Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ, ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ И ВИХРЯ УПРУГОГО ТЕЛА

И. С. Аржаных
(Ташкент)

Операционное исчисление в применении к динамическим задачам, как известно [1,2], позволяет разделить процесс решения на два этапа: 1) определение изображений искомых величин, 2) определение оригиналов по изображениям. Целью настоящей заметки является построение интегральных уравнений для изображений вектора перемещения, объемного расширения и вихря вектора перемещения изотропного упругого тела при решении основных динамических задач — первой и второй (внутренних и внешних).

Вектор перемещения $\mathbf{u}(q, t)$ в точках q упругого тела Q, ограниченного замкнутой поверхностью S, должен удовлетворять уравнению Ламе

$$\mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \rho\,\mathbf{f}(q, t) = \rho\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$$

а в точках s граничной поверхности S условиям:

первая задача

$$\mathbf{u}(s, t) = \mathbf{u}_s \qquad (t \geqslant 0)$$

вторая задача

$$2\mu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} + \lambda\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = \mathbf{F}_n$$

Для внутренних задач (Q внутри S) вектор $\mathbf{u}$ должен быть правильным, а для внешних (Q вне S) — регулярным.

Будем определять такой вектор перемещения, чтобы его изображение по Лапласу

$$\boldsymbol{\psi}(q, \eta) \equiv \int_0^\infty e^{-\eta t}\,\mathbf{u}(q, t)\,dt \tag{1}$$

существовало и, кроме того, чтобы

$$\operatorname{div}_q\boldsymbol{\psi} = \int_0^\infty e^{-\eta t}\operatorname{div}_q\mathbf{u}\,dt \equiv \vartheta(q, \eta), \qquad \operatorname{rot}_q\boldsymbol{\psi} = \int_0^\infty e^{-\eta t}\operatorname{rot}_q\mathbf{u}\,dt \equiv \boldsymbol{\omega}(q, \eta)$$

Пусть начальные значения вектора u и скорости $\partial u/\partial t$ будут соответственно $u_0(q)$ и $\dot{u}_0(q)$.

В результате преобразования уравнения Ламе легко получить [3] уравнение для изображения вектора перемещения:

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{\psi} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} + \rho(\mathbf{v} - \eta^2\boldsymbol{\psi}) = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{v} = \int_0^\infty e^{-\eta t}\,\mathbf{f}\,dt + \dot{u}_0 + \eta\mathbf{u}_0 \tag{3}$$

Точно так же преобразуются граничные условия:

первая задача

$$\psi(s, \eta) = \psi_s \tag{4}$$

вторая задача

$$2\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \vartheta + \mu \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} = \psi_n \tag{5}$$

где

$$\psi_s = \int_0^\infty e^{-\eta t} \mathbf{u}_s \, dt, \qquad \psi_n = \int_0^\infty e^{-\eta t} \mathbf{F}_n \, dt$$

Первый этап процесса решения динамической задачи, как указано выше, состоит в определении $\psi(q, \eta)$.

Построим интегральные уравнения, эквивалентные двум краевым проблемам: 1) уравнение (2) и граничное условие (4), 2) уравнение (2) и граничное условие (5). Для этого применим метод, изложенный в статьях [4,5].

Лемма. Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор ψ (правильный для внутренней задачи и регулярный для внешней) удовлетворял уравнению (2), состоит в том, чтобы он удовлетворял следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\psi(p, \eta) = \frac{m}{4\pi} \int_Q \Phi(p, q) \rho (\mathbf{v} - \eta^2 \psi) \, dq + \frac{k}{4\pi} \int_Q \vartheta(q, \eta) \nabla_q \Phi \, dq +$$

$$+ \frac{l}{4\pi} \int_Q \boldsymbol{\omega} \times \nabla_q \Phi \, dq + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(-k \mathbf{n} \vartheta + l \, \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \Phi(p, s) \, ds -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_S \psi(s, n) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, ds \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали, направленной вне Q,

$$k = 1 - m(\lambda + 2\mu), \qquad l = 1 - m\mu, \qquad m = \text{const} \neq 0, \qquad \Phi = \varphi(p, q) + \frac{1}{r}$$

причем $\varphi(p, q)$ — гармоническая функция относительно точек p и q упругого тела, r — расстояние между точками p и q.

Необходимость. Кроме уравнения (2):

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \vartheta - \mu \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \rho (\mathbf{v} - \eta^2 \psi) = 0$$

имеем тождества

$$\nabla^2 \psi = \operatorname{grad} \vartheta - \operatorname{rot} \omega$$

$$\psi(p, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\nabla^2 \psi}{r} dq + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$$

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \varphi \nabla^2 \psi \, dq + \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

Отсюда следует уравнение

$$\psi(p, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \Phi (k \operatorname{grad} \vartheta - l \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} - m\rho (\mathbf{v} - \eta^2 \psi)) \, dq +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_S \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

которое после преобразований

$$\Phi\,\mathrm{grad}_q\,\vartheta = \mathrm{grad}_q\,\Phi\vartheta - \vartheta\nabla_q\Phi, \qquad \Phi\,\mathrm{rot}_q\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}_q\Phi\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\nabla_q\Phi$$

и применения теоремы Остроградского — Гаусса обращается в уравнение (6).

Достаточность. Имеем

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi} = -m\rho(\mathbf{v} - \eta^2\boldsymbol{\psi}) + k\,\mathrm{grad}\,\vartheta - l\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} = -m\rho(\mathbf{v} - \eta^2\boldsymbol{\psi}) +$$

$$+ (k-l)\,\mathrm{grad}\,\vartheta + l\nabla^2\boldsymbol{\psi}$$

Так как $m \neq 0$, то отсюда следует, что вектор ψ удовлетворяет уравнению (2).

Первая задача. Пусть известна функция Грина проблемы Дирихле для поверхности S:

$$\Gamma = G + \frac{1}{r} \qquad (\Gamma = 0 \text{ на } S)$$

Тогда легко построить две системы интегральных уравнений, определяющих соответственно ψ и ϑ, ψ и $\boldsymbol{\omega}$.

Теорема 1. Изображения вектора перемещения и объемного расширения первой задачи удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered} 4\pi\mu\boldsymbol{\psi}(p,\eta) = \boldsymbol{\psi}_1 - \rho\eta^2\int_Q \Gamma\boldsymbol{\psi}\,dq - (\lambda+\mu)\int_Q \nabla_q\Gamma\vartheta\,dq \\ 4\pi(\lambda+2\mu)\,\vartheta = \vartheta_1 - \rho\eta^2\int_Q (\nabla_p\Gamma)\cdot\boldsymbol{\psi}\,dq - (\lambda+\mu)\int_Q \tau\,\vartheta\,dq \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\tau(p,q) = (\nabla_p\cdot\nabla_q)\,G(p,q)$$

$$\boldsymbol{\psi}_1 = \rho\int_Q \Gamma\mathbf{v}\,dq - \mu\int_S \boldsymbol{\psi}_s\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,ds, \qquad \vartheta_1 = \mathrm{div}_p\boldsymbol{\psi}_1$$

Доказательство. Положим в уравнении (6)

$$m = \frac{1}{\mu}, \qquad \Phi = \Gamma$$

Затем, проделав предварительно следующее преобразование:

$$\int_Q \vartheta\nabla_q\Gamma\,dq = \int_Q \vartheta\nabla_q G\,dq - \nabla_p\int_Q \frac{1}{r}\,\vartheta\,dq$$

вычислим

$$\vartheta(p,\eta) = \mathrm{div}_p\boldsymbol{\psi}$$

В целях сокращения ниже будем применять тензорные обозначения:

$$A = \{A_{gh}\}, \qquad \mathbf{a} = \sum_g i_g a_g, \qquad A\mathbf{a} = \sum_h i_h \sum_g A_{gh}a_g$$

$$\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\} = \left\{\begin{matrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{matrix}\right\}, \qquad \{\mathbf{a}\times\mathbf{b}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_3 & (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_2 \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_3 & 0 & -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_1 \\ -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_2 & (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_1 & 0 \end{matrix}\right\}$$

Теорема 2. Изображения вектора перемещения и вихря первой задачи удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$4\pi\mu(\lambda+2\mu)\psi=\psi_2-\rho\eta^2\int_Q\Gamma\psi\,dq-(\lambda+\mu)\int_Q(\nabla_q\Gamma)\times\omega\,dq$$
$$4\pi\mu\omega=\omega_1-\rho\eta^2\int_Q(\nabla_p\Gamma)\times\psi\,dq-(\lambda+\mu)\int_Q T\omega\,dq \tag{8}$$

где

$$T(p,q)=\{\nabla_p\nabla_q\}G-\begin{Bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{Bmatrix}(\nabla_p\cdot\nabla_q)G$$

$$\psi_2=\rho\int_Q\Gamma\mathbf{v}\,dq-(\lambda+2\mu)\int_S\psi_s\frac{\partial\Gamma}{\partial n}\,ds$$

$$\omega_1=\mathrm{rot}_p\psi_2-(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}_p\int_S\frac{1}{r}\mathbf{n}\cdot\omega\,ds$$

Доказательство. Положим в уравнении (6)

$$m=\frac{1}{\lambda+2\mu},\qquad\Phi=\Gamma$$

Вычислим затем $\omega=\mathrm{rot}_p\psi$, выполнив предварительно следующее преобразование

$$\int_Q\nabla_q\Gamma\times\omega\,dq=\int_Q\nabla_qG\times\omega\,dq-\mathrm{rot}_p\int_Q\frac{1}{r}\omega\,dq$$

и применив тождества

$$\mathrm{rot}_p\,\mathrm{rot}_p=\mathrm{grad}_p\,\mathrm{div}_p-\nabla_p^2,\qquad\mathrm{div}_q\,\omega=0$$

Легко видеть, что величина $\mathbf{n}\cdot\omega$ для первой задачи известна.

Вторая задача. При построении интегральных уравнений для второй задачи будем предполагать, что известны функции Грина проблем Дирихле и Неймана для поверхности S.

Так как функция Грина

$$N=H+\frac{1}{r}$$

для проблемы Неймана определяется граничными условиями

$$\frac{\partial N}{\partial n}=-\frac{4\pi}{S}\quad\text{для внутренней задачи}$$
$$\frac{\partial N}{\partial n}=0\quad\text{для внешней задачи}$$

то интегральные уравнения внутренней задачи отличаются от уравнений для внешней.

Теорема 3. Изображения вектора перемещения, объемного расширения и вихря второй внутренней задачи удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$8\pi\mu\psi=\psi_3-\rho\eta^2\int_Q N\psi\,dq-\lambda\int_Q\nabla_qN\vartheta\,dq-\mu\int_Q\nabla_qN\times\omega\,dq+\sigma$$
$$4\pi(\lambda+2\mu)\vartheta=\vartheta_2-\rho\eta^2\int_Q\nabla_pN\cdot\psi\,dq-\lambda\int_Q\varepsilon\vartheta\,dq-\mu\int_Q\mathbf{e}\cdot\omega\,dq \tag{9}$$
$$4\pi\mu\omega=\omega_2-\rho\eta^2\int_Q\nabla_pN\times\psi\,dq-\lambda\int_Q e\vartheta\,dq-\mu\int_Q E\omega\,dq$$

В уравнениях (9) введены следующия обозначения

$$\sigma = \frac{2\mu}{S} \int\limits_{S} \psi \, ds$$

$$\varepsilon(p, q) = (\nabla_p \cdot \nabla_q) H, \qquad \mathbf{e}(p, q) = (\nabla_p \times \nabla_q) H$$

$$E(p, q) = \{\nabla_p \times \nabla_q\} G - \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} (\nabla_p \cdot \nabla_q) H + \{\nabla_p \cdot \nabla_q\} (H - G)$$

$$\boldsymbol{\psi}_3 = \int\limits_{Q} N \mathbf{v} dq + \int\limits_{S} N \boldsymbol{\psi}_n ds, \quad \vartheta_2 = \mathrm{div}_p \boldsymbol{\psi}_3, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \mathrm{rot}_p \boldsymbol{\psi}_3$$

Теорема доказывается точно так же, как и предыдущие, полагая

$$m = \frac{1}{2\mu}, \qquad \Phi = N$$

Необходимость функции G для построения ядра E обусловлена наличием слагаемого

$$-\mu \, \mathrm{grad}_p \int\limits_{S} \frac{1}{r} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \, ds$$

в уравнении для $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}_p \boldsymbol{\psi}$ (так как во второй трехмерной задаче величина $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}$ не определяется граничным условием).

Теорема 4. Изображения вектора перемещения, объемного расширения и вихря второй внешней задачи определяются системой интегральных уравнений (9), где N — функция Грина внешней проблемы Неймана, а $\sigma = 0$.

Заметим, что для плоских задач построенные указанным выше методом системы интегральных уравнений значительно упрощаются. В частности, для второй задачи отпадает необходимость в функции Грина проблемы Дирихле, так как для плоских задач $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \equiv 0$.

Поступила 29 VI 1950

Институт математики и механики
Академии Наук Узбекской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. ОНТИ. 1938.
2. Карлслоу Х. и Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. ИЛ. 1948.
3. Кильчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. ОГИЗ. 1949.
4. Аржаных И. С. Новые регулярные интегральные уравнения основных проблем теории упругости. ДАН УзССР. 1950. № 4.
5. Аржаных И. С. К теории интегрирования динамических уравнений изотропного упругого тела. ДАН СССР. 1950. Т. 73. № 1.