Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЛЯПУНОВА

А. М. Гольдин (Ленинград)

Рассмотрим уравнение

$$y'' + p(x)\, y = 0 \tag{1}$$

где $p(x)$ — положительная, ограниченная, периодическая функция с периодом ω.

Для того чтобы все решения этого уравнения были ограниченными, достаточно выполнение известного критерия Ляпунова [1]

$$\omega \int_0^\omega p(x)\, dx \leqslant 4 \tag{2}$$

Жуковский [2] дал очень простой геометрический вывод этого критерия. Он установил, в частности, что (2) соответствует требованию разделения двух любых соседних корней произвольного решения уравнения (1) интервалом большим, чем ω.

Так, этот метод Жуковского был применен Гусаровой [3] для нахождения критерия ограниченности решений в случае $p(x) \geqslant n^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ и $\omega = \pi$, где критерий Ляпунова получается при $n = 0$. В данной заметке используется идея Жуковского для расширения критерия (2), считая попрежнему, что $p(x) \geqslant 0$.

Пусть полуволна $y(x)$ между абсциссами x_1 и x_2 (фиг. 1) соответствует какому-нибудь решению уравнения (1). Вводя обозначение

$$x_2 - x_1 = \mu, \quad y'(x_1) = m_1, \quad y'(x_2) = -m_2 \tag{3}$$

для касательных к полуволне в точках x_1 и x_2 имеем

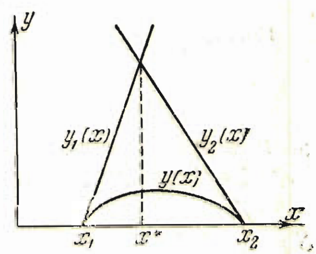
$$y_1(x) = m_1(x - x_1), \ y_2(x) = -m_2(x - x_2) \tag{4}$$

Абсцисса x^* пересечения касательных будет

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Откуда

$$x^* - x_1 = \frac{m_2 \mu}{m_1 + m_2}, \qquad x_2 - x^* = \frac{m_1 \mu}{m_1 + m_2} \tag{5}$$



Фиг. 1

Возвращаясь к уравнению (1) и интегрируя его в пределах от x_1 до x_2, найдем

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, y(x)\, dx = m_1 + m_2 \tag{6}$$

Непосредственно из фиг. 1, пользуясь алгебраическими преобразованиями, имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\, y(x)\, dx < \int_{x_1}^{x^*} p(x)\, y_1(x)\, dx + \int_{x^*}^{x_2} p(x)\, y_2(x)\, dx =$$

$$= \frac{m_1 m_2 \mu}{m_1 + m_2} \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx - m_1 \int_{x_1}^{x^*} p(x)\,(x^* - x)\, dx - m_2 \int_{x^*}^{x_2} p(x)\,(x - x^*)\, dx \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), получаем

$$\frac{m_1 m_2 \mu}{m_1 + m_2} \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx > m_1 + m_2 + m_1 \int_{x_1}^{x^*} p(x)\,(x^* - x)\,dx + m_2 \int_{x^*}^{x_2} p(x)\,(x - x^*)\, dx$$

Замечая, что $\frac{m_2}{m_1+m_2}<1$ и $\frac{m_1}{m_1+m_2}<1$, имеем

$$\frac{m_1 m_2 \mu}{m_1+m_2}\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx > m_1+m_2+\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,\Delta \tag{8}$$

где

$$\Delta=\int_{x_1}^{x^*} p(x)(x^*-x)\,dx+\int_{x^*}^{x_2} p(x)(x-x^*)\,dx=\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,|x^*-x|\,dx \tag{9}$$

Наконец, из (8) получаем

$$\mu\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx > \frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}+\Delta \geqslant 4+\Delta \tag{10}$$

Правую часть этого неравенства можно значительно упростить и попутно усилить, если найти нижнюю границу значений Δ при всевозможных $p(x)$.

Займемся оценкой Δ. Для этого, введем обозначения

$$A_1(x)=\int_x^{x^*} p(x)\,dx, \qquad A_2(x)=\int_{x^*}^{x} p(x)\,dx$$

Тогда Δ можно представить в следующем виде:

$$\Delta=(x^*-x_1)\,A_1(x_1)-\int_{x_1}^{x^*} A_1(x)\,dx+(x_2-x^*)\,A_2(x_2)-\int_{x^*}^{x_2} A_2(x)\,dx \tag{11}$$

Покажем, что для всех функций $p(x)$ рассматриваемого типа имеет место

$$S=\Delta-\frac{A_1^2(x_1)}{2P_1}-\frac{A_2^2(x_2)}{2P_2}\geqslant 0 \tag{12}$$

где P_1 и P_2 — максимальные значения $p(x)$ соответственно на интервалах $x_1 \leqslant x \leqslant x^*$ и $x^* \leqslant x \leqslant x_2$. Для доказательства достаточно преобразовать S к виду

$$S=\int_{x_1}^{\chi_1}[A_1(x_1)-A_1(x)]\,dx+\int_{\chi_1}^{x^*}[P_1(x^*-x)-A_1(x)]\,dx+ \qquad \left(\chi_1=x^*-\frac{A_1(x_1)}{P_1}\right)$$

$$+\int_{x^*}^{\chi_2}[P_2(x-x^*)-A_2(x)]\,dx+\int_{\chi_2}^{x_2}[A_2(x_2)-A_2(x)]\,dx\geqslant 0 \qquad \left(\chi_2=x^*+\frac{A_2(x_2)}{P_2}\right) \tag{13}$$

Тождественность выражений (12) и (13) проще всего проверить непосредственно вычислениями, раскрывая (13) и пользуясь (11). Справедливость неравенства (13), а следовательно, и (12) очевидна. В самом деле, подинтегральные выражения в (13) не могут быть отрицательными и лишь в частном случае обращаются в нули.

В случае, когда все подинтегральные выражения в (13) равны нулю, неравенство (12) обращается в равенство. Это однозначно определяет вид функции $p(x)$ для Δ_1 — точной нижней границы возможных значений Δ при различных $p(x)$ с одинаковыми $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, P_1 и P_2.

$$p(x)=\begin{cases} 0 & (x_1 \leqslant x \leqslant x^*-a_1(x_1)) \\ P_1 & (x^*-a_1(x_1)\leqslant x \leqslant x^*) \\ P_2 & (x^* \leqslant x \leqslant x^*+a_2(x_2)) \\ 0 & (x^*+a_2(x_2)\leqslant x \leqslant x_2) \end{cases} \qquad \left(a_1(x_1)=\frac{A_1(x_1)}{P_1}\right) \quad \left(a_2(x_2)=\frac{A_2(x_2)}{P_2}\right) \tag{14}$$

где значения $p(x)$ на стыках несущественны.

Итак, точная нижняя граница для Δ имеет вид:

$$\Delta_1 = \frac{A_1^2(x_1)}{2P_1} + \frac{A_2^2(x_2)}{2P_2} \tag{15}$$

Эта граница не достигается, как видно из (14), в классе непрерывных функций $p(x)$, но к ней, очевидно, можно сколь угодно близко приблизиться при помощи непрерывных функций. Пусть $P_{\max}$ — наибольшее значение $p(x)$; тогда, очевидно,

$$\Delta \geqslant \frac{A_1^2(x_1) + A_2^2(x_2)}{2P_{\max}} \tag{16}$$

Рассмотрим всевозможные значения $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ такие, для которых сумма

$$A_1(x_1) + A_2(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$$

остается неизменной. Тогда, переписав числитель неравенства (16) в виде

$$A_1^2(x_1) + \left[\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx - A_1(x_1)\right]^2$$

отыщем его минимум в зависимости от значений $A_1(x_1)$. Это даст

$$A_1^2(x_1) + A_2^2(x_2) \geqslant \frac{1}{2}\left(\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx\right)^2$$

Тогда вместо (16), учитывая (10), получим более сильное неравенство:

$$\Delta \geqslant \frac{1}{4P_{\max}}\left(\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx\right)^2 > \frac{4}{\mu^2 P_{\max}} \tag{17}$$

Возвратимся к неравенству (10). На основании (17) его можно переписать при любом расстоянии μ между корнями x_1 и x_2:

$$\mu \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx > 4 + \frac{4}{\mu^2 P_{\max}} \tag{18}$$

Предположим теперь, что $\mu \leqslant \omega$, Тогда, усиливая неравенство (18), получим

$$\omega \int_0^{\omega} p(x)\,dx > 4 + \frac{4}{\omega^2 P_{\max}} \tag{19}$$

Неравенство (20) выполняется всегда, когда имеет место (19). Следовательно, обратное неравенство

$$\omega \int_0^{\omega} p(x)\,dx \leqslant 4 + \frac{4}{\omega^2 P_{\max}} \tag{20}$$

будет достаточным условием того, чтобы $\mu > \omega$, т. е. того, чтобы все решения уравнения (1) были ограниченными.

Сравнивая неравенство (2) и (20), видим, что (20) представляет собой одно из возможных расширений критерия Ляпунова.

Поступила 2 II 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. 1935. стр. 217.
2. Жуковский Н. Е. Полное собрание сочинений. 1937. Т. I. Стр. 315.
3. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 3.