ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. А. Савин (Харбин)

Для интегрирования дифференциального уравнения

$$\nabla^2 V(x, y) \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

возьмем функцию $F(u)$ от трехчленного аргумента u

$$V(x, y) = F(u) = F(\alpha x + \varepsilon y + \rho r), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

где α, ε, ρ — произвольные постоянные.

Образуем частные производные от функции V по x

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\alpha + \rho \frac{x}{r}\right) \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \left(\alpha + \rho \frac{x}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \rho \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial u}$$

и аналогично по y при помощи круговой подстановки двух циклов (α, ε), (x, y).

Отсюда согласно (1) получаем выражение лапласиана функции V:

$$\nabla^2 V = \left[\alpha^2 + \varepsilon^2 + 2\frac{\rho}{r}(\alpha x + \varepsilon y) + \rho^2\right] \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial F}{\partial u}$$

Подставляем сюда по (2) значение

$$\alpha x + \varepsilon y = u - \rho r$$

и, пользуясь произвольностью постоянных, полагаем

$$\alpha^2 + \varepsilon^2 = \rho^2 \tag{3}$$

Тогда на основании (1) получаем для функции F условие

$$\frac{\rho}{r}\left(2u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0 \tag{4}$$

Первое решение этого уравнения будет $\rho = 0$, т. е. по (3)

$$\alpha^2 + \varepsilon^2 = 0, \quad \text{или} \quad 1 + i^2 = 0, \; i = \sqrt{-1}$$

и тогда получается общеизвестный интеграл

$$V(x, y) = F(x \pm iy) \tag{5}$$

Второе решение уравнения (4) найдем из уравнения

$$\frac{\partial^2 F / \partial u^2}{\partial F / \partial u} + \frac{1}{2u} = 0$$

Интегрируя дважды по u, получаем согласно (2)

$$V(x, y) = F(u) = C\sqrt{u} = C\sqrt{\alpha x + \varepsilon y + \rho r} \tag{6}$$

Здесь произвольные постоянные связаны зависимостью (3). Наиболее простое выражение этой зависимости получим, приняв

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \varepsilon = \sin\theta, \qquad \rho = 1$$

Складывая интегралы (5) и (6), получим полное выражение интеграла

$$V(x, y) = F(x \pm iy) + C\sqrt{x\cos\theta + y\sin\theta + r}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

двухмерного гармонического уравнения (1), где C и θ — произвольные постоянные величины, а $F(x + iy)$ и $F(x - iy)$ — произвольные функции линейных комплексных аргументов.

Поступила 17 V 1950

Харбинский политехнический
институт