*, \qquad T = \frac{\vartheta}{h} T^*, \qquad \psi = \lambda\psi^* \tag{7}$$

в которых характерной длиной l является диаметр области. Здесь и ниже введены также безразмерные параметры

$$q = \frac{\lambda}{\nu}, \qquad h = \frac{\alpha\vartheta g l^3}{\lambda\nu}, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha g l A}{C_v} \tag{8}$$

Заметим, что

$$q = \frac{1}{P}, \qquad h = GP \tag{9}$$

где P и G — известные числа Прандтля и Грассгофа [3].

После этого система уравнений (1, 2, 3) приведется к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla^4\psi^* &= -\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + q\,\frac{\partial(\psi^*, \nabla^2\psi^*)}{\partial(x^*, y^*)} \\ \nabla^2 T^* &= \frac{\partial(\psi^*, T^*)}{\partial(x^*, y^*)} - \varepsilon D(\psi^*) \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$D(\psi^*) = 4\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^*\partial y^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^{*2}}\right)^2 \tag{11}$$

Краевые условия задачи в безразмерных переменных на контуре C^* области σ^* примут вид:

$$T_{C^*}{}^* = hf(s^*), \qquad \psi_{C^*}{}^* = \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)_{C^*} = 0 \tag{12}$$

В дальнейшем для простоты звездочки при обозначении переменных опускаются.

Пусть для области (σ) существуют функции Грина первой краевой задачи для гармонического и соответственно бигармонического уравнений:

$$\begin{aligned} g_1(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + \gamma_1(x, y; \xi, \eta) \\ g_2(x, y; \xi, \eta) &= \frac{r^2}{8\pi}\ln\frac{1}{r} + \gamma_2(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь γ_1 — некоторая гармоническая функция, γ_2 — бигармоническая функция аргументов $(x,\ y)$ и $(\xi,\ \eta)$ в области (σ), а r — расстояние между точками $(x,\ y)$ и $(\xi,\ \eta)$.

Пусть, кроме того, $\varphi_0(x,\ y)$ — гармоническая в области (σ) функция, определяемая контурным значением $f(s)$:

$$\varphi_0(x,\ y) = \int\limits_{C^*} f(s) \frac{\partial g}{\partial n_i}\, ds \tag{14}$$

Тогда система (10) при краевых условиях (12) эквивалентна следующей системе интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} T(x,\ y) &= h\varphi_0(x,\ y) + \int\limits_{(\sigma)} g_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, F_1(T_\xi,\ T_\eta,\ \psi_\xi,\ \ldots)\, d\sigma \\ \psi(x,\ y) &= \int\limits_{(\sigma)} g_2(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\left[qF_2(\psi_\xi,\ \psi_\eta,\ \ldots) + \frac{\partial T}{\partial \xi}\right] d\sigma \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь для краткости положено

$$\begin{aligned} F_1(T_\xi,\ T_\eta,\ \psi_\xi,\ \ldots) &= \frac{\partial(T,\ \psi)}{\partial(\xi,\ \eta)} + \varepsilon D(\psi) \\ F_2(\psi_\xi,\ \psi_\eta,\ \ldots) &= \frac{\partial(\nabla^2\psi,\ \psi)}{\partial(\xi,\ \eta)} \end{aligned} \tag{16}$$

Интегрирование в формулах (15), как и всюду ниже, производится по области (σ), элемент площади $d\sigma = d\xi\, d\eta$.

Для дальнейшего нам будет удобно преобразовать второе из уравнений (15), подставляя в него вместо $\partial T/\partial\xi$ результат дифференцирования T из первого с надлежащим изменением аргументов. Получим тогда следующие уравнения:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= h\varphi_0(x, y) + \int g_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, F_1(T_\xi,\ T_\eta,\ \psi_\xi,\ \ldots)\, d\sigma \\ \psi(x, y) &= h\omega_0(x, y) + \int g_2(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, F_2(\psi_\xi,\ \xi_\eta,\ \ldots)\, d\sigma + \\ &+ \int\limits_{(\sigma)} g_2(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\, d\sigma \int\limits_{(\sigma')} \frac{\partial g_1(\xi,\ \eta;\ \xi',\ \eta')}{\partial \xi} F_1(T_{\xi'},\ T_{\eta'},\ \psi_{\xi'},\ \ldots)\, d\sigma' \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь введено обозначение

$$\omega_0(x,\ y) = \int\limits_{(\sigma)} g_2(x,\ y;\ \xi,\ \eta) \frac{\partial\varphi_0(\xi,\ \eta)}{\partial \xi}\, d\sigma \tag{18}$$

Дифференцируя правые части формул (17) соответствующее число раз по переменным x, y, получим выражения для T_x, T_y, ψ_x, ψ_y, ψ_{xx}, ψ_{xy}, ψ_{yy}, ψ_{xxx}, ψ_{xxy}, ψ_{yyx}, ψ_{yyy} (индексы указывают на дифференцирование по соответствующим аргументам). Заметим, что появляющиеся при этом первые производные от $g_1(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ и производные $g_2(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ до третьего порядка включительно по свойствам функций Грина, как легко видеть из формул (13), абсолютно интегрируемы в области (σ).

Указанные 11 величин вместе с T и ψ можно рассматривать как независимые неизвестные функции нашей задачи. Таким образом, вместо (18) можно написать систему из тринадцати нелинейных интегральных уравнений с таким же числом неизвестных:

$$
\begin{aligned}
T(x, y) &= h\,\varphi_0(x, y) + \int g_1(x, y;\ \xi, \eta)\, F_1(T_\xi, T_\eta, \psi_\xi, \ldots)\, d\sigma \\
T_x(x, y) &= h\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \int \frac{\partial g_1(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial x} F_1(T_\xi, T_\eta, \psi_\xi, \ldots)\, d\sigma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi(x, y) &= h\omega_0(x, y) + \int g_2(x, y;\ \xi, \eta)\, d\sigma \Big[qF_2(\psi_\xi, \psi_\eta, \ldots) + \\
&\qquad + \int \frac{\partial g_1(\xi, \eta;\ \xi', \eta')}{\partial \xi} F_1(T_{\xi'}, T_{\eta'}, \ldots)\, d\sigma' \Big] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi_{yyy}(x, y) &= h\frac{\partial^3 \omega_0}{\partial y^3} + \int \frac{\partial^3 g_2(x, y;\ \xi, \eta)}{\partial y^3}\, d\sigma \Big[qF_2(\psi_\xi, \psi_\eta, \ldots) + \\
&\qquad + \int \frac{\partial g_1(\xi, \eta;\ \xi', \eta')}{\partial \xi} F_1(T_{\xi'}, T_{\eta'}, \ldots)\, d\sigma' \Big]
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Легко показать, что уравнения (19), равно как и (17), вполне эквивалентны первоначальной системе дифференциальных уравнений нашей задачи при краевых условиях (5).

Применим для решения этих уравнений способ последовательных приближений, полагая

$$
\begin{aligned}
T^{(n+1)}(x, y) &= h\varphi_0(x, y) + \int g_1(x, y;\ \xi, \eta)\, F_1^{(n)}(T_\xi, T_\eta, \ldots)\, d\sigma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\psi^{(n+1)}(x, y) &= h\omega_0(x, y) + \int g_2(x, y;\ \xi, \eta)\, d\sigma \Big[qF_2^{(n)}(\psi_\xi, \psi_\eta, \ldots) + \\
&\qquad + \int \frac{\partial g_1(\xi, \eta;\ \xi', \eta')}{\partial \xi} F_1(T_{\xi'}, T_{\eta'}, \ldots)\, d\sigma' \Big]
\end{aligned}
\tag{20}
$$

и

$$
T^{(0)} = T_x^{(0)} = \cdots = \psi^{(0)} = \psi_x^{(0)} = \cdots = \psi_{yyy}^{(0)} = 0 \tag{21}
$$

Обозначим через B наибольшее из различных значений в области (σ) интегралов от абсолютных величин функций $g_1(x, y;\ \xi, \eta)$ и $g_2(x, y;\ \xi, \eta)$ и их производных по x, y первого и соответственно до третьего порядка, входящих в уравнения (20):

$$
B = \max\left\{ \int g_1 d\sigma, \int \left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| d\sigma, \ldots, \int |g_2|\, d\sigma, \ldots, \int \left|\frac{\partial^3 g_2}{\partial y^3}\right| d\sigma \right\} \tag{22}
$$

Пусть рассматриваемый контур C состоит из конечного числа кусков, уравнения которых представимы функциями типа $y = y(x)$ (или $x = x(y)$), непрерывными вместе со своими производными $y' = y'(x)$ и удовлетворяющими условию Гельдера

$$
|\, y'(x+h) - y'(x) \leqslant \alpha_0 \,|\, h\,|^{\lambda} \tag{23}
$$

где α и λ — некоторые константы, $0 < \lambda < 1$.

Тогда, если функция $f(s)$ в граничных условиях (5) непрерывна вместе со своей производной $f'(s)$ и $f'(s)$ удовлетворяет условию Гельдера

$$|f'(s+h)-f'(s)|<\alpha_1|h|^\lambda \tag{24}$$

и если, кроме того, величина ϑ выбрана так, что

$$\max\{|f(s)|,\ |f'(s)|,\ \alpha_1\}\leqslant 1 \tag{25}$$

то согласно известным теоремам из теории потенциала [4], для функции $\varphi_0(x, y)$ будут выполняться следующие неравенства:

$$\max\left\{|\varphi_0|,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right|\right\}\leqslant\beta \tag{26}$$

где β — новая константа, определяемая видом контура C, причем $\beta\geqslant 1$.

Отсюда же по (18) и (22) будем иметь для $\omega_0(x, y)$

$$\max\left\{|\omega_0|,\ \left|\frac{\partial\omega_0}{\partial x}\right|,\ldots,\ \left|\frac{\partial^3\omega}{\partial y^3}\right|\right\}\leqslant\beta B \tag{27}$$

Допустим теперь, что функции n-го приближения удовлетворяют неравенству

$$\max\{|T|,|T_x|,\ldots,|\psi_{yyy}|\}\leqslant M \tag{28}$$

Основываясь на этом, легко по (20) оценить и все функции следующего приближения:

$$\begin{gathered}|T^{(n+1)}|\leqslant h+2(1+4\varepsilon)BM^2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ |\psi^{(n+1)}|\leqslant h\beta B+2qBM^2+2(1+4\varepsilon)B^2M^2\end{gathered} \tag{29}$$

Потребуем, чтобы правые части этих неравенств были в свою очередь не больше M:

$$\begin{gathered}h+2(1+4\varepsilon)BM^2\leqslant M\\ h\beta B+2qBM^2+2(1+4\varepsilon)B^2M^2\leqslant M\end{gathered} \tag{30}$$

Тогда ограниченность наших функций во всех последовательных приближениях будет обеспечена.

Для исследования сходимости процесса рассмотрим выражение

$$R_n(x, y)=|T^{(n+1)}-T^{(n)}|+|T_x^{(n+1)}-T_x^{(n)}|+\cdots+|\psi_{yyy}^{(n+1)}-\psi_{yyy}^{(n)}| \tag{31}$$

Оценивая с помощью (28) и других неравенств величины $|F_1^{(n+1)}-F_1^{(n)}|$ и $|F_2^{(n+1)}-F_2^{(n)}|$, мы можем показать, что максимальные значения величин $R_n(x, y)$ и $R_{n-1}(x, y)$ в области (σ) удовлетворяют неравенству

$$R_n<KMR_{n-1} \tag{32}$$

где

$$K=\max\{3B,\ 12B\varepsilon,\ 10Bq,\ 40B^2\varepsilon,\ 10B^2\} \tag{33}$$

Величина K существенно зависит от вида **области. Опираясь** на неравенство (32), легко показать, что ряды

$$\begin{gathered}T^{(0)}+(T^{(1)}-T^{(0)})+\cdots+(T^{(n+1)}-T^{(n)})+\cdots\\ \psi^{(0)}+(\psi^{(1)}-\psi^{(0)})+\cdots+(\psi^{(n+1)}-\psi^{(n)})+\cdots\end{gathered} \tag{34}$$

и им подобные для производных $T_x, T_y, \psi_x, \ldots$ сходятся абсолютно и равномерно при

$$M < \frac{1}{K} \tag{35}$$

При этом условии и при выполнении неравенств (30) нетрудно показать, что неограниченная последовательность приближений вида (20) при $n \to \infty$ приводит к предельным функциям, удовлетворяющим интегральным уравнениям (19), а следовательно, и исходным дифференциальным уравнениям задачи.

Неравенства (30) позволяют найти верхнюю границу H для допустимых значений h, что и составит критерий возможности решения задачи методом последовательных приближений. Не входя в подробности расчета, заметим только, что здесь возможны различные варианты оценок в зависимости от расположения двух парабол:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu - 2(1+4\varepsilon)B\mu^2 \\ y_2 &= \frac{1}{\beta B}\mu - \frac{2}{\beta}[q + (1+4\varepsilon)B]\mu^2 \end{aligned} \tag{36}$$

и прямой $\mu = 1/k$ на плоскости (μ, y).

В частности, пусть область (σ) такова, что $B \gg 1$. Предполагая $q \ll 1$, $\varepsilon \approx 0$, что соответствует реальным данным для воды и воздуха, мы находим для H:

$$H = \frac{1}{\beta B} m - \frac{2}{\beta}[q + (1+4\varepsilon)B]m^2 \tag{37}$$

где

$$m = \min\left\{\frac{1}{k}, \frac{1}{2B[2(1+4\varepsilon)B + 2q]}\right\} \tag{38}$$

Отсюда $H \approx 0.1\beta^{-1}B^{-2}$ (при $k = 10B^2$), т. е. во всяком случае $H < 0.1$. Надо заметить, что это значение меньше тех чисел h, которые характерны для конвекционных движений воды и воздуха как в лабораторных условиях, так и в природе. Однако нами установлен лишь достаточный (но не необходимый) критерий рассматриваемого вопроса. Для практических приложений важно повысить найденное значение H.

Поступила 6 II 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О переносе тепла жидкостями. Журнал геофизики. 1933. Т. III. Вып. 1.
2. Линейкин П. С. Гидродинамическая теория муссонов над круглым островом. Известия АН СССР, серия геофизическая. 1947. Т. XI. Вып. 1.
3. Ландау Л. Д. и Лифшиц. Механика сплошных сред. ГТТИ. 1944
4. Schauder J. Potentialtheoretische Untersuchungen. Mathem. Zschr. 1931. Bd. 33. T. I.
5. Вениаминов В. Н. Распространение тепла в сосуде с жидкостью. Журнал геофизики. 1933. Т. III. Вып. 1.