Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

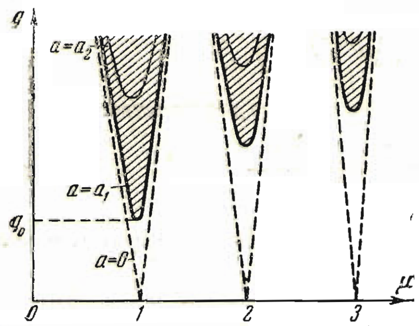
**М. А. Айзерман** (Москва)

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + \left(1 + q\cos\frac{2}{\mu}t\right)x = 0 \qquad (1)$$

Условимся называть динамическую систему, описываемую уравнением[1] (1), неограниченно устойчивой, если независимо от величин конечных значений $\mu$, $x_0$ и $\dot{x}_0$ функция $x(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) при начальных условиях $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, стремится к $x = 0$ при $t \to \infty$. Требуется определить условия, достаточные для неограниченной устойчивости такой системы.

Уравнение (1) рассматривалось Д. Релеем[1] в связи с задачей о возбуждении поперечных колебаний струны периодическим изменением ее натяжения и было обстоятельно изучено А. Андроновым и М. Леонтовичем [2] и Г. Гореликом [3] в связи с исследованием параметрического резонанса и разработкой теории электрических машин с параметрическим возбуждением. В результате этих исследований было установлено, что плоскость $q$, $\mu$ разбивается на области устойчивости и неустойчивости так, как это показано на фиг. 1 для некоторого значения $a = a_1 > 0$. Тонкой линией показана граница области устойчивости при $a = a_2 > a_1$, а пунктиром при $a = 0$. Из фиг. 1 следует, что система устойчива при любом $\mu$, лишь если $q < q_0$, где $q_0$ — значение $q$, соответствующее точке минимума кривой, служащей границей первой ($\mu = 1$) области неустойчивости на фиг. 1. Задача сводится к определению $q_0$ для разных значений $a$.




Фиг. 1

В работе Г. Горелика [3], опираясь на формулу Релея, была получена оценка $q_0 \approx 2a$, но эта оценка верна лишь для малых $q$ и $a$.

Для получения оценки, верной для любых $q$ и $a$, воспользуемся вторым методом Ляпунова [4—6], ограничиваясь функцией Ляпунова, не зависящей явно от $t$ и вычисленной по методу, указанному Ляпуновым для линейных систем с постоянными коэффициентами, подобно тому, как это делалось в статьях [6—9].

Заменим уравнение (1) системой

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -b(t)x - ay \qquad \left(b(t) = 1 + q\cos\frac{2}{\mu}t\right) \qquad (2)$$

и рассмотрим, наряду с (2), систему с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -bx - ay \qquad (3)$$

не накладывая пока каких-либо других ограничений на выбор числа $b$, кроме $b > 0$.

Зададимся квадратичной формой

$$U = -(x^2 + y^2)$$

[1] Уравнение (1) легко сводится к уравнению Матье.

и определим коэффициенты формы

$$V = \frac{1}{2} B_x x^2 - B_{xy} xy + \frac{1}{2} B_y y^2$$

из условия $dV / dt = U$, воспользовавшись при этом системой (3):

$$\frac{dV}{dt} = B_x xy + B_y y(-ay - bx) - B_{xy} x(-ay - bx) - B_{xy} y^2 = -(x^2 + y^2)$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем систему уравнений:

$$B_x - bB_y + aB_{xy} = 0, \qquad -aB_y - B_{xy} = -1, \qquad bB_{xy} = -1$$

Ее решение

$$B_{xy} = -\frac{1}{b}, \qquad B_y = \frac{b+1}{ba}, \qquad B_x = \frac{b(b+1) + a^2}{ba}$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -ay - (b + b^*)x \tag{4}$$

Вычислим производную $dV / dt$, воспользовавшись уже не системой (3), а системой (4):

$$\frac{dV}{dt} = -x^2 - y^2 - b^* B_y xy + b^* B_{xy} x^2 \tag{5}$$

Форма (5) определенно отрицательна, если

$$b^{*2} + 4\frac{B_{xy}}{B_y^{\,2}} b^* - 4\frac{1}{B_y^{\,2}} < 0$$

Это неравенство выполняется, если

$$b_1^* < b^* < b_2^*$$

где

$$b_{1,2}^* = -\frac{2B_{xy}}{B_y^{\,2}} \mp \sqrt{\frac{4B_{xy}^{\,2}}{B_y^{\,4}} + \frac{4}{B_y^{\,2}}}$$

или после подстановки найденных выше значений $B_y$ и $B_{xy}$

$$b_{1,2}^* = \frac{2ba^2}{(b+1)^2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \left(\frac{b+1}{a}\right)^2}\right)$$

Для того чтобы рассматриваемая динамическая система (1) была неограниченно устойчивой, достаточно, чтобы при любом $t$ выполнялось неравенство

$$b + \frac{2ba^2}{(b+1)^2}\left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{b+1}{a}\right)^2}\right] < 1 + q\cos\frac{2}{\mu}t < b + {}$$
$$+ \frac{2ba}{(b+1)^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{b+1}{a}\right)^2}\right] \tag{6}$$

Мы не ограничили как-либо выбор числа $b > 0$ и можем распорядиться сейчас им для того, чтобы усилить эффективность оценки (6).

Подберем это значение $b$ так, чтобы при наибольшем значении $q$ неравенство (6) выполнялось. Обозначим это значение $q$ через $q_{\max}$.

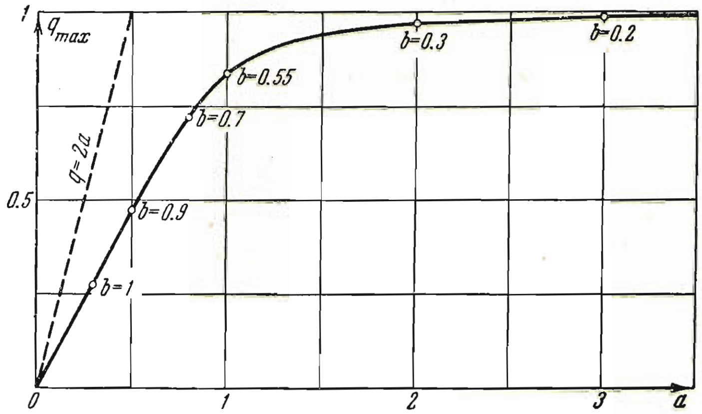
Для того чтобы система, движение которой описывается уравнением (1), была устойчива при любом $\mu$, достаточно удовлетворить неравенству

$$q < q_{\max}$$

На фиг. 2 показана зависимость $q_{\max}$ от $a$. На кривой для отдельных точек отмечены те значения $b$, при которых $q$, допускаемое неравенством (6), максимально.

Пунктиром для сравнения показана прямая $q_0 = 2a$, найденная Г. Гореликом в [3] для малых $q$ $(q \ll 1)$.

Пусть, например, требуется установить — устойчива ли система, описываемая уравнением (1) при любых конечных начальных условиях $x_0$ и $\dot{x}_0$ и при любом значении $\mu$, если: 1) $a = 0.5$, $q = 0.3$, 2) $a = 1$, $q = 0.9$ и 3) $a = 2$, $q = 0.95$




Фиг. 2

Из фиг. 2 следует, что в первом и третьем случаях система устойчива. Предлагаемый метод, определяющий лишь достаточный признак устойчивости, не позволяет решить задачу во втором случае.

Заметим в заключение, что кривая $q_{\max} = f(a)$ асимптотически стремится к $q_{\max} = 1$ при $t \to \infty$; так, $q_{\max} = 0.99$ уже при $a = 3$. Таким образом, при $a > 3$ система устойчива не только при любом $\mu$, но практически при любом $q$.

Столь же просто удается иногда получить пригодные для практического использования достаточные признаки неограниченной устойчивости и в значительно более сложных системах с переменными коэффициентами.

Поступила 10 VII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Стретт Д. (Релей). Теория звука. Т. I.
2. Андронов А. А. и Леонтович М. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. Журнал Русского физико-химического общества. Серия физическая. 1927. Т. IX. Вып. 5—6. Стр. 429.
3. Горелик Г.С. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами. Журнал технической физики. 1934. Т. IV. Вып. 10; 1935. Т. V. Вып. 2—3.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1937.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОНТИ. 1949.
6. Нугманова Ш. Об устойчивости периодических движений. ДАН СССР. 1944. Т. X.
7. Айзерман М. А. О сходимости процесса автоматического регулирования после больших начальных отклонений. Автоматика и телемеханика. 1946. Т. VII. Вып. 2—3.
8. Айзерман М. А. Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика. 1947. Т. VIII. Вып. 1.
9. Айзерман М. А. Задача об устойчивости процесса прямого регулирования оборотов двигателя при учете нелинейности его характеристик. Сборник «Устойчивость работы двигателя». НАМИ. Машгиз. 1948. Вып. 51.