Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

# К ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОБЫКНОВЕННЫХ И В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ)

Н. П. Еругин
(Ленинград)

**§ 1.** Дана система двух обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1.1}$$

Пусть

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y) \tag{1.2}$$

две независимые функции [1]. Тогда на основании системы (1.1) имеем

$$\frac{du}{dt} = M(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = N(u, v) \tag{1.3}$$

где

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} P + \frac{\partial u}{\partial y} Q, \qquad N = \frac{\partial v}{\partial x} P + \frac{\partial v}{\partial y} Q \tag{1.4}$$

Если [1]

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial v}, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{\partial N}{\partial u} \tag{1.5}$$

то, обозначая, $z = u + iv$, получим

$$\frac{dz}{dt} = M + iN = F(z) = F_1(u, v) + iF_2(u, v) \tag{1.6}$$

где $F(z)$ — аналитическая функция, $F_1(u, v)$ и $F_2(u, v)$ — гармонические функции. Отсюда найдем

$$\int \frac{dz}{F(z)} = \Phi(z) = \Phi(\varphi(x, y) + i\psi(x, y)) = \\ = \Phi_1(u, v) + i\Phi_2(u, v) = t + C_1 + C_2 i \tag{1.7}$$

где $C_1$, $C_2$ — произвольные вещественные постоянные и $\Phi_1(u, v)$, $\Phi_2(u, v)$ — вещественные гармонические функции от $u$ и $v$ и тем самым вещественные функции от $x$ и $y$.

Формула (1.7) доставляет общее решение [2] системы (1.1)

$$\Phi_1(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = t + C_1, \qquad \Phi_2(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = C_2 \tag{1.8}$$

Заметим, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ можно взять и комплексными, при этом, если выполняются условия (1.5), равенства (1.6) и (1.7) сохраняются.

---

[1] В дальнейшем предположение о независимости этих функций можно отбросить.

[2] Это позволит в некоторых случаях обнаружить существование голоморфного в окрестности начала координат интеграла системы (1.1), что важно в вопросах качественной теории дифференциальных уравнений.

Однако в этом последнем случае $z = u + iv$ может оказаться вещественным и в таком случае в равенстве (1.7) следует взять $C_2 = 0$, так как $\Phi(z)$ будет вещественной аналитической функцией. Здесь (1.7) доставит лишь первый интеграл системы (1.1).

Найдем в развернутой форме равенства (1.5), выраженные через производные по $x$ и $y$. Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x}, \qquad \frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \\ &\frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Определяя отсюда $\partial M / \partial u$, $\partial M / \partial v$, $\partial N / \partial u$, $\partial N / \partial v$ и подставляя найденные значения в (1.5), получим

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.11}$$

Подставляя в (1.10) и (1.11) выражения $M$ и $N$ из (1.4), найдем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - \\ &\quad - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) Q + \\ &\qquad + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - \\ &\quad - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) Q + \\ &\qquad + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Из этих равенств получим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left\{ M_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - M_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} \frac{1}{\Delta y} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \left\{ M_1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) - 2M_2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\} \frac{1}{\Delta y} \tag{1.15}$$

где

$$\begin{aligned} M_1 = {} & 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) P - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right) Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) P - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) Q \end{aligned}$$

$$\Delta_y = 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Обозначим еще через $\Delta_x$ определитель из коэффициентов при $\partial P / \partial x$ и $\partial P / \partial y$ в системе (1.12) и (1.13)

$$\Delta_x = 2\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Подставляя значение $M_1$ и $M_2$, запишем (1.14) и (1.15) в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\Delta_x}{\Delta_y}\frac{\partial P}{\partial y} + \Phi_1(u, v)\,P + \Phi_2(u, v)\,Q \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{2}{\Delta_y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\right]\frac{\partial P}{\partial y} +$$
$$+ \Phi_3(u, v)\,P + \Phi_4(u, v)\,Q \tag{1.17}$$

Здесь

$$\Delta_y\Phi_1 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right] -$$
$$- \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\Delta_y\Phi_2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right] -$$
$$- \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$\Delta_y\Phi_3 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right] +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right] - 2\,\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\Delta_y\Phi_4 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right] - 2\,\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

При этом предполагается $\Delta_y \neq 0$. Легко видеть, что

$$\Delta_y = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$\Delta_x = \left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \tag{1.18}$$

$$\Delta = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{1.19}$$

Если

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta_x = \Delta_y = 0$$

то легко показать на основании (1.12) и (1.13), что имеем неинтересный случай $P = P(x)$ и $Q = Q(y)$.

Если

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} =$$

то также

$$\Delta_x = \Delta_y = 0$$

Но тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ зависимые.

Если $\Delta_y = 0$, но $\Delta_x \neq 0$, то мы можем из системы (1.12) и (1.13) найти $\partial P / \partial x$ и $\partial P / \partial y$ и получим систему, аналогичную системе (1.16) и (1.17), соответствующую тому случаю системы (1.16), (1,17), когда $\Delta_x = 0$, т. е. когда в уравнении (1.16) отсутствует $\partial P / \partial y$. Можно, следовательно, предполагать $\Delta_y \neq 0$. Из (1.16), (1.17) легко получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{2\Delta}{\Delta_y}\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} - \frac{\Delta_x}{\Delta_y}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + [\Phi_3 - \Phi_2]\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)Q +$$
$$+ \left(2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta}{\Delta_y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Delta_x}{\Delta_y}\right) - \Phi_1 + \frac{\Delta_x}{\Delta_y}\Phi_4 - 2\frac{\Delta}{\Delta_y}\Phi_2\right]\frac{\partial P}{\partial y} +$$
$$+ \left[\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \Phi_4\Phi_1 - \Phi_2\Phi_3\right]P = 0 \qquad (1.20)$$

Отсюда видим, что система (1.16), (1.17) сводится к одному уравнению второго порядка для $P$, если выполнено условие

$$\frac{\partial \Phi_2(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_4(u, v)}{\partial x} \qquad (1.21)$$

Легко видеть, что это равенство не является тождеством. Можно, поэтому, выбрать функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ так, чтобы условие (1.21) было выполнено или наоборот, — не выполнено.

Если условие (1.21) не выполнено, то, подставляя $Q$ из (1.20) в (1.16), получим уравнение третьего порядка для $P$. Однако в состав решений системы (1.16), (1.17) входят только такие решения $P$ этого уравнения третьего порядка, которые удовлетворяют и другому уравнению третьего порядка, полученному заменой $Q$ в уравнении (1.17) из (1.20).

**§ 2.** Отметим частные случаи системы (1.10), (1.11) или (1.12), (1.13). При $u = x$, $v = y$ легко получим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2.1)$$

Полагая $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$, найдем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\varphi'^2(x)}{\psi'^2(y)}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}P - \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}Q \qquad (2.2)$$

Если $u = \varphi(y)$, $v = \psi(x)$, то имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\psi'^2(x)}{\varphi'^2(y)}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}P - \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)}Q \qquad (2.3)$$

Для уравнений (2.2) и (2.3) условие (1.21) выполнено.

*Пример 1.* Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + e^{4y}, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \quad P = -x^2 + e^{4y}, \quad Q = -x$$

Здесь равенства (2.3) принимают вид:

$$\varphi'^2(y) = \psi'^2(x)\, 4e^{4y}, \quad \varphi''(y)\,\psi'(x)\,x = \varphi'(y)\,[\psi''(x)\,(x^2 - e^{4y}) + 2x\psi'(x)]$$

Отсюда найдем

$$\varphi(y) = e^{2y}, \quad \psi(x) = x$$

Таким образом

$$z = e^{2y} + ix, \quad M = -2xe^{2y}, \quad N = -x^2 + e^{4y}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\,(e^{2y} + ix)}{dt} = -2xe^{2y} + (-x^2 + e^{4y})\,i = F\,(e^{2y} + xi) = F\,(z)$$

Для нахождения $F(z)$ полагаем $y = 0$, $1 + ix = p$. Тогда получим $F(p) = ip^2$. Следовательно

$$\frac{dz}{dt} = iz^2, \quad \text{или} \quad z = -(c + it)^{-1}$$

Подставляя сюда $z = e^{2y} + ix$ и $c = c_1 + ic_2$ и отделяя вещественную и мнимую части справа, получим общее решение

$$e^{2y} = -\frac{C_1}{C_1^2 + (C_2 + t)^2}, \quad x = \frac{C_2 + t}{C_1^2 + (C_2 + t)^2}$$

*Пример 2.* Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + e^{4y}, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad P = x^2 + e^{4y}, \quad Q = x$$

В этом случае согласно (2.3) имеем

$$\varphi'^2(y) = -\psi'^2(x)\, 4e^{4y}, \quad \varphi''(y)\,\psi'(x)\,x = [\psi''(x)\,(x^2 + e^{4y}) + \psi'(x)\,2x]\,\varphi'(y)$$

$$\varphi(y) = e^{2y}, \quad \psi(x) = ix; \quad M = 2xe^{2y}, \quad N = i\,(x^2 + e^{4y}), \quad z = e^{2y} - x$$

$$\frac{dz}{dt} = 2xe^{2y} - (x^2 + e^{4y}) = -(e^{2y} - x)^2 = -z^2$$

$$\frac{1}{z} = t + C, \quad e^{2y} - x = \frac{1}{t + C}$$

Здесь, очевидно, $C$ необходимо брать вещественным и мы, таким образом, имеем только первый интеграл. Пользуясь найденным первым интегралом, легко закончить интегрирование заданной системы.

Для системы

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - \frac{1}{3}e^{2x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}y^3 - ye^{2x}$$

Также найдем

$$\varphi(y) = y, \quad \psi(x) = e^x, \quad z = y + ie^x, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{3}z^3$$

Мы уже отметили ранее, что в равенствах (1.10) и (1.11) можно $u(x, y)$ и $v(x, y)$ считать и зависимыми функциями.

Пусть, например, $u = v = \varphi$. Тогда, как видно из (1.4), $M = N$ и равенство (1.11) есть тождество, а (1.10) принимает вид

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}P + \frac{\partial \varphi}{\partial y}Q \tag{2.4}$$

Отсюда согласно теории линейных уравнений в частных производных

$$M = f(\varphi(x, y)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} P + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Q \tag{2.5}$$

Но тогда из первого равенства системы (1.3) имеем

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dt} = f(\varphi(x, y)), \qquad \int \frac{d\varphi}{f(\varphi)} = t + C$$

Функцию $f(P)$ находим из (2.5).

Таким образом, если $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию (2.4), то мы имеем первый интеграл системы, содержащий переменную $t$.

Если $M = 0$, то, как видно из (2.5), $\varphi(x, y)$ есть первый интеграл системы (1.1), не зависящий от $t$.

*Замечание.* В примере 2

$$\varphi(x, y) = e^{2y} - x, \qquad f(\varphi) = -\varphi^2$$

§ 3. На систему (1.10), (1.11) или (1.12), (1.13) можно смотреть с двух точек зрения.

Можно считать в уравнениях (1.12), (1.13) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданными; тогда система (1.12), (1.13) определяет такую систему (1.1), для которой общий интеграл имеет вид (1.7).

С другой стороны, при заданных функциях $u(x, y)$ и $v(x, y)$ мы имеем такую систему уравнений (1.12), (1.13), для которой общее решение согласно (1.6) и (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial v}{\partial y} F_1(u, v) - \frac{\partial u}{\partial y} F_2(u, v)\right] \\ Q(x, y) &= \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial u}{\partial x} F_2(u, v) - \frac{\partial v}{\partial x} F_1(u, v)\right] \end{aligned} \qquad \left(\Delta = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

где $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ — произвольные сопряженные гармонические функции. Эта система уравнений (1.12), (1.13) может быть эквивалентной одному уравнению второго порядка или нет в зависимости от выбора функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Возможно искать такие функции $u(x, y)$, и $v(x, y)$, через которые согласно формулам (1.12), (1.13) выражаются коэффициенты наперед заданной системы двух линейных уравнений в частных производных (или коэффициенты одного линейного уравнения второго порядка согласно (1.20), где условие (1.21) выполнено). И если такие $u(x, y)$ и $v(x, y)$ найдены, то через эти функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ согласно (3.1) будет дано общее решение такой системы уравнений в частных производных первого порядка при помощи двух произвольных гармонических функций.

Вместе с этим для всякой системы (1.1), где $P$ и $Q$ — сопряженные функции в смысле удовлетворения заданной системе уравнений в частных производных первого порядка, получим общее решение в виде (1.7). В нашей исходной точке зрения задана была пара функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, которая порождала неоднозначно другие две функции через уравнения (1.12), (1.13), при помощи которых общий интеграл системы (1.1), а также и сами функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ выражаются через гармонические функции.

Интересно бы более детально охарактеризовать тот класс линейных дифференциальных уравнений второго порядка, решения которого выражаются через некоторые функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ при помощи гармонических функций, т. е. надо подробнее охарактеризовать тот класс уравнений, который может быть представлен в виде (1.20) при условии (1.21).

Поясним высказанное на примерах.

*Пример 3.* Пусть $u = x$, $v = y^2$. Тогда из (1.12), (1.13) получаем уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial y} + 4y^2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad Q + y\frac{\partial Q}{\partial y} = y\frac{\partial P}{\partial x} \tag{3.2}$$

эквивалентные одному из двух уравнений

$$y^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + 4y^4 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q, \qquad 4y^3 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{3.3}$$

Всякое решение системы (3.2), а следовательно, всякое решение каждого из уравнений (3.3) согласно (3.1) выражается в виде

$$P(x, y) = F_1(x, y^2), \qquad Q = \frac{F_2(x, y^2)}{2y} \tag{3.4}$$

где $F_1$ и $F_2$ — произвольные сопряженные гармонические функции от $x$ и $y^2$.

Правые части системы

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 - ay^4 + d, \qquad \frac{dy}{dt} = axy \tag{3.5}$$

удовлетворяют системе (3.2) при произвольных постоянных $a$ и $d$, и общее решение этой системы легко получаем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{ad}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a}{d}}\,(x + iy^2) = t + C_1 + C_2 i \tag{3.6}$$

или

$$x + iy^2 = \sqrt{\frac{d}{a}}\,\operatorname{tg}[\sqrt{ad}\,(t + C_1 + C_2 i)] \tag{3.7}$$

Всякому решению системы уравнений (3.2) будет соответствовать интеграл вида $\Phi(x + iy^2) = t + C_1 + iC_2$ системы (1.1)

*Пример 4.* Будем искать такие функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, чтобы (1.20) перешло в уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

или, что в данном случае удобнее, чтобы система (1.12), (1.13) перешла в уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.8}$$

В равенстве (1.12), очевидно, необходимо положить

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.9}$$

Исключая отсюда $\partial v / \partial x$, найдем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{3.10}$$

Следовательно, или $u = x + iy$, а тогда в силу первого из уравнений (3.9) и $v = x - iy$, $z = x + y$ или $u = x - iy$, $v = x + iy$, $z = x - y$.

Если возьмем $z = x + y$, то для системы (1.1), если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условиям (3.8), имеем первый интеграл

$$\int \frac{d(x+y)}{F_1(x+y)} = t + C_1, \qquad F_1(x+y) = P(x, y) + Q(x, y)$$

Для $z = x - y$ получим

$$\int \frac{d(x-y)}{F_2(x-y)} = t + C_2, \qquad F_2(x-y) = P(x, y) - Q(x, y)$$

Имеем, очевидно, также

$$P(x, y) = F_1(x+y) + F_2(x-y), \qquad Q(x, y) = F_1(x+y) - F_2(x-y)$$

где $F_1$ и $F_2$ — произвольные функции, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — решения системы (3.8) [1]

Таким образом легко, например, получим решение системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + Ax^2 + 2Bxy + Ay^2 = P \\ \frac{dy}{dt} &= bx + ay + Bx^2 + 2Axy + By^2 = Q \end{aligned} \tag{3.11}$$

так как здесь $P$ и $Q$ удовлетворяют условиям (3.8). Действительно, из (3.11) имеем

$$\frac{d(x+y)}{dt} = (a+b)(x+y) + (A+B)(x+y)^2$$

$$\frac{d(x-y)}{dt} = (a-b)(x-y) + (A-B)(x-y)^2$$

откуда и получаем два интеграла.

**§ 4.** Предположим, дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q_1(x, y), \tag{4.1}$$

Подставим вместо $P$ и $Q$ соответственно $P_1$ и $Q_1$ в уравнения (1.12), (1.13), и полученные уравнения для $u$ и $v$ запишем в виде

$$A(u, v, P_1, Q_1) = 0, \qquad B(u, v, P_1, Q_1) = 0 \tag{4.2}$$

Пусть $u = u_1$, $v = v_1$ суть решение этой системы. Подставим эти значения $u$ и $v$ в уравнения (1.12), (1.13), получим линейные уравнения относительно $P$ и $Q$

$$A(u_1, v_1, P, Q) = 0, \qquad B(u_1, v_1, P, Q) = 0 \tag{4.3}$$

[1] Уравнениям (1.12), (1.13) при условии (3.8) удовлетворяют $u = x + y$, $v = x + y$ или $u = x - y$, $v = x - y$. Но эти функции $u$ и $v$ удовлетворяют уравнениям (1.12), (1.13) и при

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

поэтому при $P$ и $Q$, удовлетворяющих только этому последнему условию, уже имеем полученные интегралы.

Предположим найдено решение этой системы

$$P = P_2(x, y), \qquad Q = Q_2(x, y) \tag{4.4}$$

Тогда решением системы (4.3) будет и $P = P_1 + P_2$, $Q = Q_1 + Q_2$ и, следовательно, легко найдем общее решение системы

$$\frac{dx}{dt} = P_1 + P_2, \qquad \frac{dy}{dt} = Q_1 + Q_2$$

в виде (1.7), где будут $u = u_1$, $v = v_1$.

*Пример 5.* Возьмем систему

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = x \qquad (P = 0,\ Q = x) \tag{4.5}$$

Тогда получим систему (4.2) в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)x + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0\end{gathered} \tag{4.6}$$

Решением этой системы будет

$$u_1 = \frac{ay}{x} + \varphi(x), \qquad v_1 = \psi(x) \tag{4.7}$$

при произвольных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и постоянной $a$. Подставляя найденные значения $u_1$ и $v_1$ в уравнения (1.12) и (1.13), найдем (полагая $a = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial y} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right)P + \frac{\partial P}{\partial x} - 2\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \left[x\varphi'(x)\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} - \frac{2y}{x^2} - \frac{y}{x}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} - x\varphi''(x)\right]P - \\ &\quad - \left[\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)^2 + x^2\psi'^2(x)\right]\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{x}Q\end{aligned} \tag{4.8}$$

Исключая из этих уравнений $Q$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &+ \left[\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)^2 + x^2\psi'^2(x)\right]\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - 2\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = \\ &= \frac{\psi''^2(x) - \psi'''(x)\psi'(x)}{\psi'^2(x)}P - \frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\frac{\partial P}{\partial x} + \\ &+ \left[2\varphi'(x) + x\varphi'(x)\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} - \frac{y}{x}\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)} + x\varphi''(x)\right]\frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Возьмем частный случай решения (4.7)

$$u_1 = \frac{y}{x} + \varphi(x), \qquad v_1 = ax + b \qquad (\psi(x) = ax + b) \tag{4.10}$$

Тогда уравнения (4.8) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= -\left(\frac{2y}{x^2} + x\varphi''(x)\right)P - \left[\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)^2 + a^2x^2\right]\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{x}Q \\ \frac{dQ}{dy} &= \frac{1}{x}P + \frac{\partial P}{\partial x} - 2\left(x\varphi'(x) - \frac{y}{x}\right)\frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned} \tag{4.11}$$

и (4.9) в уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\left[\left(x\varphi'(x)-\frac{y}{x}\right)^2+a^2x^2\right]\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-2\left(x\varphi'(x)-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-$$
$$-\left[2\varphi'(x)+x\varphi''(x)\right]\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{4.12}$$

Общее решение этого уравнения легко находится в виде[2]

$$P=\Phi_1(y/x+\varphi(x)-aix)+\Phi_2(y/x+\varphi(x)+aix) \tag{4.13}$$

где $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — произвольные функции. Возьмем

$$P=\Phi(y/x+\varphi(x)+aix) \tag{4.14}$$

Из (4.11) найдем соответствующее сопряженное (общее) значение[1] $Q$

$$Q=\left(aix-x\varphi'(x)+\frac{y}{x}\right)\Phi\left(\frac{y}{x}+\varphi(x)+aix\right)+\alpha x \tag{4.15}$$

где $\alpha$ — произвольное постоянное[2].

Таким образом, мы получили следующий результат для системы уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\Phi\left(\frac{y}{x}+\varphi(x)+aix\right)\\ \frac{dy}{dt}&=\left(aix-x\varphi'(x)+\frac{y}{x}\right)\Phi\left(\frac{y}{x}+\varphi(x)+aix\right)+\alpha x+x\end{aligned} \tag{4.16}$$

При произвольных функциях $\Phi$, $\varphi$ и произвольных постоянных $a$ и $\alpha$ интеграл этой системы легко находится в виде

$$F(y/x+\varphi(x)+i(ax+b))=t+C \tag{4.17}$$

где $F$ — аналитическая функция.

Правые части уравнений (4.16) имеют комплексные значения, но можно брать вещественную часть правых частей уравнений (4.16) или только мнимую часть (или их сумму) и мы снова получим интеграл вида (4.17), где $F$ найдется одной квадратурой при всяком конкретном задании выражений (4.14) и (4.15).

В качестве примера возьмем частный случай

$$u=y/x,\qquad v=ax\qquad(\varphi(x)=0)$$
$$P=\frac{x}{y+aix^2},\qquad Q=1+\alpha x,\qquad\left(\Phi(z)=\frac{1}{z}\right)$$

считая $a$ и $\alpha$ вещественными числами. В качестве $P$ и $Q$ можно, следовательно, взять и (сумма вещественной и мнимой части $P$ и $Q$)

$$P=\frac{xy-ax^3}{y^2+a^2x^4},\qquad Q=1+\alpha x$$

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{xy-ax^3}{y^2+a^2x^4},\qquad\frac{dy}{dt}=(1+\alpha)x+1 \tag{4.18}$$

Полагая $z=y/x+aix$, получим в силу уравнений (4.18)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1+(1+\alpha)x}{x}-\frac{y(y-ax^3)}{x(y^2+a^2x^4)}+\frac{ai(xy-ax^3)}{y^2+a^2x^4}=F\left(\frac{y}{x}+aix\right)$$

---

[1] Легко, конечно, также найти все сопряженные значения $Q$ и для $P$, данного формулой (4.13).

[2] Вещественные части и мнимые выражения (4.14), (4.15) также, конечно, удовлетворяют системе (4.11).

Чтобы найти $F(P)$, полагаем $y=0$ и $aix=P$. Легко находим

$$F(P)=\frac{(1+\alpha)P+a(1+i)}{P}$$

Следовательно, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt}=\frac{(1+\alpha)z+a(1+i)}{z}$$

Отсюда легко получаем общее решение системы (4.18) в виде

$$\frac{y}{x}+aix-\frac{a(1+i)}{1+\alpha}\ln\left[(1+\alpha)\left(\frac{y}{x}+aix\right)+a(1+i)\right]=t+C_1+C_2i$$

Приравнивая здесь вещественные и мнимые части, получим общее решение в обычном виде. Этим мы легко исследуем качественную картину, как для системы (4.18), так и для системы

$$\frac{dx}{dt}=xy-ax^3, \qquad \frac{dy}{dt}=[1+(1+\alpha)x][y^2+a^2x^4]$$

*Пример 6.* Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_1 x, \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda_2 x \qquad (P=\lambda_1 x,\ Q=\lambda_2 y) \tag{4.19}$$

Тогда уравнения (4.2) получим в виде

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda_1 x+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\lambda_1+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda_2 y-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\lambda_2=0 \tag{4.20}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_1 x+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_1+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_2 y-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\lambda_2=0 \tag{4.21}$$

Предположим $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Тогда уравнениям (4.20), (4.21) удовлетворяют функции $u=\alpha x+\beta y$, $v=\gamma x+\delta y$ при произвольных постоянных $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$.

Подставляя эти значения $u$ и $v$ в уравнения (1.12), (1.13), получим

$$(\alpha\delta+\gamma\beta)\frac{\partial P}{\partial x}-2\alpha\gamma\frac{\partial P}{\partial y}+2\beta\delta\frac{\partial Q}{\partial x}-(\beta\gamma+\alpha\delta)\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \tag{4.22}$$

$$(\alpha\beta-\gamma\delta)\frac{\partial P}{\partial x}-(\alpha^2-\gamma^2)\frac{\partial P}{\partial y}+(\beta^2-\delta^2)\frac{\partial Q}{\partial x}-(\alpha\beta-\gamma\delta)\frac{\partial Q}{\partial y}=0$$

Предполагая

$$(\alpha^2-\gamma^2)(\alpha\delta+\gamma\beta)-2\alpha\gamma(\alpha\beta-\gamma\delta)\neq 0 \tag{4.23}$$

из (4.22) найдем

$$\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{2\beta\delta(\alpha^2-\gamma^2)-2\alpha\gamma(\beta^2-\delta^2)}{(\alpha\delta+\gamma\beta)(\alpha^2-\gamma^2)-2\alpha\gamma(\alpha\beta-\gamma\delta)}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2\beta\delta(\alpha\beta-\gamma\delta)-(\beta^2-\delta^2)(\alpha\delta+\gamma\beta)}{(\alpha^2-\gamma^2)(\alpha\delta+\gamma\beta)-2\alpha\gamma(\alpha\beta-\gamma\delta)}\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.24}$$

Таким образом, если дана система

$$\frac{dx}{dt}=\lambda x+P(x,y), \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda y+Q(x,y) \tag{4.25}$$

и $P(x,y)$, $Q(x,y)$ удовлетворяют уравнениям (4.22) при каких-нибудь постоянных $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, то имеем интеграл вида

$$\Phi(\alpha x+\beta y+i(\gamma x+\delta y))=t+C_1+C_2 i \tag{4.26}$$

При $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ равенство (4.26) дает общий интеграл и при $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ лишь первый интеграл.

Пусть $\gamma = \alpha$, $\delta = n\alpha$, $\beta = m\alpha$ и $(m - n) \neq 0$. Тогда уравнения (4.24) имеют вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -(m + n)\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{m^2 + n^2}{2}\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4.27}$$

Общее решение этой системы легко находим в виде

$$Q = \Phi_1[2x + (m + n + i(m - n)y)] + \Phi_2[2x + (m + n - i(m - n))y] \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} P = \tfrac{1}{2}[i(m - n) - (m + n)]\Phi_1[2x + (m + n + i(m - n))y] - \\ - \tfrac{1}{2}[i(m - n) + (m + n)]\Phi_2[2x + (m + n - i(m - n))y] \end{aligned} \tag{4.29}$$

где $\Phi_1$ и $\Phi_2$ произвольные функции. Возьмем

$$\begin{aligned} Q = [2x + (m + n + i(m - n))y]^2 = 4x^2 + 4(m + n)xy + 4mny^2 + \\ + 2i(m - n)y(2x + (m + n)y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = -2(m + n)x^2 - 4(m^2 + n^2)xy - (m + n)(m^2 + n^2)y^2 + \\ + 2i[2(m - n)x^2 - 2(m - n)(mn + m^2 + n^2)y^2] \end{aligned}$$

Пусть $n = 0$, $m = 1$; тогда, беря вещественные части $Q$ и $P$, построим систему

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x - 2x^2 - 4xy - y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y + 4x^2 + 4xy$$

Полагая $\alpha = 1$, получим согласно предыдущему

$$u = x + y, \quad v = x, \quad z = x + y + xi, \quad \frac{dz}{dt} = \lambda z - z^2(1 + i)$$

Отсюда получаем общий интеграл

$$\ln[x + y + xi][\lambda - (1 + i)(x + y + xi)] = \lambda t + C_1 + C_2 i$$

Рассмотрим случай $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$. Теперь (4.23) не выполнено, $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$; второе из уравнений (4.22) есть тождество и первое переходит в уравнение

$$\frac{\partial(P + Q)}{\partial x} = \frac{\partial(P + Q)}{\partial y} \tag{4.30}$$

Следовательно, для системы (4.25), когда выполнено условие (4.30), легко получаем интеграл вида $F(x + y) = t + O$.

Заметим еще, что $P$ и $Q$ в виде полиномов можно искать по методу неопределенных коэффициентов на основании, например, системы (4.22). Все эти рассуждения легко переносятся и на системы $n$ уравнений[3].

Напомним[1] в заключение, что если в системе (1.1) правые части содержат $t$, но решение системы (1.12), (1.13) $u(x, y)$, $v(x, y)$ найдем не зависящим от $t$, то снова будем иметь для системы (1.1) одно уравнение $dz/dt = F(z, t)$. Например, в системе (3.5) можно постоянные $a$ и $d$ заменить через произвольные функции $a(t)$, $d(t)$.

Поступила 26 II 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Замечание об интегрировании системы двух уравнений в конечном виде. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 3.
2. Еругин Н. П. Функционально-инвариантные решения уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Ученые записки ЛГУ. Серия. мат. наук. 1949. Вып. 16.
3. Сливинский. Об одном применении обобщенной теории функций комплексного переменного. ДАН, 1950. Т. XXIV. № 5.