



Портр. М. Громова

ИППОЛИТ СТЕПАНОВИЧ ГРОМЕКА

(К столетию со дня рождения)

Ипполит Степанович Громека родился 27 января (8 февраля по новому стилю) 1851 г. в семье широко известного в свое время публициста 60-х годов Степана Степановича Громеки. Младший брат ученого, Михаил, также был известен как талантливый литературный критик.

В 1873 г. И. С. Громека окончил физико-математический факультет Московского университета, получив степень кандидата физико-математических наук, и был оставлен на два года при университете по кафедре прикладной математики для приготовления к профессорскому званию; одновременно с этим он начал и педагогическую деятельность, заняв место преподавателя математики сначала в 4-й Московской, потом в 1-й Московской (1876—1879 гг.) и Бельской (с 1879 г.) гимназиях.

В Московском университете учителями И. С. Громеки были известные в то время профессора А. Ю. Давидов, В. Я. Цингер, Ф. А. Слудский. На выбор темы магистерской работы И. С. Громеки, повидимому, оказал влияние А. Ю. Давидов, докторская диссертация которого *Теория капиллярных явлений* (1851) представляла собой большой вклад в теорию капиллярности. В октябре 1878 г. в Московском математическом обществе И. С. Громека делает сообщение о сочинении, названном им *Очерк теории капиллярных явлений. Теория поверхностного сцепления жидкости*. В октябре 1879 г. состоялась публичная защита этого исследования на физико-математическом факультете Московского университета, и И. С. Громека был удостоен степени магистра прикладной математики.

После защиты магистерской диссертации И. С. Громека был рекомендован на освободившуюся после смерти П. И. Котельникова кафедру аналитической механики в Казанском университете. 17 октября 1879 г. И. С. Громека был избран и 20 декабря утвержден доцентом Казанского университета.

«Молодой доцент привлек к себе тотчас же симпатии товарищей, любовь и уважение слушателей. Последние нашли в нем и профессора, ясно излагавшего одну из основных наук математического отделения, и учителя, всегда готового помочь во всех затруднениях и привлекавшего к себе гуманностью и простотою обращения» — так пишет профессор Казанского университета А. В. Васильев о педагогической деятельности Громеки.

Сведений о времени, когда Громека начал работу над докторской диссертацией, мы не имеем, но из протоколов заседаний секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете узнаем, что уже 20 сентября 1880 г. И. С. Громека сделал сообщение

О некоторых случаях движения несжимаемой жидкости. 4 ноября 1881 г. Громека защищает на физико-математическом факультете Казанского университета докторскую диссертацию *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости*. Оппонентами были Ф. М. Суворов и А. В. Васильев. Факультет единогласно признает его достойным степени доктора прикладной математики. На том же заседании факультета Громека единогласно был избран экстраординарным профессором по кафедре аналитической механики, причем в представлении Совету университета указывалось, что Громека «известен факультету как талантливый преподаватель». 7 ноября Совет университета утверждает И. С. Громеку в степени, 20 ноября утверждает его экстраординарным профессором, а через несколько месяцев, 28 мая 1882 г., он занимает должность ординарного профессора аналитической механики. Таким образом, И. С. Громека стал после П. И. Котельникова вторым профессором механики в истории Казанского университета. Заметим, что в те годы в России будущие профессора университетов обычно заканчивали свое образование поездками за границу. И. С. Громека получил образование только в России под руководством русских ученых.

Последующие годы короткой жизни И. С. Громека отдал интенсивной научной и педагогической деятельности. Он публикует одну за другой оригинальные теоретические работы, имеющие прикладное значение: для физиологии — *К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках* (1882) и *О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках* (1883), для метеорологии — *О вихревых движениях на сфере* (1885) и *Некоторые случаи равновесия совершенного газа* (1886); в работе *О движении жидких капель* (1886) И. С. Громека возвращается к теории капиллярности, а в последние годы жизни его внимание привлекает акустика — *О влиянии неравномерного распределения температуры на распространение звука* (1889). Из учебных курсов, читанных И. С. Громекой, по имеющимся данным сохранился один — *Лекции по механике жидких тел*, изданные литографским способом в 1887 г.

Характеризуя педагогическую деятельность Громеки, А. В. Васильев отмечает, что «прекрасно обработанные курсы, постоянное внимание, которое он обращал на самостоятельные работы слушателей», имели результатом всегда большое число работ по механике, представлявшихся студентами физико-математического факультета, что свидетельствует о повышенном интересе к курсам Громеки. Далее Васильев следующими словами характеризует обаятельную личность ученого: «Благотворному влиянию Ипполита Степановича как преподавателя в значительной степени способствовала его редкая деликатность и гуманность в обращении со слушателями. Таков же он был и по отношению к товарищам и ко всем, с кем судьба сталкивала его; не только Ипполит Степанович не мог сознательно сделать кому-нибудь зло, он вечно находился под опасением, что помимо своей воли бессознательно может повредить кому-нибудь».

Дочь ученого Анна Ипполитовна Худякова рассказывает об отце: «Три страсти владели Ипполитом Степановичем — наука, охота и шахматы. Особенно часто играл он в шахматы с профессором Владимиром

Васильевичем Преображенским, бывавшем в доме отца почти каждый вечер. Часто собирались по вечерам за чаем у отца и студенты».

И. С. Громека был одним из основателей и первых деятелей секции физико-математических наук при Казанском обществе естествоиспытателей, открытой 4 апреля 1880 г., которая явилась ядром образованного позднее Казанского физико-математического общества.

По своим научным интересам и направлению работы И. С. Громека ближе всего стоял к Н. Е. Жуковскому, почти одновременно с ним начинавшему в Москве свою научную и педагогическую деятельность. По словам А. И. Худяковой между И. С. Громекой и Н. Е. Жуковским существовали дружеские взаимоотношения. Общим близким другом и товарищем Громеки и Жуковского был В. В. Преображенский.

Жизнь И. С. Громеки оборвалась трагически в полном расцвете творческих сил и энергии на тридцать девятом году.

Зимой 1888/89 г. во время поездки на охоту, упав с саней, он получил сильный ушиб в грудь. Через месяц на месте ушиба обнаружилась саркома. 26 марта 1889 г. Громека был уволен по болезни со службы. Лечение и операция, выполненная одним из лучших медиков Казани, профессором Ге, не помогали. По рекомендации врачей Ипполит Степанович выехал на юг для лечения климатом, но через две недели по прибытии на место после продолжительного путешествия, отнявшего у него последние силы, в ночь на 13 (25) октября 1889 г. он скончался в Кутаиси.

Тело И. С. Громеки на следующий год было перевезено и похоронено родными в имении отца Вулька-Плебанская невдалеке от г. Белы Седлецкой губернии (ныне территория Польской народной республики). Лучшие годы своей жизни И. С. Громека посвятил педагогической и научной деятельности в Казанском университете. Из учеников Громеки по Казанскому университету необходимо отметить механика А. П. Котельникова.

Творческая деятельность Громеки длилась немногим более десяти лет, но и за это короткое время он сделал ценнейший вклад в гидромеханику. Свои труды И. С. Громека печатал только на русском языке.

Наряду с Н. Е. Жуковским И. С. Громека является одним из первых русских механиков-прикладников в истинном значении этого слова, — большинство его работ посвящено исследованию сложных механических и физических явлений; для его научного творчества характерна строгость в математической постановке исследуемых задач и общность метода их решений, анализ полученных результатов, раскрывающий во многих отношениях качественный характер изучаемого процесса.

В лице Ипполита Степановича Громеки русская механика рано потеряла одного из своих талантливейших представителей.

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ И. С. ГРОМЕКИ

Имя замечательного русского гидромеханика Ипполита Степановича Громеки недостаточно известно в научной литературе. Некоторые его работы оказались забытыми и повторены другими авторами спустя много времени. Значение результатов его исследований начинает выясняться лишь в последнее время.

Ниже приводится в хронологической последовательности обзор¹ всех немногочисленных сочинений И. С. Громеки.

1. Магистерская диссертация И. С. Громеки *Очерк теории капиллярных явлений. Теория поверхностного сцепления жидкости*, опубликованная им в 1879 г., является выдающейся работой. В кратком, но обстоятельном историческом обзоре, который И. С. Громека счел необходимым предпослать своему сочинению, он указывает, что развитие теории капиллярности шло по двум направлениям, «которые не только значительно различаются между собой в своих основаниях, но даже в изложении некоторых авторов становятся прямо враждебными одно другому».

Одно направление было начато Лапласом (1800), который «объяснил капиллярные явления взаимным притяжением частиц и этим создал строгую теорию этих явлений, вполне согласную с общими принципами теоретической механики. Но он не обнаружил постоянной величины угла, под которым поверхность жидкости встречается с поверхностью сосуда. Этот пробел был пополнен Гауссом (1830), который, сохранив основные

¹ При составлении этого обзора использованы следующие материалы. Весьма обстоятельные и содержательные предисловия к работам самого И. С. Громеки; речи⁽⁸⁾ современников И. С. Громеки, его товарищей по Казанскому университету, профессоров Г. Н. Шебуева и Д. А. Гольдгаммера, произнесенные 8 ноября 1889 г. на заседании секции физ.-мат. наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете, посвященном памяти И. С. Громеки в год его смерти; сообщение О. Ф. Васильева *О жизни и деятельности И. С. Громеки* и сообщение Н. А. Слезкина *О работах И. С. Громеки, посвященных движению вязкой жидкости и теории капиллярности*, прочитанные на заседании Ученого Совета Института механики Академии Наук 8 февраля 1951 г., посвященном столетию со дня рождения И. С. Громеки.

Работы И. С. Громеки в связи с современным состоянием науки были рассмотрены В. В. Голубевым, П. Я. Кочиной и Л. Н. Сретенским, сделавшими ряд ценных замечаний.

Следует отметить большую заслугу О. Ф. Васильева, привлекшего внимание к трудам И. С. Громеки (в частности к работе *О вихревых движениях жидкости на сфере*^[5], см. статью⁽¹⁴⁾ в ПММ), несколько расширившего биографические сведения об И. С. Громеке и составившего список литературы об И. С. Громеке (надстрочные цифры в круглых скобках относятся к этому списку, в квадратных — к списку трудов И. С. Громеки см. стр. 408).

допущения Лапласа, вывел теорию капиллярных явлений из принципа возможных скоростей».

Далее Пуассоном в 1831 г. было принято во внимание «то быстрое изменение плотности, которое необходимо должно иметь место относительно частиц жидкости, лежащих на ее поверхностном слое. Различные вопросы теории были рассмотрены и исследованы Пуассоном с такою полнотою, что вся теория казалась исчерпана в его труде. Оставалось только связать эту теорию с общею теориею равновесия жидкостей при помощи принципа возможных скоростей. Задача эта была указана и исполнена А. Ю. Давидовым в его диссертации, относящейся к этому предмету (*Теория капиллярных явлений*. 1851). В этом сочинении А. Ю. Давидов подчинил теорию капиллярности общим правилам аналитической механики, причем принял в соображение и те физические обстоятельства, которые существенно относятся к этому предмету».

Другое направление в теории капиллярности было начато Юнгом в 1805 г., который «допустив в поверхностном слое жидкости существование особой силы — сцепления, вывел уравнение поверхности, ограничивающей тяжелую жидкость, и обнаружил постоянную величину угла, под которым эта поверхность встречается со стенками трубки. Он рассмотрел, кроме того, много частных вопросов этой теории, причем достиг почти всех тех заключений, к которым впоследствии привели ученых дальнейшие исследования в этой области».

Теория Юнга, развивавшаяся медленнее, постепенно стала находить себе все больше и больше приверженцев (Плато, Гаген, Ламарль, Ван-дер-Менсбрюгге и др.). Противники теории Юнга утверждали, что она не имеет достаточного основания в общих принципах рациональной механики, так как уподобление пограничной поверхности жидкости упругой пленке есть, в сущности, результат опыта, причина этой аналогии в самой теории не вскрывается и сама теория, строго говоря, остается лишь математическим описанием явлений.

И. С. Громека в своей диссертации построил теорию капиллярных явлений, впервые введя в нее понятие об эллипсоиде давлений. Применение этого понятия, введенного в теорию упругости Коши, для жидкости приводит, вообще говоря, к тривиальному представлению, что внутри жидкости эллипсоид вырождается в сферу. И. С. Громека эту идею применил к свободному или прикасающемуся к другому телу слою поверхности, содержащему те частицы, которыми и вызываются капиллярные явления: этот слой бесконечно тонок. Всякая площадка внутри него будет испытывать давление, но уже иного характера, чем давление внутри жидкости. Это давление не может не зависеть от положения площадки; чтобы не притти в противоречие с опытом, И. С. Громека сделал три допущения: во-первых, что давление одинаково лишь для всех площадок, проведенных через одну какую-либо точку на нормали к слою и через эту нормаль; во-вторых, что и самое положение нормали здесь не безразлично; наконец, в-третьих, что давление зависит и от расстояния выбранной площадки от внешней поверхности слоя. Таким образом, эллипсоид давления в по-

верхностном слое представляет собой эллипсоид вращения, ось которого нормальна к поверхности раздела и который по мере удаления от поверхности приближается к сфере.

Пользуясь этим, И. С. Громека составляет уравнения равновесия какой-нибудь части поверхностного слоя и выводит лапласовское уравнение свободной поверхности жидкости для общего случая.

Используя принцип возможных скоростей и проводя преобразование поверхностных интегралов в криволинейные по контурам, И. С. Громека в общем случае показывает, что конечная разность между внешним давлением в той же точке поверхности пропорциональна сферической кривизне последней и что постоянное отношение между этими величинами представляет собой сцепление или поперечное давление поверхностного слоя, отнесенное к единице длины. Доказывается впервые обнаруженное Юнгом постоянство угла прикосновения, под которым встречаются две поверхности. Анализируя общее уравнение равновесия, автор приходит к ряду выводов и, в частности, к тому выводу, что частицы поверхностного слоя жидкости, прилегающие к стенкам сосуда, подвергаются действию особой силы, направляющей их к этим стенкам. Затем И. С. Громека показывает, что капиллярные силы жидкости на протяжении поверхности соприкосновения ее с каждым отдельным телом имеют потенциал, который равен произведению величины этой поверхности на постоянную величину сцепления в поверхностном слое (что было впервые обнаружено Гауссом). После доказательств основных положений теории капиллярности И. С. Громека заключает: «Способ, употребляемый нами для вывода общих уравнений теории капиллярности, отличается от тех способов, которые для той же цели даны были Лапласом и Пуассоном. Вместо того чтобы исследовать — по их примеру — отдельные взаимодействия между каждыми двумя частицами — мы рассматриваем давления — равнодействующие весьма большого числа таких частичных сил. Вследствие этого теория значительно упрощается и сокращается число гипотез. При таком способе изложения этой теории мы явственнее видим произвол каждого из сделанных допущений; нам поэтому легче предложить к рассмотрению возможные в них изменения».

Во втором разделе своей работы И. С. Громека исследует свойства поверхности, разделяющей две жидкости. Исследуя общее уравнение поверхности раздела двух жидкостей, И. С. Громека приходит к ряду заключений. Данная масса одной жидкости может находиться в равновесии внутри другой только тогда, когда имеет место равенство плотностей этих жидкостей. Поверхность жидкости может включать в себя плоскую часть только тогда, когда она горизонтальна. Если поверхность раздела включает в себе плоский уровень, то поднятие или опускание этого уровня возможно только вблизи стенок сосуда.

Затем автор устанавливает особенности поверхности капли в двух случаях: 1) когда она лежит на плоскости и 2) когда она висит под плоскостью. Исследуя условие равновесия капли, расположенной на наклонной плоскости, И. С. Громека приходит к выводу, что такое равновесие возможно,

если угол прикосновения поверхности жидкости к плоскости по контуру будет переменным. Равновесие капли на боковой поверхности наклонного цилиндра возможно, если допустить, что действие вещества на частицы ее поверхности имеет, помимо своей нормальной составляющей, еще и тангенциальную составляющую.

В третьем разделе рассматриваются вопросы равновесия плавающих тел. Для случая капли, целиком погруженной в другую жидкость, доказывается, что общий вес вытесненной вблизи горизонтального уровня жидкости равен весу капли. На тело, полностью погруженное в жидкость, капиллярные силы не оказывают никакого воздействия. На тело, частично погруженное в одну жидкость, а частично во вторую, воздействие капиллярных сил в общем случае приводится к силе и к паре. В случае равновесия плавающего тела сумма масс, вытесненных вблизи горизонтального уровня, равна сумме тех масс, которые замещают вытесненные массы. Это предложение, представляющее собой обобщение закона Архимеда на случай учета поднятия или опускания уровней вблизи поверхностей плавающего тела, благодаря капиллярным силам, было доказано И. С. Громекой в самом общем случае. Доказательство этого предложения, данное ранее Лапласом, было не строгим; а Пуассоном доказательство проведено лишь для частных случаев. Неправильное решение этой же задачи Дюбуа Раймондом также отмечено И. С. Громекой.

Одно перечисление вопросов, затрагиваемых в рассматриваемой работе И. С. Громеки, показывает насколько всесторонне И. С. Громека провел свои исследования по вопросу о капиллярных явлениях. Математическая теория явлений капиллярности в более поздних работах не освещалась так глубоко, как это было сделано в рассматриваемой работе И. С. Громеки.

2. Докторская диссертация И. С. Громеки *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости* ^[2] (1881) представляет собой глубокое исследование в области гидромеханики; оно неоднократно цитируется в сочинениях Жуковского. Однако большое прикладное значение этой работы начало выясняться только в начале 30-х годов этого столетия.

Цель и содержание этого сочинения лучше всего определяются предисловием И. С. Громеки.

«Каждое движение жидкости до известной степени характеризуется тремя системами кривых линий: траекториями, линиями токов и линиями вихрей. Траектории занимают в пространстве положение неподвижное, тогда как положение вихревых линий и линий токов вообще изменяется со временем. В простейшем случае установившегося (или перманентного) движения все эти линии неподвижны и, кроме того, траектории совпадают с линиями токов. Вихревые линии отсутствуют только в таком движении, которое сопровождается потенциалом скоростей. Во всяком же другом движении жидкая масса бывает наполнена вихревыми линиями. Относительное положение траекторий и вихревых линий является при этом одним из характеристических обстоятельств движения и может служить основанием для исследования тех или других перманентных движений жидкости. Можно, например, поставить себе задачей изыскание,

во-первых, таких перманентных движений жидкости, в которых вихревые линии везде перпендикулярны к траекториям, и, во-вторых, таких, где вихревые линии везде совпадают с траекториями. Можно поставить вопрос о том, при каких условиях такие движения становятся возможными и определенными.

Разъяснение этого вопроса по отношению к несжимаемой жидкости составляет главнейшую цель предлагаемого сочинения».

Поставленной задаче посвящена вторая, основная глава сочинения, в которой установившееся движение несжимаемой жидкости исследуется при помощи геометрического изучения взаимных свойств линий тока и вихревых линий. Здесь автор, «доказав предварительно, что ортогональность вихревых линий к траекториям неразрывно связана с существованием системы поверхностей, ортогональных к траекториям, излагает признак, по которому можно судить о том, способна ли данная система поверхностей пересекать траектории установившегося движения под прямым углом», и разъясняет этот признак на примерах.

Далее И. С. Громека исследует случаи движения, когда вихревые линии совпадают с траекториями; он отмечает, что при этом отношение угловой скорости вращения каждой жидкой частицы и скорости ее движения сохраняется на траектории постоянным, и останавливается на предположении, что указанное отношение на всех траекториях одно и то же. Оказывается, что такие движения возможны и их определение в частных случаях приводится к интегрированию уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + k^2 u = 0 \quad (1)$$

Первое из этих уравнений соответствует случаю, когда искомая функция u зависит только от переменных x и y , второе — случаю движения, симметричного относительно оси z .

Теории однозначных и конечных интегралов этих уравнений И. С. Громека посвящает первую главу, где изложены главнейшие результаты Н. Вебера и Е. Матье для уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0 \quad (2)$$

и сделано обобщение, позволяющее распространить некоторые из этих результатов на уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + k^2 \alpha^2 u = 0$$

частным случаем которого являются уравнения (1) и (2).

Как пример применения результатов излагаемой им теории упомянутого дифференциального уравнения И. С. Громека рассматривает задачу из теории звука: о собственных тонах пространства, ограниченного поверхностью прямого круглого цилиндра.

Посвящая большую часть второй главы специальным случаям вихревого установившегося движения, когда вихревые линии всюду совпа-

дают с линиями тока, И. С. Громека называет такие движения винтовыми и дает для них разнообразные и вместе с тем простые примеры.

Этим И. С. Громека положил начало особому разделу механики вихревых движений — теории так называемых винтовых потоков¹ и потоков с поперечной циркуляцией, которая имеет большое значение для ряда задач современной гидротехники.

3. В работе И. С. Громеки *К теории движения жидкостей в узких цилиндрических трубках*, опубликованной в Казани в 1882 г., дано весьма полное исследование интересной задачи о неустановившемся движении вязкой жидкости в цилиндрической трубке². В этой работе после краткого обзора дифференциальных уравнений движений вязкой жидкости и об их решении для случая установившегося прямолинейного движения в цилиндрической трубе автор говорит следующее: «Но для пополнения теории, конечно, было бы желательно исследовать случай переменного давления, а также при постоянном давлении определить движение в тот первый его период, когда оно еще не успело установиться». Далее И. С. Громека указывает, что вопрос о развитии теории в таком направлении затронут в одной из работ Гельмгольца и в специальной работе Штерна. Но Гельмголец не останавливается на определении произвольных постоянных на основании заданного начального распределения скоростей, а Штерн не учитывает условия на концах трубки. «Таким образом до сих пор не существует — сколько мне известно — математической теории течения жидкостей в цилиндрических трубках при переменном давлении и даны только общие указания для исследования неустановившегося течения при постоянном давлении».

После этого И. С. Громека переходит к общей постановке задачи, заключающейся в следующем. Требуется изучить прямолинейное движение

¹ Эта диссертация И. С. Громеки, повидимому, осталась неизвестной за границей. Винтовое движение известно там под названием «движения Бельтрами» хотя работа Бельтрами появилась на восемь лет позднее (Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche. Rendiconti del Reale Istituto Lombardo. Milano. 1889. T. XXII. P. 124—130, а также Il Nuovo Cimento. Pisa. 1889. T. XXV. P. 212—222).

² Эта задача стала предметом исследования ученых лишь пятьдесят лет спустя после решения И. С. Громеки. Работа И. С. Громеки оказалась забытой в нашей литературе. В известном в свое время реферативном сборнике «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» о ней не был дан реферат и даже не было приведено название этой работы, как это было сделано по отношению к работам И. С. Громеки по вопросу о капиллярности в сборниках за 1879 г. и 1887 г.

В книге «Аэродинамика» под редакцией Дюрэнда в томе III в разделе «Механика вязких жидкостей», написанном Л. Прандтлем, сказано следующее: «Решение задачи о возникновении движения в круглом цилиндре, к основаниям которого приложена заданная разность давлений, стало известным сравнительно недавно из работы, доложенной Шиманским на международном конгрессе по прикладной механике в Стокгольме» (Proc. 3 International Congress Applied Mechanics. Stockholm. 1930. Vol. 1. P. 249). Решение этой задачи с помощью операционного исчисления приведено в книге А. И. Лурье «Операционное исчисление» изд. 1939 г., но, к сожалению, ссылка сделана также не на И. С. Громеку, а на Шиманского. На самом же деле решение этой задачи, причем более полное, было дано И. С. Громекой почти на 50 лет раньше Шиманского.

вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубке при условии, что давления, испытываемые жидкостью в обоих концах трубки, суть известные функции времени, и что начальное распределение скоростей в поперечном сечении трубки известно.

Поставленная задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = \omega(t) \quad \left(\omega(t) = \frac{p_0 - p_1}{\rho L} \right)$$

где u обозначает скорость, ν — кинематический коэффициент, ρ — плотность, $p_0 - p_1$ — разность давлений, L — длина трубки.

Условия для этой краевой задачи И. С. Громека записывает в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda u = 0 \quad \text{при } r = a, \quad u = F(r, \theta) \quad \text{при } t = 0$$

Это означает, что на стенке движение частиц жидкости тормозится внешним трением, коэффициент которого есть λ , и что начальное распределение скоростей предполагается не симметричным относительно оси трубки¹.

После общей постановки задачи И. С. Громека переходит к ее решению для частных случаев. Вначале рассматривается тот случай, когда жидкость прилипает к стенкам. Решение задачи строится по методу, именуемому теперь методом Фурье, в виде сочетания однократного ряда и двойного ряда, содержащих в качестве множителей функции Бесселя. Доказывается сходимость этих рядов при помощи асимптотических представлений функций Бесселя. Подробнее рассматриваются следующие подслучаи.

1°. Жидкость в начальный момент $t = 0$ находилась в покое, т. е. когда $F(r, \theta) = 0$.

2°. Разность давлений $p_0 - p_1$ была постоянной, т. е. $\omega(t) = \text{const}$.

3°. Разность давлений постоянна, а жидкость в начальный момент в покое. Для этого случая даются формулы для скорости и расхода².

4°. Разность давлений на концах трубки изменяется периодически. После проведения вычислений в этом случае И. С. Громека приходит к следующему заключению: «по прошествии бесконечно большого времени после начала движения закон Пуазейля имеет место не только для постоянного давления, но и для давления, изменяющегося периодически; только в последнем случае должно брать среднее за целый период количество протекающей жидкости и среднее за целый период давление»³.

¹ Подробное изложение работы Шиманского дано в *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, том 11 за 1932 г. Если сравнить приведенную выше постановку задачи, решенной И. С. Громекой, с постановкой задачи, решенной пятьдесят лет позднее Шиманским, то можно отметить, что постановка задачи И. С. Громеки является значительно более общей, чем постановка задачи, решенной Шиманским. В работе последнего с самого начала предполагается движение симметричным относительно оси трубки и что частицы жидкости прилипают к стенкам.

² Формула для скорости, данная И. С. Громекой, повторена в работе Шиманского, который на основании этой формулы построил графики распределения скоростей, приведенные в книге Дюрэнда т. III на стр. 78.

³ Этот случай периодического изменения давления рассматривается и в работе

5°. Разность давлений на концах трубки представляет собой известную функцию для каждого момента времени. В этом случае решение строится при помощи интеграла Фурье.

После подробного рассмотрения случая прилипания жидкости к стенкам И. С. Громека переходит к случаю, когда жидкость свободно скользит вдоль стенок трубы. В этом случае оказалось, что количество протекающей через сечение жидкости зависит только от перепада давлений и от начального распределения скоростей. В конце работы И. С. Громека рассматривает решение задачи в общем случае с учетом внешнего трения и дает формулу для расхода в случае, когда разность давлений постоянна и вначале жидкость была в покое.

4. В работе *О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках*, напечатанной в 1883 г., И. С. Громека рассматривает более трудную задачу о движении в трубках не с жесткими, а с упругими стенками. Эта работа возникла в связи со скоростью распространения пульса в артериях при кровообращении, хотя значение ее не ограничивается поставленным вопросом.

Как обычно, И. С. Громека делает вначале подробный обзор предшествующих работ. Он указывает, что первая попытка математической разработки задачи принадлежит Резаю (1876 г.), который дал формулу для скорости распространения ударной волны, пренебрегая внутренним трением жидкости и трением ее о стенки трубки, а также влиянием инерции стенок трубки, принимающих участие в колебательном движении.

Затем он приводит соображения, в силу которых «необходимость исследовать влияние на скорость пульса этих двух факторов становится несомненной» и указывает причины ошибочности решения Кортвега (1878 г.), который пытался определить влияние на скорость пульса трения жидкости и инерции стенок.

И. С. Громека дал дифференциальные уравнения движения жидкости в упругой, первоначально цилиндрической трубке, приняв в расчет инерцию стенок трубки и сопротивление жидкости при ламинарном давлении, и дал формулы, удовлетворяющие всем предельным условиям задачи. Точное интегрирование их выполнено при соблюдении сложных граничных условий только для случая невязкой жидкости. Формула Резая вытекает из этого решения как частный случай. Из полученного точного решения Громека получает при некоторых вполне реальных допущениях приближенное достаточно точное решение в виде биквадратного уравнения, корни которого выражают две скорости распространения волн.

В решении Громеки, так же как и в решении Резая, не учитывается сжимаемость жидкости. Для тех вопросов физиологии, которыми были вызваны их исследования, это было вполне оправданное допущение, каким оно является и для всех случаев, когда модуль упругости жидкости велик по сравнению с модулем упругости материала трубы. Но для техни-

Шиманского, но заключения о справедливости закона Пуазейля в среднем за целый период не делается.

ческих задач учет сжимаемости жидкости в ряде случаев необходим. Теорию распространения ударных волн в трубах с учетом сжимаемости жидкости и развил Н. Е. Жуковский в работе *О гидравлическом ударе в водопроводимых трубах* в 1898 г.

5. Исследование И. С. Громеки *О вихревых движениях жидкости на сфере*, опубликованное в 1885 г., до последнего времени было незаслуженно забыто¹; тема была предложена В. В. Преображенским в связи с проблемами метеорологии. В этой работе Громека производит обоснование применимости картографических преобразований для проектирования вихревого движения сферического жидкого слоя на плоскость.

Чтобы применить теоремы Гельмгольца о вихрях, сопровождающих плоское течение неограниченной жидкости, к рассматриваемому вопросу, И. С. Громека распространил эти теоремы на тот случай, когда плоское течение жидкости происходит внутри неподвижной цилиндрической поверхности, образующие которой перпендикулярны к плоскости течения. Выбрав стереографическую проекцию, он исследует движение дискретных вихрей в ограниченном неподвижном контуре сферическом слое жидкости. Вопрос о движении системы n дискретных вихрей сводится им к решению системы $2n$ совместных дифференциальных уравнений 1-го порядка. После этого Громека переходит к случаю, когда жидкость покрывает всю сферу,— наиболее интересному для практики. Сначала он останавливается на особенностях этого случая и выводит необходимое условие возможности движения системы дискретных вихрей на полной сфере для случая, когда нет завихренности частиц, лежащих между отдельными вихрями. Условие это заключается в том, что сумма напряжений дискретных вихрей должна равняться нулю. В конце работы Громека указывает на возможность существования на полной сфере «системы четного числа вихрей, имеющих попарно равные, но противоположные напряжения и расположенных симметрично относительно некоторого большого круга».

6. Сочинение И. С. Громеки *К теории капиллярных явлений. О движении жидких капель* было опубликовано в 1886 г. В этом сочинении исследуется вопрос о тяжелой капле одной жидкости, которая под влиянием тяжести медленно движется в другой тяжелой жидкости, обладающей вязкостью. Задача эта весьма трудная, и ее прямое решение почти недоступно. Действительно, чтобы определить форму капли, необходимо знать движение жидкости, окружающей каплю, а это движение в свою очередь определяется видом поверхности капли. Поэтому можно только, задавшись видом поверхности капли, узнать, способна ли она служить формой равновесия поступательного движения ее в данной жидкости.

¹ Многие авторы неправильно считают автором первой работы по этому вопросу Цермело (Zermelo. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugelfläche. Zeitschr. für Math. und Phys. Leipzig. 1902. Bd. 47), хотя работа Цермело была опубликована на 17 лет позднее (см. по этому поводу заметку О. Ф. Васильева. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2, Стр. 261).

В начале работы И. С. Громека подвергает критике те предпосылки, которые были приняты Резалем в его работе 1884 г. *О восходящем движении и деформации жидкой капли*. И. С. Громека рассматривает медленное вертикальное поступательное движение жидкой капли в жидкой среде с учетом движения окружающей каплю жидкости. Для случая идеальной жидкости движение капли предполагается неравномерным, а для случая вязкой — равномерным. В первых двух параграфах устанавливаются общие условия движения жидкой капли. При этом отдается предпочтение теории капиллярности Юнга на том основании, что в ней капиллярное сцепление может и не быть постоянным вдоль всего поверхностного слоя, как это следует из теории Лапласа и Пуассона.

И. С. Громека принимает, что под влиянием трения, внешних сил, температуры и т. п. капиллярное сцепление одного и того же поверхностного слоя может принимать различные значения. При таком допущении переменное сцепление, отнесенное к единице площади каждого элемента поверхностного слоя, будет иметь, кроме нормальной составляющей, пропорциональной сферической кривизне, еще две составляющие в касательной плоскости, представляемые в виде частных производных от сцепления q . В § 3 и 4 рассматривается движение капли в идеальной жидкости. Предположение о малости скорости движения капли сказывается в том, что в интеграле Лагранжа-Коши отбрасывается слагаемое с квадратом скорости. Здесь автор показывает, что медленно движущаяся в идеальной жидкости капля может иметь строго сферическую форму, но при специальном соотношении между давлениями обеих жидкостей, капиллярного сцепления разделяющего их поверхностного слоя и радиусом самой капли и при определенном значении постоянного ускорения движения капли.

В § 5—10 рассматривается движение капли в вязкой жидкости. Здесь И. С. Громека дает решение задачи о равномерном движении сферы в безграничной жидкости при отбрасывании квадратичных членов инерции с учетом внешнего трения¹ и показывает, что при медленном равномерном движении капли в вязкой жидкости она может также иметь строго сферическую форму, но и при некотором соотношении между давлениями обеих жидкостей, капиллярным сцеплением разделяющего их слоя и радиусом своей капли и при особом значении постоянной скорости движения капли.

В последнем § 11 И. С. Громека рассматривает случай, когда поверхность капли весьма отличается от сферы. В этом случае условие равновесия поверхностного слоя приводится к дифференциальному уравнению второго порядка относительно величины отклонения формы поверхности

¹ При этом И. С. Громека указывает на ошибочность формулы сопротивления, испытываемого шаром, приведенной в книге Ламба издания 1879 г. И. С. Громека показывает, что причина этой ошибки лежит в том, что им в расчетах не учтена работа внешнего трения на поверхности шара. Следует заметить, что эта ошибочная формула для сопротивления шара в последующих изданиях книги Ламба не фигурировала, но при этом ссылка делается на книгу Бассета (Ламб, Гидродинамика, изд. 1947 г. стр. 758), первое издание которой вышло в 1888 г., т. е. через два года после работы И. С. Громеки.

капли от поверхности сферы. Исследуя решение этого дифференциального уравнения, И. С. Громека показывает, что движущаяся капля при известных условиях может быть ограничена мало отличающейся от сферы поверхностью вращения, округленной в своей передней части, но имеющей острый конец на оси в своей задней части.

7. Работа *Некоторые случаи равновесия совершенного газа*, опубликованная в 1886 г., была предпринята И. С. Громекой, как он отмечает, в связи с вопросами «об определении массы земной атмосферы и об измерении ее высоты». В этом сочинении И. С. Громека рассматривает случаи равновесия совершенного газа, в котором распределение температуры зависит исключительно от теплопроводности этого газа. Вначале приводятся дифференциальные уравнения равновесия газа, частицы которого притягиваются по закону Ньютона. Затем рассматривается случай, когда частицы газа, составляющего оболочку твердого сферического ядра, притягиваются не только между собой, но и частицами ядра по закону Ньютона, и находит общее выражение для температуры.

И. С. Громека разбирает оказавшиеся возможными частные случаи равновесия, когда взаимным притяжением газа можно пренебречь, и в этом случае дает выражение для давления. Если положить, что коэффициент теплопроводности газа не зависит от температуры, то из этой формулы вытекает как частный случай барометрическая формула Лапласа.

Далее И. С. Громека рассматривает случай, когда взаимным притяжением частиц газа нельзя пренебречь, а температура постоянная, и приходит к тому заключению, что газовая оболочка должна, беспредельно разрежаясь, простираться в бесконечность. После этого исследуются условия равновесия слоя газа, простирающегося над твердой плоскостью, и газовой оболочки, облегающей круглый бесконечно длинный твердый цилиндр. В конце своего сочинения И. С. Громека, возвращаясь снова к случаю равновесия газовой оболочки, облегающей твердое сферическое ядро, исследует этот вопрос, не предполагая температуру оболочки постоянной и не пренебрегая взаимодействием частиц.

8. Работа *О бесконечных значениях интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка*, опубликованная в 1887 г., носит математический характер, но, повидимому, возникла в связи с начатыми И. С. Громекой исследованиями в области акустики.

Работа посвящена изучению поведения интегральных кривых уравнения $d^2y/dx^2 + r(x)y = 0$. Показано, что интеграл этого уравнения при $x = 0$ обращается в бесконечность в тех случаях, когда $r < 0$ при достаточно малом $|x|$ и когда, сверх того, не существует числа $\epsilon < 2$, для которого $r(x)x^\epsilon$ при $x \rightarrow 0$ имел бы конечные значения. В свете современной сложившейся позднее качественной теории дифференциальных уравнений этот частный результат, обобщающий известный критерий конечности интегралов, представляется элементарным. Однако в свое время это дополнение к теории линейных дифференциальных уравнений Фукса в том смысле, что последняя, позволяя определить по виду коэффициентов дифференциального уравнения те точки на плоскости независимого комплексного

переменного, в которых интеграл уравнения обращается в бесконечность, не может быть непосредственно применена к тем вопросам, когда точка, изображающая независимое переменное, должна оставаться на определенной кривой, и в частном случае на вещественной оси.

9. Две последние статьи И. С. Громеки посвящены исследованию вопроса распространения звука в земной атмосфере. Первая из них *О влиянии температуры на малые колебания воздушных масс* опубликована в 1887 г.; основное ее содержание повторяется во второй статье *О влиянии неравномерного распределения температуры на распространение звука*, напечатанной в год смерти автора, в 1889 г. Не удовлетворенный анализом этого вопроса в «Теории звука» Рэлея, Громека проводит свое исследование со свойственной ему последовательностью, тщательностью и точностью. Он выводит дифференциальные уравнения колебаний, совершающихся в неравномерно нагретом воздухе, предполагая, что колебания эти совершаются адиабатически. Доказав, что сила тяжести имеет ничтожное влияние на скорость вертикального распространения и изменение амплитуды колебаний в равномерно нагретом воздухе, И. С. Громека рассматривает затем колебания, совершающиеся в неравномерно нагретом воздухе, не принимая уже в расчет сил тяжести. При этом им рассматриваются следующие частные случаи. Температура уменьшается по направлению распространения звуковой волны пропорционально первой степени расстояния от некоторой определенной, перпендикулярной к направлению распространения волны плоскости. В этом случае скорость распространения выражается в зависимости от абсолютной температуры точно такую же формулой, как и в случае равномерно нагретой среды, для которого имеет место формула Лапласа. Амплитуда в этом случае уменьшается по довольно сложному закону. Затем рассматривается случай, когда абсолютная температура возрастает пропорционально квадрату расстояния от плоскости, перпендикулярной к направлению распространения звуковой волны. В этом случае скорость распространения волны зависит от числа колебаний, так что скорость увеличивается по мере уменьшения числа колебания. Для определенного числа колебаний скорость распространения звука делается бесконечной, и для еще меньшего числа колебаний невозможна поступательная волна, а только стоячее волнение. Далее исследуется распространение сферической волны в предположении, что абсолютная температура обратно пропорциональна расстоянию от центра волны. В этом случае получается формула для скорости распространения в функции абсолютной температуры, тождественная с формулой Лапласа.

В заключение И. С. Громека рассматривает вопрос о распространении волны в среде, окружающей твердый цилиндр, предполагая абсолютную температуру обратно пропорциональную расстоянию от оси цилиндра и колебаниям, совершающимся перпендикулярно к меридиональным плоскостям цилиндра. И в этом случае получаются те же результаты, как и в предыдущем.

СПИСОК ТРУДОВ И. С. ГРОМЕКИ

1. Очерк теории капиллярных явлений. Теория поверхностного спеления жидкости. (Магистерская диссертация.) Математический сборник. М. 1879. Т. IX. Вып. 3. Стр. 435—500. То же. Отд. изд. М. 1879. 68 стр.
2. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. (Докторская диссертация.) Отд. изд. Казань. 1881. 107 стр. То же. Ученые записки. 1882. Кн. III. 107 стр.
3. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Ученые записки. 1882. Кн. I. Стр. 41—72. То же. Отд. изд. Казань. 1882. 31 стр.
4. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках. Собр. протоколов. 1883. Т. I. То же. Отд. изд. Казань. 1883. 19 стр.
5. О вихревых движениях жидкости на сфере. Собр. протоколов. 1885. Т. III. То же. Отд. изд. Казань. 1885. 35 стр.
6. О движении жидких капель. Собр. протоколов. 1886. Т. V. То же. Отд. изд. К теории капиллярных явлений. О движении жидких капель. Казань. 1886. 23 стр.
7. Некоторые случаи равновесия совершенного газа. Собр. протоколов. 1886. Т. V. То же. Отд. изд. Казань. 1886. 19 стр.
8. О бесконечных значениях интегралов линейных дифференциальных уравнений. Собр. протоколов. 1887. Т. VI. То же. Отд. изд. Казань. 1881.
9. Лекции по механике жидких тел. Казанск. ун-т. 1887. 174 стр. Изд. литограф.
10. О влиянии температуры на малые колебания воздушных масс. Ученые записки (За 1886 г.). 1887. То же. Отд. изд. Казань. 1888. 40 стр.
11. О влиянии неравномерного распределения температуры на распространение звука. Математический сборник. М. 1889. Т. XIV. Вып. 2. Стр. 283—303.
(Сокращения. Ученые записки. — Учен. зап. Казанского ун-та, отд. физ.-мат. наук. Собр. протоколов — Собрание протоколов засед. секции физ.-мат. наук Общества естествоиспытателей при Казанском ун-те).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ОБ И. С. ГРОМЕКЕ

1. Отчет о состоянии и действиях Московск. ун-та в 1872-73 академическом и в 1873 гражданском году. М. 1874. То же за 1879 год. М. 1880.
2. Пятидесятилетие Московской IV гимназии. М. 1899.
3. Столетие Московской 1-й гимназии. М. 1903.
4. Отзыв доц. А. В. Васильева о работе И. С. Громеки *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости*. Приложение к Протоколам засед. Совета Казанск. ун-та за 1882 г. Известия и Ученые записки Казанск. ун-та. 1882. Кн. II. 6 стр.
5. Известия и Ученые записки Казанск. ун-та. 1882. Кн. I.
6. Ученые записки Казанск. ун-та. 1890. Кн. II.
7. Собрание протоколов засед. секции физ.-мат. наук Об-ва естествоиспытателей при Казанск. ун-те. 1883—1890. Т. I—VIII.
8. Профессор И. С. Громека. Речи, произнесенные на посвященном памяти И. С. Громеки заседании физ.-мат. секции Об-ва естествоиспытателей при Казанск. ун-те 9 ноября 1889 г.: А. В. Васильев — *Профессор И. С. Громека*, Г. Н. Шибуев — *Научные труды И. С. Громеки*, Д. А. Гольдгаммер — *Работы И. С. Громеки по теории капиллярных явлений*. Издание секции физ.-мат. наук Об-ва естествоиспытателей при Казанск. ун-те. Казань. 1890.
9. Энциклопедический словарь Брокгауза. Спб. 1893. Т. IX.
10. Биографический словарь профессоров и преподавателей Казанского университета (1804—1904) под ред. проф. Н. П. Загоскина. Казань. 1904. Ч. I.
11. Языков Д. Д. Обзор жизни и трудов покойных русских писателей. М. 1905.
12. Лейбензон Л. С. Н. Е. Жуковский. Изд. АН СССР. М.—Л. 1947.
13. Космодемьянский А. А. Очерки по истории теоретической механики в России. Ученые записки МГУ. 1948. Вып. 122.
14. Жуковский П. Е. Механика в Московском университете за последнее пятидесятилетие. Собрание сочинений. 1950. Т. VII.
15. Васильев О. Ф. Об одной забытой работе И. С. Громеки. ПММ. 1951. Т. XV.