Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. М. Макаров
(Куйбышев)

Ляпунов [1] рассматривал систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -p(t)\,x_1$$

где $p(t)$ — непрерывная вещественная ограниченная периодическая вещественного периода ω функция t. Эта система представляет «неполную» линейную систему двух уравнений первого порядка.

В настоящей работе метод Ляпунова применяется для исследования корней характеристического уравнения полной линейной системы и в качестве обобщения получаются результаты, аналогичные тем, которые были получены Ляпуновым.

1. Пусть имеем систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu(p_{11}x_1 + p_{12}x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu(p_{21}x_1 + p_{22}x_2) \tag{1.1}$$

где p_{ik} — непрерывные ограниченные периодические вещественного периода ω функции t, μ — параметр. Будем искать решения системы (1.1) в виде

$$x_{sr} = \delta_{sr} + \mu x_{sr}^{(1)} + \mu^2 x_{sr}^{(2)} + \ldots \qquad \left(r, s = 1, 2;\ \begin{matrix} \delta_{sr} = 1 & \text{при } s = r \\ \delta_{sr} = 0 & \text{при } s \neq r \end{matrix}\right) \tag{1.2}$$

где $x_{sr}^{(n)}$ суть функции t, уничтожающиеся, когда $t = 0$. Эти функции определяются последовательно по формулам, которые получим, если ряды (1.2) подставим в уравнение (1.1) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ, последовательно проинтегрируем, т. е. по формулам

$$x_{sr}^{(n)} = \int_0^t \sum_{j=1}^{2} p_{sj} x_{jr}^{(n-1)}\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

при начальных значениях $t = 0$

$$x_{sr}^{(0)} = x_{rs}(0) = \delta_{sr} \tag{1.4}$$

Характеристическое уравнение системы (1.1) будет иметь вид

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} x_{11}(\omega) - \rho & x_{21}(\omega) \\ x_{12}(\omega) & x_{22}(\omega) - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 2A\rho + A_1 = 0 \tag{1.5}$$

где

$$2A = x_{11}(\omega) + x_{22}(\omega) \tag{1.6}$$

$$A_1 = \Delta(0) = \begin{vmatrix} x_{11}(\omega) & x_{21}(\omega) \\ x_{12}(\omega) & x_{22}(\omega) \end{vmatrix} = \exp\int_0^\omega \mu(p_{11} + p_{22})\, dt \tag{1.7}$$

Если

$$A^2 > A_1, \quad \text{или} \quad A > \sqrt{A_1} = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\omega \mu\,(p_{11}+p_{22})\,dt\right\} \tag{1.8}$$

то оба корня уравнения (1.5) будут вещественными и один из них численно будет больше, а другой численно меньше $\sqrt{A_1}$. Допустим теперь, что все коэффициенты p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} могут принимать только отрицательные или равные нулю значения, не будучи нулем тождественно.

Тогда из формул (1.3) легко заметить, что все функции $x_{11}^{(n)}(\omega)$ и $x_{22}^{(n)}(\omega)$ будут получаться положительными для четного n и отрицательными для нечетного n. При этом из формулы

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left[x_{11}^{(n)}(\omega) + x_{22}^{(n)}(\omega)\right] \tag{1.9}$$

при $\mu = -1$ заключаем, что правая часть ее будет положительной и сумма в правой части положительна. Выделим из последней формулы слагаемые вида

$$x_{11}^{*(n)}(t) = \int_0^t p_{11} x_{11}^{*(n-1)}\,dt, \qquad x_{22}^{*(n)}(t) = \int_0^t p_{22} x_{22}^{*(n-1)}\,dt \tag{1.10}$$

где звездочкой отмечено, что в первой и последней из формул (1.3) берутся соответственно слагаемые вида

$$x_{11}^{*(n)} = \int_0^t p_{11}\cdots\int_0^t p_{11}\overbrace{dt\ldots dt}^{n\ \text{раз}} \qquad x_{22}^{*(n)} = \int_0^t p_{22}\cdots\int_0^t p_{22}\overbrace{dt\ldots dt}^{n\ \text{раз}}$$

Но легко показать, что последние выражения могут быть последовательным интегрированием по частям преобразованы к виду

$$x_{ss}^{*(n)}(\omega) = \frac{1}{n!}\left(\int_0^\omega p_{ss}\,dt\right)^n \qquad (s = 1, 2)$$

Учитывая это и собирая в сумме (1.9) такие слагаемые, заметим, что при $\mu = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_{\nu\nu}^{*(n)}(\omega) = \exp\left(-\int_0^\omega p_{\nu\nu}\,dt\right) - 1 \qquad (\nu = 1, 2)$$

Тогда формула (1.9) примет вид:

$$A = \frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{11}\,dt\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{11}\,dt\right) + A' \tag{1.11}$$

где A' — невыделенная положительная сумма в правой части (1.9).

Отсюда

$$A > \frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{11}\,dt\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{22}\,ds\right) \tag{1.12}$$

Но при любых p_{11} и p_{22}

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{11}\,dt\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\int_0^\omega p_{22}\,dt\right) \geqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\omega (p_{11}+p_{22})\,dt\right) = \sqrt{A_1}$$

Следовательно, и подавно

$$A > \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\omega (p_{11} + p_{22})\right) dt \tag{1.13}$$

Таким образом, мы пришли к теореме: если в системе уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -p_{11}x_1 - p_{12}x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -p_{21}x_1 - p_{22}x_2$$

функции $p_{ik} = p_{ik}(t)$ — непрерывные ограниченные вещественные периодические вещественного периода ω функции t — принимают только отрицательные или нулевые значения, не равные тождественно нулю, то корни характеристического уравнения, соответствующего данной системе, всегда будут вещественными и один из них по модулю будет больше, а другой меньше величины

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\omega (p_{11} + p_{22})\, dt\right)$$

Случай, разобранный Ляпуновым, получается из этого при $p_{11} = p_{22} = 0$ $p_{12} = -1$.

2. Для того чтобы получить результаты в случае мнимых корней, рассмотрим систему

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{12}x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -p_{21}x_1 \tag{2.1}$$

которая получается из полной системы вида

$$\frac{dy_1}{dt} = q_{11}y_1 + q_{12}y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 \tag{2.2}$$

при помощи подстановки [1]

$$y_1 = x_1 \exp\int_0^t q_{11}dt, \qquad y_2 = x_2 \exp\int_0^t q_{22}dt \tag{2.3}$$

Коэффициенты в (2.1) и (2.2) связаны соотношениями

$$p_{12} = q_{12}\exp\int_0^t (q_{22} - q_{11})\, dt, \qquad p_{21} = q_{21}\exp\left(-\int_0^j (q_{22} - q_{11})\, dt\right) \tag{2.4}$$

Чтобы при периодических q_{12} и q_{21} функции p_{12} и p_{21} были периодическими, достаточно потребовать, чтобы функция

$$\int_0^t (q_{22} - q_{11})\, dt$$

была периодической того же периода, что мы и будем в дальнейшем предполагать выполненным.

В соответствии с методом малого параметра рассмотрим вместо (2.1) систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -\mu p_{12}x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mu p_{21}x_1 \tag{2.5}$$

из которой при $\mu = -1$ получится (2.1).

---

[1] Эта подстановка применима и в общем случае — она уничтожает диагональные члены.

Представляя независимые решения в виде (1.2), получим формулы (1.3) для определения $x_{sr}^{(n)}$ в виде

$$
\begin{aligned}
&x_{11}^{(0)} = 1, \qquad x_{11}^{(n)} = -\int_0^t p_{12} x_{21}^{(n-1)}\, dt \\
&x_{21}^{(0)} = 0, \qquad x_{21}^{(n)} = \int_0^t p_{21} x_{11}^{(n-1)}\, dt \\
&x_{12}^{(0)} = 0, \qquad x_{12}^{(n)} = -\int_0^t p_{12} x_{22}^{(n-1)}\, dt \\
&x_{22}^{(0)} = 1, \qquad x_{22}^{(n)} = \int_0^t p_{21} x_{12}^{(n-1)}\, dt
\end{aligned}
\qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.6)
$$

Отсюда очевидно, что

1) $x_{11}^{(n)} = 0, \quad x_{22}^{(n)} = 0$ при $n = 2k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

2) $x_{11}^{(n)} < 0, \quad x_{22}^{(n)} < 0$ при $n = 2k \quad (k = 1, 3, 5, \ldots)$

3) $x_{11}^{(n)} > 0, \quad x_{22}^{(n)} > 0$ при $n = 4k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

При этом в последних двух случаях p_{12} и p_{21} предполагаются неотрицательными функциями t. Поэтому формулу (1.6) можно записать в виде

$$
2A = x_{11}(\omega) + x_{22}(\omega) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \left[x_{11}^{(2n)}(\omega) + x_{22}^{(2n)}(\omega)\right] \qquad (2.7)
$$

Здесь через $x_{11}^{(2n)}$ и $x_{22}^{(2n)}$ обозначены положительные значения выражений вида (2.6), т. е.

$$
\int_0^\omega p_{12} \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12} \cdots \int_0^t p_{21} dt \cdots dt, \qquad \int_0^\omega p_{21} \int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21} \cdots \int_0^t p_{12} dt \cdots dt
$$

Далее, легко доказать, что при неотрицательных p_{12} и p_{21} при любом $t > 0$ и $n > 0$ имеет место неравенство

$$
S_n = \left[x_{11}^{(2n-2)} + x_{22}^{(2n-2)}\right] \int_0^t p_{12} dt \int_0^t p_{21} dt - 2n\left[x_{11}^{(2n)} + x_{22}^{(2n)}\right] > 0 \qquad (2.8)
$$

где выражения в квадратных скобках представляют положительные величины.

Доказательство ведется так же, как в книге Н. Г. Четаева [2]. Для этого записываем последовательно

$$
S_n = \int_0^t (p_{12} F_n + p_{21} \Phi_n)\, dt, \qquad \Phi_n = \int_0^t (p_{12} u_n^* + p_{21} v_n^*)\, dt
$$

$$
F_n = \int_0^t (p_{12} u_n + p_{21} v_n)\, dt, \qquad u_n^* = \int_0^t (p_{12} w_n^* + p_{21} z_n^*)\, dt
$$

$$
v_n = \int_0^t (p_{12} w_n + p_{21} z_n)\, dt
$$

где величины u_n, v_n^*, z_n, w_n^*, известным образом выраженные через p_{12} и p_{21}, будут положительными при неотрицательных p_{12} и p_{21}, а $w_n = F_{n-1}$ и $z_n^* = \Phi_{n-1}$, что видно из сравнения соответствующих формул.

При условии неотрицательности p_{12} и p_{21} все $x_{11}^{(2n)}$ и $x_{22}^{(2n)}$ будут получаться положительными.

Функции F_n и Φ_n будут положительными, если положительными будут u_u^* и v_n. Последние же в свою очередь будут положительными, если будут положительными функции F_{n-1} и Φ_{n-1}.

Отсюда методом полной математической индукции заключаем, что если для всех положительных значений t будут иметь место неравенства $F_{n-1} > 0$ и $\Phi_{n-1} > 0$, то для тех же значений будут выполняться и неравенства $F_n > 0$ и $\Phi_n > 0$, а следовательно, и неравенство $S_n > 0$.

Но для $n = 2$ имеем, интегрируя по частям:

$$F_2 = \int_0^t p_{21}dt \int_0^t p_{12}dt \int_0^t p_{21}dt + \Big(\int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21}dt\,dt + \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}dt\,dt\Big) \int_0^t p_{21}\,dt -$$

$$- 4\int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21}\,dt\,dt\,dt = \Big(\int_0^t p_{21}\,dt\Big)^2 \int_0^t p_{12}\,dt + \Big(\int_0^t p_{21}\,dt\Big)^2 \int_0^t p_{12}\,dt -$$

$$- 4\int_0^t p_{21} \Big[\int_0^t p_{12}\,dt \int_0^t p_{21}\,dt - \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt\Big]\,dt = 2\Big(\int_1^t p_{21}\,dt\Big)^2 \int_0^t p_{12}\,dt -$$

$$- 4\int_0^t p_{21} \Big[\int_0^t p_{12}\,dt \int_0^t p_{21}\,dt\Big]\,dt + 4\int_0^t p_{21} \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt\,dt =$$

$$= 2\Big(\int_0^t p_{21}\,dt\Big)^2 \int_0^t p_{12}\,dt - 4\int_0^t \Big\{\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}\Big(\int_0^t p_{21}\,dt\Big)^2\Big]' \int_0^t p_{12}\,dt\Big\}\,dt +$$

$$+ 4\int_0^t p_{21} \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt\,dt = 2\int_0^t p_{12}\Big(\int_0^t p_{21}\,dt\Big)^2 dt +$$

$$+ 4\int_0^t p_{21} \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt\,dt > 0$$

$$\Phi_2 = \int_0^t p_{12}\,dt \int_0^t p_{21}\,dt \int_0^t p_{12}\,dt + \Big[\int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt + \int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21}\,dt\,dt\Big] \int_0^t p_{12}\,dt -$$

$$- 4\int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21} \int_0^t p_{12}\,dt\,dt\,dt$$

Так как Φ_2 получается из F_2 заменой p_{21} на p_{12} и p_{12} на p_{21}, то получаем

$$\Phi_2 = 2\int_0^t p_{21}\Big(\int_0^t p_{12}\,dt\Big)^2 dt + 4\int_0^t p_{12} \int_0^t p_{12} \int_0^t p_{21}\,dt\,dt\,dt > 0$$

Неравенство $S_n > 0$, таким образом, доказано. Имеем формулу

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[x_{11}^{(2n)}(\omega) + x_{22}^{(2n)}(\omega)\right] \tag{2.9}$$

Полагая в неравенстве (2.8) $2n+1$ вместо n, получим неравенство

$$x_{11}^{(4n+2)} + x_{22}^{(4n+2)} < \frac{1}{4n+2} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt \, [x_{11}^{(4n)} + x_{22}^{(4n)}]$$

Подставляя эти неравенства в формулу (2.9), получим (2.10)

$$A > 1 - \frac{1}{2} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n+2} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt\right) [x_{11}^{(4n)} + x_{22}^{(4n)}]$$

Подставляя, с другой стороны, $2n$ вместо n в неравенство (2.8), получим

$$x_{11}^{(4n)} + x_{22}^{(4n)} < \frac{1}{4n} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt \, [x_{11}^{(4n-2)} + x_{22}^{(4n-2)}] \qquad (2.11)$$

Подставляя эти неравенства в формулу (2.9), получим

$$A < 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt\right) [x_{11}^{(4n-2)} + x_{22}^{(4n-2)}] \qquad (2.12)$$

Если теперь на коэффициенты p_{12} и p_{21} наложить еще условие,

$$1 - \frac{1}{4} \int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{12}\, dt \geqslant 0$$

то из (2.10) и (2.12) получаем, что $-1 < A < 1$.

Последнее же является условием того, что характеристическое уравнение, соответствующее системе (2.1) и периоду ω, имеет мнимые корни с модулем, равным 1.

Таким образом, приходим к теореме: если в системе уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{12} x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -p_{21} x_1$$

коэффициенты p_{12} и p_{21} — непрерывные ограниченные вещественные периодические вещественного периода ω функции t — могут принимать только положительные или нулевые значения (не будучи равны нулю тождественно) и при этом

$$\int_0^\omega p_{12}\, dt \int_0^\omega p_{21}\, dt \leqslant 4$$

то корни характеристического уравнения, соответствующего данной системе, всегда будут мнимыми с модулем, равным единице.

Случай, рассмотренный Ляпуновым, получится из изложенного при $p_{12} = 1$.

Примечание. Замечание Еругина [3] относительно исследования корней характеристического уравнения, не охватываемых теоремами Ляпунова, легко может быть распространено на случай системы уравнений (2.1).

Поступила 12 IX 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. М.—Л. 1935.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
3. Еругин Н. П. Обобщение одной теоремы Ляпунова. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.