Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. М. Смирнов
(Минск)

В заметке [1] Н. П. Еругин дает замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи. Применяя метод Н. П. Еругина, решим несколько краевых задач для уравнения теплопроводности.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$u_{x=0}=0 \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}=P=\text{const} \qquad (t>0) \tag{1.3}$$

и начальном условии

$$u_{t=0}=0 \qquad (0<x<l) \tag{1.4}$$

Как известно, решение такой задачи можно получить в виде

$$u=Px-\frac{8Pl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2\pi+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{1.5}$$

Найдем другой вид решения. Легко убедиться непосредственной проверкой, что решением уравнения (1.1) является функция

$$u=\frac{P}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin x\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{-i\tau}\cos l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i}-\frac{\sin x\sqrt{i\tau}}{\sqrt{i\tau}\cos l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}\right]d\tau \tag{1.6}$$

Это решение удовлетворяет условию (1.2), а также и условию (1.3), так как

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}=\frac{2P}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin t\tau}{\tau}\,d\tau=P \tag{1.7}$$

При $t=0$ имеем

$$u=\frac{P}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin x\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{-i\tau}\cos l\sqrt{-i\tau}}-\frac{\sin x\sqrt{i\tau}}{\sqrt{i\tau}\cos l\sqrt{i\tau}}\right]d\tau=\psi(x) \tag{1.8}$$

Ряд

$$u^*=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{1.9}$$

с произвольными постоянными c_n формально удовлетворяет уравнению (1.1).

Определим постоянные c_n так, чтобы

$$[u^*(x,t)]_{t=0} = \psi(x) \tag{1.10}$$

Очевидно, для c_n будем иметь

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx = -(-1)^n\frac{8Pl}{(2n+1)^2\pi^2} \tag{1.11}$$

Подставив значения c_n в ряд (1.9), имеем

$$u^*(x,t) = -\frac{8Pl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{1.12}$$

Таким образом, мы получили решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.10) и условию

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)_{x=l} = 0 \tag{1.13}$$

Разность решений (1.6) и (1.12) дает решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3) и (1.4):

$$u = \frac{P}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin x\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{-i\tau}\cos l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i} - \frac{\sin x\sqrt{i\tau}}{\sqrt{i\tau}\cos l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}\right]d\tau +$$

$$+\frac{8Pl}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{1.14}$$

Функция

$$f(x) = \frac{\pi^2}{16\,l}(x^2 - l^2)$$

разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям

$$y_n = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

краевой задачи

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y(l) = 0$$

Имеем

$$\frac{\pi^2}{16\,l}(x^2 - l^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{\pi(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Дифференцируя по x, получим

$$\frac{\pi^2 x}{8l} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \tag{1.15}$$

В силу начального условия (1.4) из (1.14), принимая во внимание (1.15), получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin x\sqrt{i\tau}}{\sqrt{i\tau}\cos l\sqrt{i\tau}} - \frac{\sin x\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{-i\tau}\cos l\sqrt{-i\tau}}\right]d\tau = x \tag{1.16}$$

Заметим, что функция

$$w = Px \tag{1.17}$$

есть решение уравнения (1.1), удовлетворяющая условиям (1.2) и (1.3). Полусумма решений (1.6) и (1.17) есть также решение уравнения (1.1):

$$u(x, t) = \frac{Px}{2} + \frac{P}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin x\sqrt{-i\tau}}{\sqrt{-i\tau}\cos l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i} - \frac{\sin x\sqrt{i\tau}}{\sqrt{i\tau}\cos l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}\right]d\tau \tag{1.18}$$

Это решение удовлетворяет условиям (1.2), (1.3) и (1.4) в силу (1.7) и (1.16). Как и в заметке Н. П. Еругина [1], в решении (1.18) можно выделить вещественную часть.

2. Рассмотрим теперь уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

при граничных условиях

$$u_{x=0} = Q = \text{const}, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0 \qquad (t > 0) \tag{2.2}$$

и начальном условии

$$u_{t=0} = 0 \qquad (0 < x < l) \tag{2.3}$$

Легко проверить, что функция

$$u = \frac{Q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\cos(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\cos l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i} - \frac{\cos(x-l)\sqrt{i\tau}}{\cos l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}\right]d\tau \tag{2.4}$$

удовлетворяет уравнению (2.1), а также условиям (2.2).

При $t = 0$ имеем

$$u = \frac{Q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\cos(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\cos l\sqrt{-i\tau}} - \frac{\cos(x-l)\sqrt{i\tau}}{\cos l\sqrt{i\tau}}\right]d\tau = \varphi(x) \tag{2.5}$$

Ряд

$$u^* = \sum_{n=0}^\infty c_n \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{2.6}$$

формально удовлетворяет уравнению (2.1).

Определим постоянные c_n так, чтобы

$$[u^*(x, t)]_{t=0} = \varphi(x) \tag{2.7}$$

Очевидно, для c_n будем иметь

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx = -\frac{4Q}{(2n+1)\pi} \tag{2.8}$$

Подставляя c_n в ряд (2.6), получим

$$u^*(x, t) = -\frac{4Q}{\pi}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \tag{2.9}$$

Решение (2.9) удовлетворяет начальному (2.7), а также краевым условиям

$$[u^*(x, t)]_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)_{x=l} = 0$$

Разность решений (2.4) и (2.9) дает решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2) и (2.3):

$$u = \frac{Q}{\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\cos(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\cos l\sqrt{-i\tau}}\,e^{t\tau i} - \frac{\cos(x-l)\sqrt{i\tau}}{\cos l\sqrt{i\tau}}\,e^{-t\tau i}\right]d\tau +$$

$$+\frac{4Q}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\exp\left(-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t\right) \qquad (2.10)$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} = \frac{\pi}{4} \qquad (0 < x < l)$$

в силу (2.3) из (2.10) получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\cos(x-l)\sqrt{i\tau}}{\cos l\sqrt{i\tau}} - \frac{\cos(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\cos l\sqrt{-i\tau}}\right]d\tau = 1 \qquad (2.11)$$

Заметим еще, что функция

$$v = Q \qquad (2.12)$$

есть решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям (2.2). Полусумма решений (2.4) и (2.12) дает решение

$$u(x, t) = \frac{Q}{2} + \frac{Q}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{1}{\tau}\left[\frac{\cos(x-l)\sqrt{-i\tau}}{\cos l\sqrt{-i\tau}}\,e^{t\tau i} - \frac{\cos(x-l)\sqrt{i\tau}}{\cos l\sqrt{i\tau}}\,e^{-t\tau i}\right]d\tau \qquad (2.13)$$

Это решение удовлетворяет условиям (2.2) и условию (2.3) в силу (2.11).

Легко видно, как запишется решение уравнения (1.1) в случае, если условие (1.2) заменяется условием

$$u_{x=0} = Q = \text{const} \qquad (t > 0)$$

Для этого достаточно взять сумму решений (1.18) и (2.13).

Поступила 16 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Замкнутое решение параболической граничной неоднородной задачи. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 2.