Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА

С. В. Валландер

(Ленинград)

Настоящая работа [1] посвящена выводу дифференциальных уравнений движения вязкого газа; при этом предполагается, что газ с достаточной степенью точности может считаться совершенным газом, т. е. из рассмотрения исключаются движения сильно сжатых газов, и что отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру явления мало по сравнению с единицей, т. е. исключаются движения сильно разреженных газов.

Кроме того, предполагается, что для рассматриваемых движений газа с достаточной степенью точности выполняется закон равномерного распределения внутренней энергии по степеням свободы движения молекул, т. е. из рассмотрения исключаются случаи движения газа с весьма быстрыми изменениями гидродинамических элементов в пространстве и времени.

Упорядоченность макроскопического движения реального газа при случайности микроскопических движений связана с тем, что макроскопическое движение возникает из микроскопических движений громадного числа молекул. Из достоверности этого опытного факта следует, что конечное число случайных микроскопических движений, настолько велико, что макроскопическое движение оказывается формирующимся по тем же статистическим законам, которые мы имели бы и в том случае, если бы число микроскопических движений было бесконечно большим.

Это позволяет вместо реального дискретного газа с конечным числом конечных молекул рассматривать газ «предельный» в виде непрерывного континуума бесконечно малых молекул.

Такая постановка является приближенной схемой, при которой сохраняется упорядоченность макроскопического движения газа, но упускается возможность изучения всякого рода мелких флюктуаций, связанных с конечностью числа молекул реального газа.

Заменяя изучение газа изучением движения материального континуума, можно вводить понятия плотности, скорости, полной и внутренней энергии единицы массы газа. Заметим, что, введя в рассмотрение газообразный континуум и дав определения основных гидродинамических элементов, мы нигде не создаем препятствий к рассмотрению микроскопических движений молекул и даже, наоборот, предполагаем их существование. Введенный газообразный континуум можно наделять всеми физическими свойствами реального газа, не связанными с конечностью числа его молекул. В частности, можно требовать, чтобы средняя длина свободного пробега частиц газообразного континуума была, как и в реальном газе, конечной, хотя и весьма малой величиной.

Воспроизводимый ниже вывод уравнений движения вязкого газа показывает, что обычно применяемые [1, 2, 3, 4] уравнения получены из недостаточно полных физических представлений, поэтому в них отсутствует ряд членов того же порядка малости, что и удерживаемые.

---

[1] Некоторые вычисления, связанные с выполнением работы, проделаны И. А. Смирновой и И. З. Калишевич.

§ 1. Основные понятия. Обозначим через m массу газа в некотором объеме. Тогда плотностью ρ газа в данной точке M в данный момент времени t будем называть предел отношения массы m в момент t к объему P, если последний, охватывая точку M, стягивается к ней.

Обозначим через $\mathbf{K}$ количество движения газа, заключенного в объеме P. Тогда скоростью $\mathbf{v}$ газа в данной точке M в данный момент времени t будем называть предел отношения количества движения $\mathbf{K}$ в момент t к массе m в момент t, если объем P, охватывая точку M, стягивается к этой точке.

Так как количество движения системы равно количеству движения центра инерции системы, в котором сосредоточена вся масса системы, то введенная скорость $\mathbf{v}$ движения газа является скоростью центра инерции бесконечно малого объема.

Введем понятия полной энергии U единицы массы газа и внутренней энергии E единицы массы газа.

Рассмотрим опять некоторый объем P, охватывающий точку M. Внутри объема P будет находиться некоторая масса газа, обладающая некоторой конечной энергией; так как по предположению газ совершенен, то вся энергия этих молекул будет кинетической. Обозначим ее через U_1. Тогда условимся называть полной энергией U единицы массы газа в данной точке M в данный момент времени t предел отношения U_1 в момент t к массе газа m в момент t, если объем P, охватывая точку M, стягивается к этой точке.

На основании теоремы Кенига величина U_1 может быть разбита на два слагаемых: кинетическую энергию U_2 центра инерции и кинетическую энергию U_3 относительного движения по отношению к центру инерции.

Внутренней энергией E единицы массы газа в данной точке M в данный момент времени t мы будем называть предел отношения кинетической энергии U_3 (в момент t) относительного движения молекул по отношению к центру инерции к массе m газа (в момент t), если P, охватывая M, стягивается к этой точке.

Если обозначить через dm, $d\mathbf{K}$, dU^* и dE^* массу, количество движения, полную и внутреннюю энергию газа, заключенного внутри элементарного объема dP, то из введенных определений непосредственные следуют формулы

$$
\begin{aligned}
dm &= \rho\, dP \\
d\mathbf{K} &= \rho \mathbf{v}\, dP \\
dU^* &= \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho E\right) dP \\
dE^* &= \rho E\, dP
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Введенная выше величина E внутренней энергии единицы массы газа, очевидно, может быть разбита на два слагаемых.

Первое из них E_1 будет соответствовать той части кинетической энергии движения молекул, которая связана с их поступательным движением.

Второе же из них E_2 будет соответствовать той части кинетической энергии движения молекул, которая происходит от их вращательного и колебательного движений.

Величину, пропорциональную E_1, в кинетической теории газов принято называть температурой. Множитель пропорциональности, очевидно, зависит от единиц, в которых измеряется температура, и становится вполне определенным, если такая единица выбрана. Обычно температуру принято измерять в градусах Кельвина и обозначать через T.

Для таких единиц измерения температуры по определению имеем

$$m_0 E_1 = \frac{3}{2} kT, \qquad k = 1.37 \times 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{град}} \tag{1.2}$$

где k есть так называемая постоянная Больцмана, m_0 — масса одной молекулы газа.

Так как для рассматриваемых движений газа имеет место закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, то и часть E_2 величины E оказывается пропорциональной температуре T.

Следовательно, имеем

$$E = c_v T \tag{1.3}$$

где c_v — новый коэффициент пропорциональности, называемый удельной теплоемкостью при постоянном объеме.

§ 2. Явления переноса и некоторые выводы. Дадим элементарную трактовку некоторых физических явлений, принадлежащих к так называемым явлениям переноса

1. Плотностная самодиффузия. Рассмотрим некоторую неподвижную площадку $ABCD$ площади ΔS с нормалью $\mathfrak{n}$ в макроскопически покоящемся газе. Обозначим через λ среднюю длину свободного пробега молекул и через c среднюю величину скорости теплового движения молекул и предположим температуру газа постоянной.

Упростим представление о движении молекул и будем считать, что половина молекул имеет скорость в направлении нормали $\mathfrak{n}$ и половина в противоположном направлении.

Кроме того, будем считать, что все молекулы проходят путь λ без столкновений в течение времени

$$\Delta t = \frac{\lambda}{c} \tag{2.1}$$

Тогда половина массы слоя газа толщины λ, примыкающего к площадке ΔS сверху, перейдет вниз, а половина массы слоя газа толщины λ, примыкающего к площадке ΔS снизу, перейдет наверх.

Если величина λ мала по сравнению с характерным размером явления l, то с достаточной степенью точности можем написать

$$\Delta m_2 = \Delta S \lambda \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial \mathfrak{n}} \frac{\lambda}{2} \right), \qquad \Delta m_1 = \Delta S \lambda \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial \mathfrak{n}} \frac{\lambda}{2} \right) \tag{2.2}$$

где Δm_2 — масса слоя газа толщины λ, располагающегося над площадкой ΔS сверху, Δm_1 — масса слоя газа толщины λ, располагающегося под площадкой ΔS снизу, ρ — плотность газа в некоторой точке площадки, $\partial\rho/\partial\mathbf{n}$ — производная в направлении $\mathbf{n}$ от плотности ρ в некоторой точке плащадки ΔS.

Очевидно, что величина

$$\Delta m = \frac{1}{2}(\Delta m_2 - \Delta m_1) = \frac{1}{2}\Delta S \lambda^2 \frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}} \tag{2.3}$$

дает массу газа, перенесенную вследствие непостоянства плотности через площадку площади ΔS за время Δt.

Обозначим через $Q_{n\rho}$ поток массы через площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении, противоположном $\mathbf{n}$, связанный с непостоянством плотности.

Тогда имеем

$$Q_{n\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{2}\lambda c \frac{\partial\rho}{\partial n} \tag{2.4}$$

Из-за упрощенных представлений о движении молекул газа нельзя поручиться за правильность числового множителя в формуле (2.4). Поэтому следует положить

$$Q_{n\rho} = f_1 \lambda c \frac{\partial\rho}{\partial n} \tag{2.5}$$

где f_1 — безразмерный числовой множитель порядка единицы.

Из формулы (2.5) видим, что при переменности плотности в макроскопически покоящемся газе имеет место ток массы через площадку, неподвижную по отношению к газу. Это явление тока массы из-за переменности плотности целесообразно назвать плотностной самодиффузией.

Очевидно, что рассуждения сохранятся и в том случае, если рассмотреть макроскопически движущийся газ и площадку, движущуюся в пространстве со скоростью $\mathbf{v}$ макроскопического движения газа. Самодиффузионный плотностной поток массы $Q_{n\rho}$ и в этом случае тоже будет даваться формулой (2.5).

Заметим, что плотностная самодиффузия никогда не учитывалась при написании уравнений движения вязкого газа.

2. *Плотностная теплопроводность.* Рассмотрим, как и выше, некоторую неподвижную площадку площади ΔS с нормалью $\mathbf{n}$ в макроскопически покоящемся газе, сохраним прежние обозначения и рассмотрим вопрос о переносе внутренней энергии через площадку ΔS, предполагая температуру газа постоянной.

Вниз будет перенесена масса $\frac{1}{2}\Delta m_2$ с внутренней энергией ΔE_2, наверх будет перенесена масса $\frac{1}{2}\Delta m_1$ с внутренней энергией ΔE_1. Очевидно, имеем

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2}\Delta m_2 c_v T, \qquad \Delta E_1 = \frac{1}{2}\Delta m_1 c_v T \tag{2.6}$$

Величина

$$\Delta E = \Delta E_2 - \Delta E_1 \tag{2.7}$$

дает количество внутренней энергии, перенесенной из-за непостоянства плотности через площадку ΔS в течение времени Δt.

Обозначим через $t_{n\rho}$ поток внутренней энергии через площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в направлении, противоположном $\mathbf{n}$, связанный с непостоянством плотности. Имеем

$$t_{n\rho} = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = f_1 \lambda c c_v T \frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{2.8}$$

Если не ручаться за правильность числового множителя, то следует положить

$$t_{n\rho} = f_2 \lambda c c_v T \frac{\partial \rho}{\partial n} \tag{2.9}$$

где f_2 — некоторый числовой множитель порядка единицы.

Очевидно, что рассуждения останутся в силе и в том случае, если рассматривать макроскопически движущийся газ и площадку ΔS, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ макроскопического движения газа. Формула (2.9) будет и в этом случае давать нам поток внутренней энергии, связанный с переменностью плотности.

Явление переноса энергии через площадку, движущуюся вместе с газом, происходящее от переменности плотности, целесообразно назвать плотностной теплопроводностью.

Заметим, что явление плотностной теплопроводности никогда не учитывалось при выводе уравнений движения вязкого газа.

3. Вязкость. Используя ту же самую упрощенную схематизацию движения молекул, нетрудно рассмотреть и вопрос о переносе количества движения через площадку, движущуюся вместе с газом, для тех случаев движения, когда макроскопическая скорость движения газа переменна в пространстве.

Для появляющихся здесь коэффициентов вязкости μ_1 и μ, стоящих при производных от компонент скорости по координатам в выражениях для потоков количества движения, при этом получаются формулы

$$\mu_1 = f_3 \rho \lambda c, \qquad \mu = f_4 \rho \lambda c \tag{2.10}$$

где f_3 и f_4 — числовые множители порядка единицы.

Замечание. Явления переноса не исчерпываются тремя рассмотренными явлениями хотя бы потому, что среди рассмотренных явлений нет обычной температурной теплопроводности.

Тем не менее уже из рассмотрения этих трех явлений можем сделать три существенных вывода.

Во-первых, для составления уравнений движения вязкого газа не может быть использована обычная схема рассуждений с жидким объемом постоянной массы, ибо за счет самодиффузионных токов массы масса объема, ограниченного замкнутой поверхностью, движущейся вместе с газом, может меняться.

Во-вторых, при составлении уравнений движения вязкого газа нельзя ограничиваться только учетом вязкости и обычной температурной теплопроводности, ибо существуют и другие явления переноса.

В-третьих, при составлении уравнений движения газа следует иметь в виду, что при переменности в пространстве гидродинамических элементов через поверхность, движущуюся вместе с газом, переносятся масса, количество движения и энергия.

§ 3. Общая запись законов изменения. Рассмотрим в пространстве с движущейся со скоростью **v** средой некоторый неподвижный объем V, ограниченный поверхностью S, и предположим, что в точках движущейся среды, заполняющей пространство, определена некоторая скалярная или векторная величина A, являющаяся функцией координат и времени.

Наряду с величиной A рассмотрим также и величину Φ, определяемую по формуле

$$\Phi = \iiint_V A\,dV \tag{3.1}$$

где dV — элемент объема V.

Для фиксированного объема V величина Φ будет функцией только одного времени t, и тогда, очевидно, будет иметь место формула

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iiint_V \frac{\partial A}{\partial t}\,dV \tag{3.2}$$

Допустим, что изменение величины Φ с течением времени происходит только за счет независимого действия следующих двух факторов:

1) внутри объема V имеет место возникновение величины Φ с объемной скоростью B, приводящее к тому, что за счет действия этого фактора в объеме dV в течение времени dt величина Φ испытывает изменение $\Delta_1\Phi$, определяемое формулой

$$\Delta_1\Phi = B\,dV\,dt \tag{3.3}$$

2) через поверхность S объема V имеет место ток величины Φ с поверхностной плотностью G_n, приводящей к тому, что за счет действия этого фактора на элементе поверхности dS с внешней нормалью **n** в течение времени dt величина Φ испытывает изменение $\Delta_2\Phi$, определяемое формулой

$$\Delta_2\Phi = G_n\,dS\,dt \tag{3.4}$$

Так как оба фактора действуют независимо друг от друга, то, интегрируя величину $\Delta_1\Phi$ по объему V, а величину $\Delta_2\Phi$ по поверхности S, складывая результаты интегрирований и деля на dt, получим второе выражение для $d\Phi / dt$, даваемое формулой

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iiint_V B\,dP + \iint_S G_n dS \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.2) с (3.5), приходим к равенству

$$\iiint_V \frac{\partial A}{\partial t}\,dP = \iiint_V B\,dP + \iint_S G_n dS \tag{3.6}$$

Условимся вести все рассмотрение в произвольных ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2, q_3, связанных с декартовыми координатами зависимостями, не содержащими времени, и выберем за объем V объем, ограниченный поверхностями

$$q_1 = a, \quad q_1 = q_1; \qquad q_2 = b, \quad q_2 = q_2; \qquad q_3 = c, \quad q_3 = q_3 \tag{3.7}$$

Если через H_1, H_2 и H_3 обозначить коэффициенты Ламе, то для выбранного объема равенство (3,6) перепишется следующим образом:

$$\int_a^{q_1}\int_b^{q_2}\int_c^{q_3} \frac{\partial A}{\partial t} H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 = \int_a^{q_1}\int_b^{q_2}\int_c^{q_3} B H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 +$$
$$+ \int_b^{q_3}\int_c^{q_2} [G_1(q_1, q_2, q_3, t) H_2(q_1, q_2, q_3) H_3(q_1, q_2, q_2) +$$
$$+ G_{-1}(a, q_2, q_3, t) H_2(a, q_2, q_3) H_3(a, q_2, q_3)]\, dq_2\, dq_3 +$$
$$+ \int_c^{q_3}\int_a^{q_1} [G_2(q_1, q_2, q_3, t) H_3(q_1, q_2, q_3) H_1(q_1, q_2, q_3) +$$
$$+ G_{-2}(q_1, b, q_3, t) H_3(q_1, b, q_3) H_1(q_1, b, q_3)]\, dq_3\, dq_1 +$$
$$+ \int_a^{q_1}\int_c^{q_3} [G_3(q_1, q_2, q_3, t) H_1(q_1, q_2, q_3) H_2(q_1, q_2, q_3) +$$
$$+ G_{-3}(q_2, q_2, c, t) H_1(q_1, q_2, c) H_2(q_1, q_2, c)\, dq_1\, dq_2 \tag{3.8}$$

где G_1, G_2, G_3 обозначают поверхностные плотности тока через грани криволинейного параллелепипеда с нормалями, параллельными осям q_1, q_2 и q_3, а через G_{-1}, G_{-2}, G_{-3} обозначены те же величины для противоположных направлений нормалей.

Дифференцируя обе части равенства (3.8) по q_1, q_2 и q_3, легко приходим к равенству

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial (G_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (G_2 H_3 H_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (G_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right] \tag{3.9}$$

Разобъем каждую из величин G_1, G_2, G_3 на две; положим

$$G_1 = -v_1 A + C_1, \qquad G_2 = -v_2 A + C_2, \qquad G_3 = -v_3 A + C_3 \tag{3.10}$$

где v_1, v_2 и v_3 — проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ среды на оси q_1, q_2 и q_3.

Смысл слагаемых в формулах (3.10) совершенно ясен. Если бы движущаяся среда перемещалась только как обычная (не газообразная) сплошная среда и если бы поток величины Φ был связан только с макроскопическим движением субстанции через поверхность S, то тогда мы имели бы в формулах (3.10) только первые слагаемые. На самом деле из-за молекулярного строения реальных сред поток через поверхность может быть связан не только с макроскопическим движением, но и с молекулярными движениями внутри субстанции, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$. Поэтому необходимы поправки к первым слагаемым, которые обозначены через C_1, C_2 и C_3. Эти поправки суть не что иное, как потоки через площадки, перемещающиеся со скоростью среды.

Вставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(A v_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(A v_3 H_1 H_2)\right] =$$
$$= B + \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(C_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(C_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(C_3 H_1 H_2)\right] \tag{3.11}$$

Или иначе

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial A}{\partial q_2}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial A}{\partial q_1}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial A}{\partial q_3}+$$

$$+\frac{A}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(v_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(v_3H_1H_2)\right]=$$

$$=B+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(C_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(C_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(C_3H_1H_2)\right] \quad (3.12)$$

Если воспользоваться известными формулами

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{v_1}{H_1}\frac{\partial A}{\partial q_1}+\frac{v_2}{H_2}\frac{\partial A}{\partial q_2}+\frac{v_3}{H_3}\frac{\partial A}{\partial q_3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(v_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(v_3H_1H_2)\right] \quad (3{,}13)$$

то уравнение (3.12) перепишется в следующем виде[1]:

$$\frac{dA}{dt}+A\operatorname{div}\mathbf{v}=B+\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(C_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(C_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(C_3H_1H_2)\right] \quad (3.14)$$

Это уравнение представляет собой искомую запись в дифференциальной форме общего закона изменения величины A при сделанных выше предположениях о факторах, определяющих изменение величины Φ, связанной с A формулой (3.1).

§ 4. Уравнения движения среды. При помощи уравнения (3.14) уравнения движения среды при учете потоков массы, количества движения и энергии выводятся очень просто, если под законами изменения, которые выражены уравнением (3.14), подразумевать законы сохранения масс, количеств движения и сохранения энергии.

Для получения уравнения неразрывности нужно взять закон сохранения масс и, предполагая отсутствие пространственно распределенных источников, положить

$$\Phi=M,\quad A=\rho,\quad B=0,\quad C_1=Q_1,\quad C_2=Q_2,\quad C_3=Q_3 \quad (4.1)$$

где M — масса, ρ — плотность, Q_1, Q_2, Q_3 — потоки масс вследствие самодиффузии через площадки, перпендикулярные осям координат.

Тогда получим уравнение

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1H_2H_3)+\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_2H_3H_1)+\frac{\partial}{\partial q_3}(Q_3H_1H_2)\right] \quad (4.2)$$

---

[1] Уравнение (3.14) можно получить и при помощи рассмотрения подвижного объема V, ограниченного поверхностью S, точки которой перемещаются с макроскопической скоростью $\mathbf{v}$ движения среды.

В этом случае вместо (3.6) получается уравнение

$$\iiint\limits_V\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\operatorname{div}A\mathbf{v}\right)dV=\iiint\limits_V B\,dV+\iint\limits_S C_n\,dS \quad (3.6а)$$

где C_n — поток величины Φ через площадку, движущуюся вместе с газом и имеющую нормаль $\mathbf{n}$. Из (3.6а) следует (3.14) и одновременно еще раз более наглядно вскрывается смысл величин C_1, C_2, C_3.

Для получения собственно уравнений движения нужно взять закон количеств движения и положить

$$\Phi = \mathbf{K}, \quad A = \rho\mathbf{v}, \quad B = \rho\mathbf{F}, \quad C_1 = \boldsymbol{\tau}_1, \quad C_2 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad C_3 = \boldsymbol{\tau}_3 \tag{4.3}$$

где $\mathbf{K}$ — количество движения, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{F}$ — массовая сила, $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$, $\boldsymbol{\tau}_3$ — потоки количеств движения через площадки, перпендикулярные осям, или, что то же самое, напряжения поверхностных сил.

Подставляя (4.3) в (3.14), получаем

$$\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{v} = \tag{4.4}$$
$$= \rho\mathbf{F} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{\tau}_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{\tau}_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{\tau}_3H_1H_2)\right]$$

или

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v}\right) = \tag{4.5}$$
$$= \rho\mathbf{F} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{\tau}_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{\tau}_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{\tau}_3H_1H_2)\right]$$

Заменяя в (4.5) скобку в левой части при помощи (4.2), получим

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(Q_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(Q_3H_1H_2)\right] =$$
$$= \rho\mathbf{F} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{\tau}_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{\tau}_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{\tau}_3H_1H_2)\right] \tag{4.6}$$

или

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(Q_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(Q_3H_1H_2)\right] =$$
$$= \rho\mathbf{F} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}_3}{\partial q_3} +$$
$$+ \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3) + \frac{\boldsymbol{\tau}_2}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1) + \frac{\boldsymbol{\tau}_3}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2) \tag{4.7}$$

Уравнением (4.7) практически приходится пользоваться не в векторном виде, а в проекциях на оси криволинейных координат. Поэтому нужно иметь проекции на оси криволинейных координат тех векторов, которые входят в это уравнение.

Формулы для проекций ускорения $d\mathbf{v}/dt$ известны:

$$W_i = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1}\frac{\partial v_i}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2}\frac{\partial v_i}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3}\frac{\partial v_i}{\partial q_3} + \frac{v_iv_{i+1}}{H_iH_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} +$$
$$+ \frac{v_iv_{i+2}}{H_iH_{i+2}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+2}} - \frac{v_{i+1}^2}{H_iH_{i+1}}\frac{\partial H_{i+1}}{\partial q_i} - \frac{v_{i+2}^2}{H_iH_{i+2}}\frac{\partial H_{i+2}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

где $v_i = v_{i+3}$ — проекции скорости на оси криволинейных координат, $H_i = H_{i+3}$ — коэффициенты Ламе.

Получение формул для проекций производных по координатам от векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ и $\boldsymbol{\tau}_3$ тоже не представляет никакого труда. Положим

$$\frac{\partial\mathbf{i}_k}{\partial q_l} = B_{kl}^{(1)}\mathbf{i}_1 + B_{kl}^{(2)}\mathbf{i}_2 + B_{kl}^{(3)}\mathbf{i}_3 \qquad (k = 1, 2, 3; \quad l = 1, 2, 3) \tag{4.9}$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ — орты криволинейных координат и $B_{kl}^{(m)}$ — коэффициенты, которые найдем позже.

Учитывая (4.9), для производной любого вектора $\mathbf{a}$ по координате q_l будем иметь формулу

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q_l} = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_l} + a_1 B_{1l}^{(j)} + a_2 B_{2l}^{(j)} + a_3 B_{3l}^{(j)} \right) \mathbf{i}_j \tag{4.10}$$

где a_1, a_2, a_3 — проекции вектора на криволинейные оси.

Используя формулы (4.8) и (4.10), из векторного уравнения (4.7) получим три скалярных уравнения:

$$\begin{gathered}
\rho \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_j}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_j}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_j}{\partial q_3} + \right. \\
\left. + \frac{v_j v_{j+1}}{H_j H_{j+1}} \frac{\partial H_j}{\partial q_{j+1}} + \frac{v_j v_{j+2}}{H_j H_{j+2}} \frac{\partial H_j}{\partial q_{j+2}} - \frac{v_{j+1}^2}{H_j H_{j+1}} \frac{\partial H_{j+1}}{\partial q_j} - \frac{v_{j+2}^2}{H_j H_{j+2}} \frac{\partial H_{j+2}}{\partial q_j} \right] + \\
+ \frac{v_j}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (Q_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (Q_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (Q_3 H_1 H_2) \right] = \\
= \rho F_j + \frac{\tau_{1j}}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3) + \frac{\tau_{2j}}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1) + \frac{\tau_{3j}}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2) + \\
+ \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \tau_{1j}}{\partial q_1} + \tau_{11} B_{11}{}^{(j)} + \tau_{12} B_{21}{}^{(j)} + \tau_{13} B_{31}{}^{(j)} \right) + \\
+ \frac{1}{H_2} \left(\frac{\partial \tau_{2j}}{\partial q_2} + \tau_{21} B_{12}{}^{(j)} + \tau_{22} B_{22}{}^{(j)} + \tau_{23} B_{32}{}^{(j)} \right) + \\
+ \frac{1}{H_3} \left(\frac{\partial \tau_{3j}}{\partial q_3} + \tau_{31} B_{13}{}^{(j)} + \tau_{32} B_{23}{}^{(j)} + \tau_{33} B_{33}{}^{(j)} \right) \qquad (j = 1, 2, 3)
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Найдем выражения для коэффициентов $B_{kl}{}^{(m)}$. Из (4.9) имеем

$$B_{kl}{}^{(m)} = \frac{\partial \mathbf{i}_k}{\partial q_l} \cdot \mathbf{i}_m \tag{4.12}$$

Если $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей декартовых координат и если связь между декартовыми и криволинейными координатами дается формулами

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \qquad y = y(q_1, q_2, q_3), \qquad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{4.13}$$

то, очевидно, имеем

$$\begin{gathered}
\mathbf{i}_k = \frac{1}{H_k} \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \mathbf{k} \right) \\
\mathbf{i}_m = \frac{1}{H_m} \left(\frac{\partial x}{\partial q_m} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m} \mathbf{k} \right)
\end{gathered} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_k}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} \right) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \mathbf{k}$$

Следовательно,

$$B_{kl}{}^{(m)} = \frac{1}{H_m} \left[\frac{\partial x}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial x}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial y}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial y}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial z}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{1}{H_k} \frac{\partial z}{\partial q_k} \right) \right] \tag{4.15}$$

Уравнения (4.11) при наличии формул (4.15) и являются отыскиваемыми нами уравнениями, записывающими в дифференциальной форме закон количеств движения.

Переходим к выводу уравнения энергии. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии. Положим

$$\Phi = U^*, \qquad A = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho E, \qquad B = \rho \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \varepsilon \tag{4.16}$$

$$C_1 = \boldsymbol{\tau}_1\cdot\mathbf{v} + t_1, \qquad C_2 = \boldsymbol{\tau}_2\cdot\mathbf{v} + t_2, \qquad C_2 = \boldsymbol{\tau}_3\cdot\mathbf{v} + t_3$$

где U^* — полная энергия, E — внутренняя энергия единицы массы, $\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ — мощность, развиваемая объемными силами, $\boldsymbol{\tau}_1\cdot\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau}_2\cdot\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\tau}_3\cdot\mathbf{v}$ — мощности, развиваемые поверхностными силами, приходящимися на единицу площади площадок, перпендикулярных осям координат, ε — объемная скорость выделения химической, световой и т. п. энергий, t_1, t_2, t_3 — потоки тепла через площадки, перпендикулярные осям.

Подставляя (4.16) в (3.14), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+E\right)\right] + \rho\left(\frac{v^2}{2}+E\right)\operatorname{div}\mathbf{v} = \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \varepsilon + \\ + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\mathbf{v}H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\mathbf{v}H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{\tau}_3\cdot\mathbf{v}H_1H_2)\right] + \\ + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(t_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(t_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(t_3H_1H_2)\right]\end{aligned} \tag{4.17}$$

или

$$\begin{aligned}\rho\frac{dE}{dt} + \left(E+\frac{v^2}{2}\right)\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \rho\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \varepsilon + \\ + \frac{\mathbf{v}}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\boldsymbol{\tau}_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\boldsymbol{\tau}_1H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\boldsymbol{\tau}_3H_1H_2)\right] + \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{H_1}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_2}{H_2}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_2} + \\ + \frac{\boldsymbol{\tau}_3}{H_3}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(t_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(t_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(t_3H_1H_2)\right]\end{aligned} \tag{4.18}$$

Используя уравнение (4.2) и уравнение (4.6), скалярно умноженное на $\mathbf{v}$, можем в предыдущем уравнении произвести очевидные упрощения. Тогда получим

$$\begin{aligned}\rho\frac{dE}{dt} + \left(E-\frac{v^2}{2}\right)\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(Q_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(Q_3H_1H_2)\right] = \\ = \varepsilon + \frac{\boldsymbol{\tau}_1}{H_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_2}{H_2}\cdot\frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\boldsymbol{\tau}_3}{H_3}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial q_3} + \\ + \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(t_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(t_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(t_3H_1H_2)\right]\end{aligned} \tag{4.19}$$

Это и есть искомое уравнение энергии. При его написании в развернутом виде следует иметь в виду, что производные от вектора скорости по координатам должны быть вычислены при помощи формулы (4.10).

В случае декартовых координат x, y и z, когда $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ и $B_{kl}^{(m)} = 0$, все выведенные уравнения существенно упрощаются и из уравнений (4.2), (4.11) и (4.18) получаются следующие простые уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \\
&\rho \frac{dv_x}{dt} + v_x\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{dy} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right) = \rho F_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{dz} \\
&\rho \frac{dv_y}{dt} + v_y\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right) = \rho F_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\
&\rho \frac{dv_z}{dt} + v_z\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{dy} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right) = \rho F_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial y} \\
&\rho \frac{dE}{dt} + \left(E - \frac{v^2}{2}\right)\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}\right) = \\
&\qquad = \varepsilon + \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \frac{\partial t_z}{\partial z} + \boldsymbol{\tau}_x \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \boldsymbol{\tau}_y \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \boldsymbol{\tau}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Входящие в полученные уравнения величины Q_i, $\boldsymbol{\tau}_i$ и t_i определяются в следующем параграфе.

§ 5. Выражения для потоков массы, количества движения и тепла. При определении величин потоков[1] массы Q_i, количества движения τ_{ik} и тепла t_i через площадки, движущиеся со скоростью газа $\mathbf{v}$ перпендикулярно осям q_i, будем считать, что эти величины должны быть линейными функциями первых производных от гидродинамических элементов по декартовым координатам[2]. Коэффициенты этих линейных функций

[1] Для упрощения изложения опускается указание, что речь идет о потоках через подвижные площадки.

[2] Это допущение можно принять, исходя из многочисленных экспериментов, посвященных исследованию различного рода частных случаев явлений переноса массы, количества движения и тепловой энергии в газах. Результаты этих экспериментов показали, что при соблюдении некоторых условий потоки этих величин действительно являются линейными функциями первых производных от гидродинамических элементов v_x, v_y, v_z, ρ и T по декартовым координатам x, y и z.

Ясно, что, принимая такое допущение, мы несколько сужаем класс движений газа, доступных исследованию при помощи получаемых уравнений.

Действительно, для справедливости этого допущения, например, совершенно необходимо, чтобы гидродинамические элементы с достаточной точностью допускали линейную аппроксимацию на расстояниях порядка нескольких длин среднего свободного пробега молекул, ибо в противном случае состояние газа в объеме, формирующем потоки и практически имеющем размеры порядка нескольких длин среднего свободного пробега молекул, не определялось бы заданием самих гидродинамических элементов и их первых производных в некоторой точке объема. Не имея же данных о состоянии газа в объеме, формирующем потоки, нельзя было бы даже и ставить задачу об отыскании выражений для потоков через гидродинамические элементы и их первые производные. Однако, несмотря на некоторое сужение класса доступных такому рассмотрению движений газа, опыт и кинетическая теория газов говорят за то, что сформулированное выше основное допущение будет с достаточной точностью выполняться в весьма широком классе практически интересных движений газа, ибо для справедливости этого допущения достаточно тех основных допущений, которые были сформулированы в начале работы.

Здесь выражения для потоков первоначально определяются в декартовых координатах, а затем уже в общих криволинейных ортогональных координатах.

должны зависеть только от самих гидродинамических элементов. Очевидно, что они не могут зависеть от проекций v_x, v_y и v_z и скорости $\mathbf{v}$. Поэтому они должны быть функциями только плотности и температуры [1].

Займемся отыскиванием линейных форм для Q_x, Q_y и Q_z. Исходя из сказанного для Q_x, мы должны положить

$$\begin{aligned} Q_x = A_x + a_{1x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + a_{2x}\frac{\partial\rho}{\partial y} + a_{3x}\frac{\partial\rho}{\partial z} + \\ + b_{1x}\frac{\partial T}{\partial x} + b_{2x}\frac{\partial T}{\partial y} + b_{3x}\frac{\partial T}{\partial z} + \\ + c_{1x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{2x}\frac{\partial v_x}{\partial y} + c_{3x}\frac{\partial v_x}{\partial z} + \\ + d_{1x}\frac{\partial v_y}{\partial x} + d_{2x}\frac{\partial v_y}{\partial y} + d_{3x}\frac{\partial v_y}{\partial z} + \\ + e_{1x}\frac{\partial v_z}{\partial x} + e_{2x}\frac{\partial v_z}{\partial y} + e_{3x}\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Очевидно, что при изменении направления оси x на противоположное величина Q_x должна изменить знак на обратный. Поэтому в правой части формулы (5.1) не должно быть членов, не меняющих знака при перемене направления оси x на противоположное. Отсюда

$$A_x = a_{2x} = a_{3x} = b_{2x} = b_{3x} = c_{1x} = d_{2x} = d_{3x} = e_{2x} = e_{3x} = 0 \tag{5.2}$$

Далее, Q_x не должна зависеть от направления осей y и z. Поэтому

$$c_{2x} = c_{3x} = d_{1x} = e_{1x} = 0 \tag{5.3}$$

Следовательно,

$$Q_x = a_{1x}\frac{\partial\rho}{\partial x} + b_{1x}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5.4}$$

Так как оси x, y и z совершенно равноправны, то должно быть

$$a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} = D_1, \qquad b_{1x} = b_{2y} = b_{3z} = D_2 \tag{5.5}$$

Таким образом, имеем

$$Q_x = D_1\frac{\partial\rho}{\partial x} + D_2\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad Q_y = D_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + D_2\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad Q_z = D_1\frac{\partial\rho}{\partial z} + D_2\frac{\partial T}{\partial z} \tag{5.6}$$

Коэффициент D_1 назовем коэффициентом плотностной самодиффузии, а коэффициент D_2 назовем коэффициентом температурной самодиффузии.

Для линейных форм, дающих потоки тепла t_x, t_y и t_z. повторяя только что изложенные соображения, приходим к формулам

$$t_x = K_1\frac{\partial\rho}{\partial x} + K_2\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad t_y = K_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + K_2\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad t_z = K_1\frac{\partial\rho}{\partial z} + K_2\frac{\partial T}{\partial z} \tag{5.7}$$

где K_1 можно назвать коэффициентом плотностной теплопроводности, а K_2 коэффициентом температурной теплопроводности. Коэффициенты D_1, D_2 и K_1, K_2 встречаются в кинетической теории газов.

Наконец, установим для декартовых координат вид линейных форм, дающих проекции векторов $\boldsymbol{\tau}_x$, $\boldsymbol{\tau}_y$ и $\boldsymbol{\tau}_z$ на оси x, y и z.

[1] Речь идет о потоках через площадки, движущиеся вместе с газом. Относительная скорость газа по отношению к площадке всегда ноль. Поэтому значения величин v_x, v_y и v_z не могут отражаться на потоках.

Обратимся к уравнению (3.14) и запишем его в декартовых координатах применительно к закону моментов количеств движения. Положим

$$\begin{aligned} &\Phi = \mathbf{L}, && \mathbf{A} = \mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}, && \mathbf{B} = \mathbf{r} \times \rho\mathbf{F} \\ &\mathbf{C}_1 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_x, && \mathbf{C}_2 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_y, && \mathbf{C}_3 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\mathbf{L}$ — момент количества движения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор движущейся точки среды, $\mathbf{r} \times \rho\mathbf{F}$ — момент массовых сил, приложенных к единице объема, $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_x$, $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_y$, $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z$ — потоки момента количества движения через подвижные площадки, перпендикулярные осям.

Вставляя (5.8) в (3.14), получим

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times \rho\mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \rho\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_z) \tag{5.9}$$

или

$$\begin{aligned} r \times \left[\frac{d}{dt}(\rho\mathbf{v}) + \rho\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} - \rho\mathbf{F} - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_z}{\partial z}\right] + \\ + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \boldsymbol{\tau}_x + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \boldsymbol{\tau}_y + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \boldsymbol{\tau}_z = 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь квадратная скобка равна нулю на основании (4.4). Кроме того,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \rho\mathbf{v} = \mathbf{v} \times \rho\mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \mathbf{i}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \mathbf{j}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \tag{5.11}$$

Следовательно,

$$\mathbf{i} \times \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{j} \times \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}_z = 0 \tag{5-12}$$

Это векторное равенство эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

представляющим собой распространение известного свойства симметрии тензора напряжений на сплошные среды с самодиффузией.

Имея это в виду, и в соответствии с общими соображениями положим

$$\begin{aligned} \tau_{ik} = A_{ik} + a_{ik}^{(1)} \frac{\partial \rho}{\partial x} + a_{ik}^{(2)} \frac{\partial \rho}{\partial y} + a_{ik}^{(3)} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \\ + b_{ik}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} + b_{ik}^{(2)} \frac{\partial T}{\partial y} + b_{ik}^{(3)} \frac{\partial T}{\partial z} + \\ + c_{ik}^{(1)} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{ik}^{(2)} \frac{\partial v_y}{\partial y} + c_{ik}^{(3)} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \\ + d_{ik}^{(1)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + d_{ik}^{(2)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + d_{ik}^{(3)} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \\ + e_{ik}^{(1)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + e_{ik}^{(2)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + e_{ik}^{(3)} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Величины A_{ik}, как и другие коэффициенты в (5.13), не зависят от значений производных от гидродинамических элементов по координатам; они могут быть найдены по тем значениям, которые они принимают в газе с постоянными гидродинамическими элементами

$$A_{kk} = -p, \qquad A_{ik} = 0 \qquad i \neq k \tag{5.14}$$

где p — давление в газе с постоянными гидродинамическими элементами, которое для совершенного газа определяется уравнением Клапейрона

$$p = R\rho T \tag{5.15}$$

Далее, так как величины τ_{ik} не изменяются при изменении направления всех осей на обратное, а производные от ρ и T по координатам при таком преобразовании меняют знак на обратный, то

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik}^{(2)} = a_{ik}^{(3)} = b_{ik}^{(1)} = b_{ik}^{(2)} = b_{ik}^{(3)} = 0 \tag{5.16}$$

Наконец, вследствие (5.12), очевидно, имеем

$$e_{ik}^{(1)} = e_{ik}^{(2)} = e_{ik}^{(3)} = 0 \tag{5.17}$$

Поэтому величины τ_{ik} (компоненты тензора напряжений) оказываются линейными функциями только компонент тензора скоростей деформаций. Этого, как известно [5], достаточно для получения равенств

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= -p + \mu_1 \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\
\tau_{yy} &= -p + \mu_1 \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\
\tau_{zz} &= -p + \mu_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

где μ_1 и μ — некоторые функции, вообще говоря, плотности ρ и температуры T. Величина μ, как известно, называется коэффициентом вязкости, а величина μ_1 — коэффициентом второй вязкости.

Если ввести в рассмотрение тензоры: напряжений $\boldsymbol{T}$, скоростей деформаций $\boldsymbol{\Pi}$ и единичный $\boldsymbol{I}$, то все предыдущие равенства объединяются в одном:

$$\boldsymbol{T} = (-p + \mu_1 \operatorname{div} \boldsymbol{v})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\Pi} \tag{5.19}$$

которое весьма удобно для перехода к любым ортогональным криволинейным координатам. Переходя в (5.6) и (5.7) к криволинейным ортогональным координатам, очевидно, получим

$$Q_i = D_1 \frac{1}{H_i}\frac{\partial\rho}{\partial q_i} + D_2 \frac{1}{H_i}\frac{\partial T}{\partial q_i}, \qquad t_i = K_1 \frac{1}{H_i}\frac{\partial\rho}{\partial q_i} + K_2 \frac{1}{H_i}\frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{5.20}$$

Далее, переходя в (5.19) к криволинейным координатам, проделывая обычные выкладки [5], получаем последние из искомых формул:

$$\begin{aligned}
\tau_{ii} &= -p + \mu_1 \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3H_1H_2)\right] + \\
&\quad + 2\mu\left[\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_i}{\partial q_i} + \frac{v_{i+1}}{H_iH_{i+1}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+1}} + \frac{v_{i+2}}{H_iH_{i+2}}\frac{\partial H_i}{\partial q_{i+2}}\right] \\
\tau_{ik} &= \mu\left[\frac{1}{H_k}\frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial v_k}{\partial q_i} - \frac{v_i}{H_iH_k}\frac{\partial H_i}{\partial q_k} - \frac{v_k}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_i}\right]
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Полученные выражения для потоков массы, количества движения и тепла содержат шесть коэффициентов: D_1, D_2, K_1, K_2, μ_1, μ.

§ 6. Выражения для коэффициентов μ_1, D_1, D_2, K_1, K_2. Для установления выражений для коэффициентов μ_1, D_1, D_2, K_1 и K_2 воспользуемся методами теории размерностей.

Если ввести в рассмотрение коэффициент c_v теплоемкости при постоянном объеме, выраженный в механических, а не тепловых единицах, то будем иметь следующие соотношения между размерностями:

$$[\mu_1]=[\mu], \quad [D_1]=\left[\frac{\mu}{\rho}\right], \quad [D_2]=\left[\frac{u}{T}\right], \quad [K_1]=\left[\frac{\mu c_v T}{\rho}\right], \quad [K_2]=[\mu c_v] \tag{6.1}$$

Поэтому можно положить

$$\mu_1 = a\mu, \quad D_1 = \frac{\mu}{\rho}\alpha_1, \quad D_2 = \frac{\mu}{T}\alpha_2, \quad K_1 = \frac{\mu c_v T}{\rho}\beta_1, \quad K_2 = \mu c_v \beta_2 \tag{6.2}$$

где a, α_1, α_2, β_1 и β_2 будут безразмерными функциями безразмерных параметров, определяющих состояние газа в равновесном состоянии, так как формулы для потоков с одними и теми же коэффициентами оказываются применимы для всех рассматриваемых состояний газа и в том числе для таких, которые сколь угодно близки к равновесному состоянию.

Равновесное состояние данного совершенного газа вполне определяется заданием его плотности ρ и температуры T. Из этих величин нельзя составить ни одной безразмерной комбинации. Поэтому для совершенного газа величины a, α_1, α_2, β_1 и β_2 будут константами, зависящими от сорта газа, и потому коэффициенты μ_1, D_1, D_2, K_1 и K_2 можно считать известными с точностью до констант a, α_1, α_2, β_1 и β_2, если известен коэффициент вязкости μ, ибо коэффициент c_v теплоемкости при постоянном объеме для совершенного газа постоянен.

§ 7. О коэффициентах a, α_1, α_2, β_1 **и** β_2. Кинетическая теория газов позволяет ожидать, что числовые коэффициенты a, α_1, α_2, β_1 и β_2 будут величинами порядка единицы. Вообще же говоря, эти величины должны быть найдены из соответственным образом поставленных опытов.

В настоящее время мы не располагаем опытными значениями всех этих коэффициентов, но тем не менее, опираясь на некоторые опытные результаты и на соображения из кинетической теории газов, мы дадим числовые значения этих коффициентовдля одноатомных газов.

Прежде всего из кинетической теории газов хорошо известно, что для одноатомных газов должно быть [6]

$$a = -\frac{2}{3} \tag{7.1}$$

Далее, из опытов над самодиффузией газов было установлено [7], что для всех одноатомных газов коэффициент (в пределах точности опыта) один и тот же, а именно

$$\alpha_1 = 1.30 \tag{7.2}$$

что довольно близко и к теоретическим значениям этого коэффициента, получаемым для различных моделей молекул. Имея значение α_1, нетрудно сразу же установить и значение β_1.

По самому смыслу коэффициента D_1 можно утверждать, что при постоянной температуре T и переменной плотности ρ через площадку площади dS с нормалью $\mathbf{n}$ за время dt из-за плотностной самодиффузии будет перенесена масса Δm, даваемая формулой

$$\Delta m = D_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} dS\, dt \tag{7.3}$$

Эта масса обладает тепловой энергией Δq, где

$$\Delta q = \Delta m c_v T = c_v T D_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} dS\, dt \tag{7.4}$$

Эта тепловая энергия является тепловой энергией, прошедшей через нашу площадку за время dt вследствие плотностной теплопроводности. Следовательно, для величины Δq имеет место и другое выражение:

$$\Delta q = K_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} dS\, dt \tag{7.5}$$

Сравнивая (7.4) с (7.5), получаем $\alpha_1 = \beta_1$. Следовательно, для одноатомных газов

$$\beta_1 = 1.30 \tag{7.6}$$

Обратимся, далее, к установившейся передаче тепла через плоский слой газа, заключенный между двумя стенками, находящимися на расстоянии Δl, при разности температур стенок, равной ΔT. Если через q обозначить поток тепла, то из экспериментальных данных нетрудно найти значение величины f, определяемое формулой

$$f = \frac{q}{\mu c_v \Delta T / \Delta l} \tag{7.7}$$

Среднее опытное значение этой величины для одноатомных газов [8] равно 2.51. С другой стороны, ниже будет показано (§ 9, 10), что

$$f = \beta_2 - \beta_1 \tag{7.8}$$

Следовательно, для одноатомных газов

$$\beta_2 = 3.81 \tag{7.9}$$

Займемся теперь отысканием α_2.

Рассмотрим теплопередачу в покоящемся газе постоянной плотности и переменной температуры. Обозначим через Δq количество тепловой энергии, прошедшее через площадку площади dS с нормалью $\mathbf{n}$ за промежуток времени dt. Очевидно, имеем

$$\Delta q = K_2 \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \tag{7.10}$$

Величина Δq состоит из двух слагаемых: Δq_1 и Δq_2.

Первое слагаемое Δq_1 представляет собой количество тепловой энергии, протекшей через площадку за счет только переменности температуры, пренебрегая тепловой самодиффузией.

Эта величина может быть вычислена по теоретической формуле

$$\Delta q_1 = f^* \mu\, c_v \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \tag{7.11}$$

Основанием для уверенного применения этой теоретической формулы к одноатомным газам служит то обстоятельство, что для самых различных моделей молекул одноатомных газов для числового коэффициента f^* получаются весьма близкие значения [9]. Именно, для всех теоретически рассмотренных моделей одноатомных молекул f^* оказывается заключенным в пределах $2.50 \div 2.52$. Поэтому примем

$$\Delta q_1 = 2.51 \mu\, c_v \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \tag{7.12}$$

Второе слагаемое Δq_2 представляет собой количество тепловой энергии, перенесенной тепло-самодиффузионным потоком массы. Если обозначить через Δm массу, проникшую через площадку вследствие тепловой самодиффузии, то будем иметь

$$\Delta m = D_2 \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \tag{7.13}$$

Эта масса обладает тепловой энергией Δq_2, где

$$\Delta q_2 = \Delta m\, c_v T = c_v T D_2 \frac{\partial T}{\partial n} dS\, dt \tag{7.14}$$

Сравнивая два полученных выражения для Δq, получим

$$\alpha_2 = \beta_2 - f^* \tag{7.15}$$

Следовательно,

$$\alpha_2 = 1.30 \tag{7.16}$$

В соответствии с предварительными ожиданиями все коэффициенты α_1, α_2, β_1, β_2 и a оказались величинами порядка единицы.

Замечание. Относительная величина различных членов в уравнениях движения в разных условиях будет разной. Можно указать такие условия движения газа, когда основное значение будут иметь самодиффузионные члены в них, можно указать и такие условия движения, когда основное значение будут иметь только члены, связанные с тензором напряжений, и т. д. Поэтому нельзя говорить об относительной величине различных членов в уравнениях движения, не выделив определенного класса движений.

С точки зрения практики весьма важным классом движений являются такие движения, когда все гидродинамические элементы (скорость v, плотность ρ и температура T) изменяют свою величину на величину порядка их самих на расстояниях порядка одной и той же длины L.

К таким движениям принадлежат, например, движения в пограничном слое при больших скоростях. В этих движениях в точках, отделенных расстояниям порядка толщины пограничного слоя δ, вообще говоря, гидродинамические элементы разнятся на величины порядка самих гидродинамических элементов.

Если иметь в виду именно такие движения с одним характерным расстоянием для всех гидродинамических элементов, то стандартный переход к безразмерным величинам сразу же приводит нас к выводу, что в этих движениях все самодиффузионные, теплопроводные и вязкие члены имеют одну и ту же относительную величину, если только константы a, α_1, α_2, β_1 и β_2 имеют один порядок.

Так как согласно кинетической теории газов все эти константы порядка единицы, то из сказанного следует, что для рассматриваемых движений при удержании в уравнениях хотя бы одного члена, связанного с явлением переноса, следует удержать в них и все другие члены, связанные с этими явлениями.

Далее, это означает, что для движений рассматриваемого класса имеет смысл пользоваться или полными выведенными уравнениями, или уравнениями движения идеальной сжимаемой жидкости.

§ 8. Граничные условия для системы дифференциальных уравнений движения газа. Для интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений движения газа необходимы граничные условия, имеющие место на поверхностях твердых тел, обтекаемых газом, и граничные условия на бесконечности в том случае, если область, занятая газом, простирается на бесконечность[1].

Весьма просто решается вопрос о граничных условиях на бесконечности. Очевидно, что эти условия должны заключаться в задании на бесконечности плотности, температуры и компонент скорости.

Сложнее решается вопрос о граничных условиях на поверхностях обтекаемых твердых тел.

Прежде всего совершенно ясно, что через поверхность обтекаемого твердого тела не проникает масса газа.

Если через $\mathbf{n}$ обозначить нормаль к поверхности S обтекаемого тела и предположить, что обтекаемое тело неподвижно в пространстве, то этот физический факт, очевидно, запишется следующим образом:

$$\left(D_1 \frac{\partial \rho}{\partial n} + D_2 \frac{\partial T}{\partial n}\right)_s = (\rho v_n)_s \tag{8.1}$$

Чтобы получить граничные условия на поверхности обтекаемого твердого тела, будем полагать, что в непосредственной поверхности газ движется или очень медленно, или покоится[2].

Пренебрегая малыми скоростями движения газа в касательных к поверхности S направлениях и обозначая через $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ касательные к поверхности S векторы, получим еще два краевых условия:

$$(v_{l_1})_S = 0, \qquad (v_{l_2})_S = 0 \tag{8.2}$$

В покоящемся газе мы должны иметь статическое распределение давлений. Поэтому с известным приближением можем положить

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S = (\rho F_n)_S \tag{8.3}$$

где F_n — проекция массовой силы на нормаль к поверхности.

Краевые условия (8.2) довольно хорошо подтверждаются экспериментом. Краевое условие (8.3) еще должно быть проверено опытом и в настоящее время может рассматриваться как вероятная гипотеза.

---

[1] Так как порядок полученной системы на единицу выше, чем порядок той системы, которая имеет место при неполном учете явлений переноса, то старые граничные условия не соответствуют постановке задачи хотя бы потому, что их число не соответствует новому порядку системы уравнений движения.

[2] Можно привести некоторые физические соображения в обоснование этого допущения. Визуально гладкая обтекаемая поверхность может предполагаться для газа микро-движущийся вблизи от поверхности, газ будет находиться в условиях, как бы близких к условиям протекания через весьма мелкопористую среду.

Известны громадные коэффициенты сопротивления движению газа через различного рода мелкие решетки и пористые среды, а также известны и крайне незначительные расходы газа при движении через решетки и пористые среды, которые при достаточной мелкости пор практически оказываются нулями.

§ 9. Пример интегрирования системы уравнений движения газа. Рассмотрим одномерную простейшую задачу об установившейся передаче тепла через слой газа, находящийся между двумя параллельными плоскостями, при условии, что разница в температурах стенок мала и массовые силы отсутствуют.

Пусть мы имеем две параллельные плоскости $x = -l$ и $x = +l$. Пусть температура этих плоскостей соответственно равна T_1 и T_2. Пусть между плоскостями имеется газ в таком количестве, что он имел бы плотность ρ_0, если бы она была постоянной во всем пространстве, занятом газом. Пусть, наконец, величина

$$\varepsilon^* = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} \tag{9.1}$$

настолько мала, что ее квадратом можно было пренебрегать по сравнению с единицей.

Рассматриваемой задаче соответствует следующая несколько преобразованная система уравнений движения газа:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}(\rho v) = \frac{d}{dx}\left(D_1 \frac{d\rho}{dx} + D_2 \frac{dT}{dx}\right) \\ \frac{d}{dx}(\rho v^2) = \frac{d}{dx}\left(-R\rho T + \frac{4}{3}\mu \frac{dv}{dx}\right) \\ \rho c_v v \frac{dT}{dx} + \left(c_v T - \frac{v^2}{2}\right)\frac{d}{dx}(\rho v) = \\ = \frac{d}{dx}\left(K_1 \frac{d\rho}{dx} + K_2 \frac{dT}{dx}\right) + \left(-R\rho T + \frac{4}{3}\mu \frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx} \end{gathered} \tag{9.2}$$

Здесь для простоты газ считается одноатомным; это не снижает общности рассмотрения. Для определения постоянных интегрирования имеем следующую систему условий

$$\rho v = D_1 \frac{d\rho}{dx} + D_2 \frac{dT}{dx}, \quad T = T_2, \quad T\frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{при } x = +l \tag{9.3}$$

$$\rho v = D_1 \frac{d\rho}{dx} + D_2 \frac{dT}{dx}, \quad T = T_1, \quad T\frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{при } x = -l \tag{9.4}$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} \rho\, dx = \rho_0 \tag{9.5}$$

На первый взгляд может показаться, что мы имеем семь условий для определения шести постоянных интегрирования.

Однако рассмотрение первого из уравнений (9.2) сразу же показывает нам, что первые из условий (9.3) и (9.4) не являются независимыми и следуют одно из другого в силу этого дифференциального уравнения.

Так как величина ε^* предполагается малой, то естественно линеаризировать уравнения (9.2) и условия (9.3) — (9.5) Положим

$$\begin{gathered} \rho = \rho_0 + \rho', \quad T = \frac{1}{2}(T_2 + T_2) + T' = T_0 + T', \quad v = v' \\ D_i = D_i^{(0)} + D_i', \quad K_i = K_i^{(0)} + K_i', \quad \mu = \mu_0 + \mu' \end{gathered} \tag{9.6}$$

где величины со штрихами суть величины малые.

Тогда для определения величин ρ', v' и T' получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\rho_0 \frac{dv'}{dx} = D_1^{(0)} \frac{d^2\rho'}{dx^2} + D_2^{(0)} \frac{d^2T'}{dx^2} \\
\frac{4}{3}\mu_0 \frac{d^2v'}{dx^2} - R\left(T_0 \frac{d\rho'}{dx} + \rho_0 \frac{dT'}{dx}\right) = 0 \\
K_1^{(0)} \frac{d^2\rho'}{dx^2} + K_2^{(0)} \frac{d^2T'}{dx^2} = c_p \rho_0 T_0 \frac{dv'}{dx}
\end{gathered}
\tag{9.7}
$$

$$
R = c_p - c_v \tag{9.8}
$$

Кроме того, будем иметь следующую систему условий для определения постоянных интегрирования:

$$
\begin{gathered}
\rho_0 v' = D_1^{(0)} \frac{d\rho'}{dx} + D_2^{(0)} \frac{dT'}{dx} \qquad \text{при } x = +l \\
T' = \frac{T_2 - T_1}{2}, \quad T_0 \frac{d\rho'}{dx} + \rho_0 \frac{dT'}{dx} = 0 \qquad \text{при } x = +l \\
T' = -\frac{T_2 - T_1}{2}, \quad T_0 \frac{d\rho'}{dx} + \rho_0 \frac{dT'}{dx} = 0 \qquad \text{при } x = -l \\
\int_{-l}^{+l} \rho'\, dx = 0
\end{gathered}
\tag{9.9}
$$

Интегрируя первое и третье из уравнений (9.7) и учитывая первое из условий (9.9), получаем

$$
\begin{gathered}
D_1^{(0)} \frac{d\rho'}{dx} + D_2^{(0)} \frac{dT'}{dx} = \rho_0 v' \\
K_1^{(0)} \frac{d\rho'}{dx} + K_2^{(0)} \frac{dT'}{dx} = c_p \rho_0 T_0 v' + A\mu_0 c_v T_0
\end{gathered}
\tag{9.10}
$$

где $A\mu_0 c_v T_0$ — постоянная интегрирования. Так как в силу (6.2)

$$
\begin{aligned}
D_1^{(0)} &= \frac{\mu_0}{\rho_0}\alpha_1, \qquad & K_1^{(0)} &= \mu_0 c_v \beta_1 \frac{T_0}{\rho_0} \\
D_2^{(0)} &= \frac{\mu_0}{T_0}\alpha_2, \qquad & K_2^{(0)} &= \mu_0 c_v \beta_2
\end{aligned}
\tag{9.11}
$$

то, разрешая (9.10) относительно величин $\frac{d\rho'}{dx}$ и $\frac{dT'}{dx}$, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho'}{dx} &= \frac{\rho_0}{\Delta}\left[\left(\beta_2 - \frac{c_p}{c_v}\alpha_2\right)\frac{\rho_0}{\mu_0} v' - \alpha_2 A\right] \\
\frac{dT'}{dx} &= \frac{T_0}{\Delta}\left[-\left(\beta_1 - \frac{c_p}{c_v}\alpha_1\right)\frac{\rho_0}{\mu_0} v' + \alpha_1 A\right]
\end{aligned}
\quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}\right)
\tag{9.12}
$$

Вставляя (9.12) во второе из уравнений (9.7), получим

$$
\nu^2 \frac{d^2v'}{dx^2} - v' = -uA \tag{9.13}
$$

В этом уравнении

$$\nu^2 = \frac{4}{3}\,\frac{-\Delta}{(c_p/c_v)(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,\frac{\mu_0^2}{p_0\rho_0}\qquad (p_0 = R\rho_0 T_0) \tag{9.14}$$

$$u = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{(c_p/c_v)(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,\frac{\mu_0}{\rho_0}$$

Уравнение (9.13) легко интегрируется. После интегрирования получаем

$$v' = uA + B_1 e^{x/\nu} + B_2 e^{-x/\nu} \tag{9.15}$$

где B_1 и B_2 — постоянные интегрирования.

При помощи (9.15) из (9.12) легко найти ρ' и T'. Проделав выкладки, получаем

$$\rho' = \frac{\rho_0 A}{(c_p/c_v)(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,x + \frac{\rho_0}{\Delta}\left(\beta_2 - \frac{c_p}{c_v}\alpha_2\right)\nu\frac{\rho_0}{\mu_0}\left(B_1 e^{x/\nu} - B_2 e^{-x/\nu}\right) + C_1$$

$$T' = \frac{-T_0 A}{(c_p/c_v)(\alpha_2-\alpha_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,x - \frac{T_0}{\Delta}\left(\beta_1 - \frac{c_p}{c_v}\alpha_1\right)\nu\frac{\rho_0}{\mu_0}\left(B_1 e^{x/\nu} - B_2 e^{-x/\nu}\right) + C_2 \tag{9.16}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Определяя постоянные интегрирования A, B_1, B_2, C_1, C_2 из пяти оставшихся неиспользованными условий, для определения постоянных интегрирования получим

$$v' = \frac{T_2-T_1}{2l}\,\frac{\mu_0}{\rho_0 T_0}(\alpha_2-\alpha_1),\quad \rho' = -\frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}\rho_0\left(\frac{x}{l}\right),\quad T' = \frac{T_2-T_1}{2}\left(\frac{x}{l}\right) \tag{9.17}$$

Из этих формул нетрудно найти теперь и поток t_x тепла через любую площадку, перпендикулярную оси x. Применяя линеаризованную формулу (5.7) и используя формулы (6.2), получим

$$t_x = \mu_0 c_v(\beta_2-\beta_1)\frac{T_2-T_1}{2l} \tag{9.18}$$

Из формул (9.17) и (9.18) можно сделать некоторые выводы.

Во-первых, если удается найти из эксперимента величину v', то из первой из формул (9.17) мы будем иметь способ для определения разности $\alpha_2-\alpha_1$.

Во-вторых, из формулы (9.18) непосредственно вытекает, что измерение потока t_x тепла позволяет определять $\beta_2-\beta_1$.

И, наконец, в-третьих, из формулы (6.23) вытекает, что все экспериментальные работы, посвященные отысканию величины β_2 по формуле

$$\beta_2 = \frac{2lt_x}{(T_2-T_1)\mu_0 c_v} \tag{9.19}$$

которая только и использовалась в экспериментальных работах, на самом деле давали величину $\beta_2-\beta_1$.

§ 10. Второй пример интегрирования системы, уравнений движения газа. Рассмотрим теперь одномерную задачу об установившейся передаче тепла через слой газа, находящийся между двумя параллельными плоскостями, при условии, что массовые силы отсутствуют, но разница в температурах стенок не мала.

В соответствии с кинетической теорией газов будем считать, что вязкость μ зависит только от температуры и является известной функцией температуры. В этом случае мы снова должны интегрировать систему уравнений (9.2) при условиях (9.3) — (9.5) для определения произвольных постоянных интегрирования.

На основании первой из формул (9.17), которая дает порядок скорости v газа и в рассматриваемом случае, можно утверждать, что в весьма широком классе случаев скорость будет величиной малой и при не малом перепаде температур.

Пользуясь этим, во втором и третьем из уравнений (9.2) пренебрегаем членами, имеющими порядок μ^2 и μ^3. Тогда система уравнений (9.2) превратится в систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\rho v) = \frac{d}{dx}\left(D_1\frac{d\rho}{dx} + D_2\frac{dT}{dx}\right) \\ &\frac{d}{dx} R\rho T = 0 \\ &c_v\frac{d}{dx}(\rho v T) = \frac{d}{dx}\left(K_1\frac{d\rho}{dx} + K_2\frac{dT}{dx}\right) - R\rho T\frac{dv}{dx} \end{aligned} \tag{10.1}$$

Первое из уравнений (10.1) непосредственно интегрируется и после удовлетворения первому краевому условию (9.3), а следовательно, и первому краевому условию (9.4) дает

$$\rho v = D_1\frac{d\rho}{dx} + D_2\frac{dT}{dx} \tag{10.2}$$

Второе из уравнений (10.1) тоже интегрируется и дает

$$R\rho T = C_1 \tag{10.3}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Интеграл (10.3) обеспечивает выполнение третьего условия (9.3) и третьего условия (9.4).

Кроме того, если учесть (10.3), то и третье из уравнений (9.1) интегрируется и дает соотношение

$$c_v\,\rho v T = K_1\frac{d\rho}{dx} + K_2\frac{dT}{dx} - C_1 v = C_2 \tag{10.4}$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Вставим в уравнение (10.4) скорость v из (10.2). Воспользуемся выражениями (6.2) для коэффициентов D_1, D_2, K_1 и K_2, вставим их в (10.4) и, наконец, исключим из (10.4) плотность ρ при помощи (10.3). Тогда получим весьма простое уравнение:

$$\mu\frac{dT}{dx} = \frac{C_2}{c_v(\beta_2-\beta_1) - c_p(\alpha_2-\alpha_1)} \tag{10.5}$$

Интегрируя это уравнение и удовлетворяя вторым из краевых условий (9.3) и (9.4), получим

$$\left[\int_{T_1}^{T_2} \mu(T)\,dT\right]^{-1}\left[\int_{T_1}^{T} \mu(T)\,dT - \int_{T}^{T_2} \mu(T)\,dT\right] = \frac{x}{l} \tag{10.6}$$

Правая часть (10.6) — известная функция температуры, и поэтому из (10.6) можно найти распределение температур в зависимости от x.

Используя (10.3), условие (9.5) и переходя от интегрирования по переменной x к интегрированию по переменной T при помощи (10.5), найдем значение постоянной C_1 и получим формулу для плотности:

$$\rho = \frac{\rho_0}{T}\int_{T_1}^{T_2} \mu(T)\,dT\left[\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T}\,\mu(T)\,dt\right]^{-1} \tag{10.7}$$

Далее, вставляя выражения для T и ρ в (10.2), пользуясь (10.5) и выражением для C_2, найдем выражение для v. Получим

$$v = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2l\rho}\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T}\,\mu(T)\,dT \tag{10.8}$$

Формулы (10.6), (10.7) и (10.8) решают поставленную задачу.

Наконец, без труда можем получить и выражение иля потока тепла t_x. Он, как и скорость, оказывается постоянным и дается формулой:

$$t_x = C_v(\beta_2 - \beta_1)\frac{1}{2l}\int_{T_1}^{T_2} \mu(T)\,dT \tag{10.9}$$

Сделаем несколько замечаний о полученных формулах.

Прежде всего отметим то обстоятельство, что из этих формул мы тоже не можем находить раздельно величины α_1, α_2, β_1 и β_2 и можем находить только их разности. Далее отметим, что формулы (10.6) и (10.7) позволяют легко находить зависимость вязкости от температуры при помощи замеров плотности или температуры.

Поступила 24 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Boltzmann L. Vorlesungen über Gastheorie. 1923. T. I. S. 141—153.
2. Rocard Y. L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz. 1932. P. 27—33.
3. Chapman S., Cowling T. The mathematical theory of non-uniform gases. 1939. P. 51—52.
4. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. 1912. S. 267—282.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. 1948. Ч. II. Стр. 267—291.
6. Chapman S., Cowling T. The mathematical theory of non-uniform gases. 1939. P. 123.
7. Кей Д., Лэби Т. Справочник физика-экспериментатора. 1949. Стр. 82.
8. Chapman S., Cowling T. The mathematical theory of non-uniform gases. 1939. P. 241.
9. Chapman S., Cowling T. The mathematical theory of non-uniform gases. 1939. P. 145, 235.