Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ УСТОЙЧИВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Н. Г. Четаев
(Москва)

Вопрос о выборе параметров устойчивой механической системы имеет прикладное значение, поэтому любопытно выяснить некоторые функции, экстремум которых может определять в известном смысле оптимальные значения параметров.

Чтобы иметь сравнимые между собой данные, ограничимся рассмотрением различных состояний одной и той же механической системы, описываемой определенными переменными.

Пусть уравнения возмущенного движения представляют систему линейных уравнений с постоянными и зависящими от некоторых параметров коэффициентами p_{sr}

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_r p_{sr} x_r \qquad (s,\ r = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

Будем предполагать, что невозмущенное движение системы при рассматриваемых значениях параметров асимптотически устойчиво.

Определенно-положительную функцию Ляпунова определим уравнением [1]

$$\sum_{s,\ r} \frac{\partial V}{\partial x_s} p_{sr} x_r = -(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2) \tag{2}$$

правая часть которого представляет определенно-отрицательную квадратичную форму, не зависящую от численных значений параметров системы. Пусть

$$V = \frac{1}{2} \sum a_{sr} x_s x_r \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

Экстремум функции V на сфере $x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = c$ (c — положительная постоянная) определяется по методу множителей Лагранжа рассмотрением функции

$$V - \lambda\,(x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 - c)$$

Отсюда

$$\sum_r (a_{sr} - 2\lambda\delta_{sr})\, x_r = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

где δ_{sr} обозначает (символ Кронекера) — нуль, когда указатели s и r различны, и единица, когда указатели равны $s = r$.

Следовательно, множитель Лагранжа λ должен быть корнем векового уравнения

$$\| a_{sr} - 2\lambda\delta_{sr} \| = 0$$

Так как V представляет определенно-положительную функцию, то все корни λ_s этого уравнения будут положительными; пусть $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Умножая (3) соответственно на x_s и складывая, будем иметь, что экстремальные значения функции V^* на сфере $x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = c$ удовлетворяют равенствам

$$V^* = \lambda c$$

Отсюда значения функции V на сфере $x_1^2+\cdots+x_n^2=c$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_1(x_1^2+\cdots+x_n^2)\leqslant V\leqslant\lambda_n(x_1^2+\cdots+x_n^2) \tag{4}$$

Отсюда в силу уравнения (2) и дифференциальных уравнений возмущенного движения (1) имеем

$$-\lambda_1\frac{dV}{dt}\leqslant V\leqslant-\lambda_n\frac{dV}{dt}$$

или

$$V_0e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\leqslant V\leqslant V_0e^{-\frac{t}{\lambda_n}} \tag{5}$$

Мы должны заключить, что верхняя граница возможных значений V будет меньше для той системы, для которой λ_n есть минимум, если начальные значения V_0 одинаковы.

Если же начальные значения переменных x_s лежат на сфере $x_1^2+\cdots+x_n^2=A$, то из неравенства (4)

$$\lambda_1A\leqslant V_0\leqslant\lambda_nA$$

и неравенства (5) можем установить

$$A\lambda_1e^{-\frac{t}{\lambda_1}}\leqslant V\leqslant A\lambda_ne^{-\frac{t}{\lambda_n}}$$

и, следовательно, верхняя граница значений V будет при указанных начальных значениях переменных меньше для таких значений параметров, для которых λ_n есть минимум.

Точки $(x_1,\ldots,x_n)$, в которых функция Ляпунова имеет значение V согласно (4) находится внутри или на сфере $x_1^2+\cdots+x_n^2=\varepsilon$, где

$$\varepsilon=\frac{V}{\lambda_1}$$

Отсюда квадрат радиуса сферы $x_1^2+\cdots+x_n^2=\varepsilon$, в которую будет входить точка в возмущенном движении при начальном V_0, будет согласно (5) не больше

$$\varepsilon=V_0\frac{1}{\lambda_1}e^{-\frac{t}{\lambda_n}}$$

и, следовательно, одно значение V_0 в фиксированной точке пространства $(x_1,\ldots,x_n)$ не характеризует время переходного процесса.

При начальных возмущениях, лежащих на $x_1^2+\cdots+x_n^2=A$

$$\varepsilon=A\frac{\lambda_n}{\lambda_1}e^{-\frac{t}{\lambda_n}}$$

Отсюда время вхождения точки $(x_1,\ldots,x_n)$ со сферы A в сферу ε не больше

$$\lambda_n\log\frac{A\lambda_n}{\varepsilon\lambda_1}$$

Это время будет минимальным при заданных A и ε, если параметры системы будут выбраны согласно условию

$$\lambda_n\log\frac{A\lambda_n}{\varepsilon\lambda_1}\quad\text{есть минимум}$$

зависящему от крайних λ_1, λ_n корней векового уравнения.

Поступила 23 III 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946. § 35.