Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ДВИЖЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ В ТЕЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

А. Н. Рубашов
(Москва)

Возьмем прямоугольную неподвижную систему координат x, y, z и рассмотрим в этой системе некоторое тело.

Согласно известной формуле механики

$$I_L = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \tag{1}$$

где I_L — момент инерции тела относительно оси L, проходящей через начало координат, α, β, γ — направляющие косинусы этой оси, A, B, C — моменты инерции относительно осей x, y, z, а D, E, F — центробежные моменты инерции относительно плоскостей yz, zx, xy. Если ось L — главная ось инерции, то должно выполняться соотношение

$$\delta I_L = 0 \tag{2}$$

для любых вариаций $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, удовлетворяющих условию

$$\delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \tag{3}$$

Развертывая левые части уравнений (2) и (3), получим

$$(A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\delta\alpha + (-F\alpha + B\beta - D\gamma)\,\delta\beta + (-E\alpha - D\beta + C\gamma)\,\delta\gamma = 0 \tag{4}$$

$$\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0 \tag{5}$$

Из равенств (4) и (5) следует, что

$$\frac{A\alpha - F\beta - E\gamma}{\alpha} = \frac{-F\alpha + B\beta - D\gamma}{\beta} = \frac{-E\alpha - D\beta + C\gamma}{\gamma} \tag{6}$$

Отсюда получаем

$$(A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\beta = (-F\alpha + B\beta - D\gamma)\,\alpha \tag{7}$$

$$(A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\gamma = (-E\alpha - D\beta + C\gamma)\,\alpha \tag{8}$$

При непрерывном изменении моментов инерции A, B, C, D, E, F направление главной оси инерции L также непрерывно изменяется. Дифференцируя равенства (7) и (8), будем иметь

$$\begin{aligned}(\dot{A}\alpha - \dot{F}\beta - \dot{E}\gamma + A\dot{\alpha} - F\dot{\beta} - E\dot{\gamma})\,\beta &+ (A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\dot{\beta} = \\ = (-\dot{F}\alpha + \dot{B}\beta - \dot{D}\gamma - F\dot{\alpha} + B\dot{\beta} - D\dot{\gamma})\,\alpha &+ (-F\alpha + B\beta - D\gamma)\,\dot{\alpha}\end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned}(\dot{A}\alpha - \dot{F}\beta - \dot{E}\gamma + A\dot{\alpha} - F\dot{\beta} - E\dot{\gamma})\,\gamma &+ (A\alpha - F\beta - E\gamma)\,\dot{\gamma} = \\ = (-\dot{E}\alpha - \dot{D}\beta + \dot{C}\gamma - E\dot{\alpha} - D\dot{\beta} + C\dot{\gamma})\,\alpha &+ (-E\alpha - D\beta + C\gamma)\,\dot{\alpha}\end{aligned} \tag{10}$$

где точкой обозначена операция дифференцирования по времени. Равенства (9) и (10) определяют зависимость между скоростью изменения моментов инерции и скоростью изменения направляющих косинусов главной оси инерции.

Расположим теперь неподвижную систему координат xyz таким образом, чтобы рассматриваемый момент времени оси x, y, z совпадали с главными осями инерции тела. Ту из главных осей инерции, которая совпадает с осью x, обозначим через L. Тогда будем иметь

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0 \tag{11}$$

Кроме того, в этом случае

$$D = 0, \qquad E = 0, \qquad F = 0 \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (9) и (10), найдем

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{F}}{B - A}, \qquad \dot{\gamma} = \frac{\dot{E}}{C - A} \tag{13}$$

Рассмотрим теперь точку, лежащую на оси L на расстоянии 1 от начала координат. При вращении триэдра главных осей инерции она будет двигаться со скоростью $\mathbf{v}$, равной

$$\mathbf{v} = \dot{\alpha}\mathbf{i} + \dot{\beta}\mathbf{j} + \dot{\gamma}\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \tag{14}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям x, y, z; $\mathbf{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль L, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения триэдра главных осей инерции, а p, q, r — составляющие $\boldsymbol{\omega}$ по осям x, y, z. Подставляя в равенство (14) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, получаем

$$\dot{\alpha}\mathbf{i} + \dot{\beta}\mathbf{j} + \dot{\gamma}\mathbf{k} = r\mathbf{j} - q\mathbf{k} \tag{15}$$

Отсюда находим

$$\dot{\beta} = r, \qquad \dot{\gamma} = -q \tag{16}$$

Таким образом

$$r = \frac{\dot{F}}{B - A}, \qquad q = \frac{\dot{E}}{A - C}, \qquad p = \frac{\dot{D}}{C - B} \tag{17}$$

(последнее равенство получается аналогичным способом).

Умножая равенства (17) соответственно на $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ и складывая затем полученные равенства, найдем

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{D}}{C - B}\,\mathbf{i} + \frac{\dot{E}}{A - C}\,\mathbf{j} + \frac{\dot{F}}{B - A}\,\mathbf{k} \tag{18}$$

Подставляя в это равенство вместо D, E, F выражения

$$D = \int yz\rho\, d\tau, \qquad E = \int zx\rho\, d\tau, \qquad F = \int xy\rho\, d\tau$$

получим формулу для угловой скорости вращения главных осей инерции в теле переменной массы:

$$\boldsymbol{\omega} = \int \left(\frac{yz}{C - B}\,\mathbf{i} + \frac{zx}{A - C}\,\mathbf{j} + \frac{xy}{B - A}\,\mathbf{k} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau \tag{19}$$

При выводе формулы (19) мы считали, что центр рассматриваемого эллипсоида инерции все время совпадает с началом координат. Можно было бы показать, что эта формула остается справедливой в том случае, когда в качестве центра эллипсоида выбирается точка, совпадающая в каждый момент времени с центром масс рассматриваемого тела.

Поступила 3 XI 1950