Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ПОВЕДЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ОСОБУЮ ТОЧКУ ВИДА ЦЕНТР

Н. А. Сахарников

(Ленинград)

Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1}$$

правые части которой суть целые функции переменных x и y.

Особыми точками первого рода рассматривеемой системы будем называть только особые точки вида центр, фокус, узел и седло.

Теорема. Если A есть особая точка вида центр для системы (1), не имеющей на конечном расстоянии особых точек не первого рода, то возможны только следующие три случая:

1) через каждую точку фазовой плоскости xy проходит единственная замкнутая траектория, окружающая A;

2) не все траектории — замкнутые, окружающие A; тогда граничная траектория для односвязной области замкнутых траекторий, окружающих A,

а) либо проходит через бесконечно удаленную точку,

б) либо граничная траектория проходит через особую точку вида «седло» и не проходит через особые точки другого вида, находящиеся на конечном расстоянии.

Под замкнутыми траекториями здесь подрузумеваются те, которые соответствуют периодическим решениям; поэтому замкнутые траектории не содержат точек равновесия.

Граничная траектория для односвязной области замкнутых траекторий может состоять из нескольких ветвей.

Доказательство. Пусть R есть область устойчивости в смысле Пуассона, содержащая точку A, т. е. все односвязное множество точек фазовой плоскости, через каждую из которых, кроме A, проходит единственная замкнутая траектория, окружающая A.

Из определения области R следует, что

1) ни одна из ее точек, за исключением A, не является особой;
2) если какая-либо траектория системы имеет одну общую точку с областью R, то все точки этой траектории принадлежат R. Следовательно, если какая-либо траектория имеет точку, не принадлежащую области R, то ни одна точка этой траектории не принадлежит R.

Пусть L есть граница области R. Граница области R по теореме Н. П. Еругина [1] состоит из траекторий. Граничная траектория L не существует, если область R совпадает со всей фазовой плоскостью. В остальных случаях L существует. Граничная траектория L в некоторых случаях может проходить через бесконечно удаленную точку, что показано ниже. Рассмотрим все три возможных случая.

1°. Область R совпадает со всей фазовой плоскостью.

2°. Не все точки фазовой плоскости принадлежат области R, граничная траектория L проходит через бесконечно удаленную точку.

3°. Не все точки фазовой плоскости принадлежат области R; граничная траектория L не проходит через бесконечно удаленную точку.

В случае 1°. Из определения области R следует, что через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная замкнутая траектория, окружающая A. Разумеется, в этом случае точка A является единственной точкой равновесия.

В случае 2°. Из определения области R следует, что не все траектории — замкнутые, окружающие точку A.

Все траектории, проходящие через точки, не принадлежащие R, не будут замкнутыми, окружающими A. Действительно, в случае 2° имеются точки фазовой плоскости, не принадлежащие области R. Через каждую из этих точек проходит единственная траектория. Каждая из этих траекторий не имеет общих точек с областью R, потому что она имеет по крайней мере одну точку, не принадлежащую R. Пусть T есть одна из этих траекторий.

Предположим, что T является замкнутой траекторией, окружающей точку A, и придем к противоречию, доказывающему факт незамкнутости вокруг A всех траекторий, проходящих через точки, не принадлежащие R.

Траектория T не может быть граничной траекторией для области R или ветвью этой граничной траектории. Для доказательства этого утверждения предположим противное и рассмотрим ту ветвь граничной траектории L, которая проходит через бесконечно удаленную точку. Эта ветвь, очевидно, не имеет общих точек с траекторией T, потому что на T нет точек равновесия. Эта ветвь L не может быть расположена внутри T, потому что L проходит через бесконечно удаленную точку. Следовательно, эта ветвь L расположена вне T; но тогда она не может входить в состав граничной траектории для области R. Следовательно, траектория T не является граничной траекторией L или ее ветвью.

Пусть T не есть граничная траектория или ее ветвь. Ни одна из точек T не может принадлежать границе L в силу отсутствия на T точки равновесия. Поэтому T целиком расположена вне R. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, покажем, что не существует ветви граничной траектории, проходящей через бесконечно удаленную точку (т. е. что такая ветвь не может быть ни вне T, ни внутри T).

Следовательно, все траектории, проходящие через точки, не принадлежащие области R, не будут замкнутыми, окружающими A.

В случае 2° могут быть на конечном расстоянии особые точки системы, отличные от A.

В случае 3°. Рассматриваемая система имеет особую точку вида «седло», причем граничная траектория L проходит через эту особую точку и не проходит через особые точки другого вида, если они имеются,

Первую часть доказательства утверждения, соответствующего случаю 3°, проведем при предположении, что рассматриваемая система или не имеет особых точек, отличных от A, или, если такие точки имеются, то граница области L не содержит ни одной из них.

Тогда граничная траектория L необходимо является замкнутой траекторией, окружающей точку A. Действительно, в рассматриваемом случае 3° траектория L ограничена. Следовательно, будет ограничено множество ω предельных точек траектории L. Рассмотрим все два возможных случая.

1) Множество ω предельных точек не содержит точек равновесия.

2) Множество ω предельных точек содержит точку равновесия.

В первом из этих случаев согласно теореме Бендиксона [2] могут представиться только две возможности:

(1а) L — замкнутая траектория; (1б) L — спираль, неограниченно приближающаяся к замкнутой траектории.

Предположим, что имеет место случай (1а). Тогда замкнутая траектория L окружает точку A. Для доказательства этого последнего утверждения предположим, что L не окружает A. Тогда обозначим через $r = \rho(A, L)$ расстояние между точкой A и множеством точек траектории L. Это расстояние положительно.

Рассмотрим ε-окрестность траектории L (приняв $\varepsilon < r$) и какую-либо замкнутую траекторию L_1, принадлежащую R и расположенную всеми своими точками в ε-окрестности L.

Такая траектория L_1 существует потому, что: 1) в любой окрестности каждой точки траектории L содержатся точки множества R, через каждую из которых проходит замкнутая траектория, и 2) выполнены условия теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

Траектория L_1 окружает точку A, потому что L_1 принадлежит R. Траектория L_1 не окружает точку A, потому что она принадлежит ε-окрестности L. Из этого противоречия следует, что траектория L окружает точку A.

Предположим, что имеет место случай (1б). Тогда рассмотрим ε-окрестность предельного цикла, к которому неограниченно приближается траектория L, а также ту часть L, которая расположена в ε-окрестности предельного цикла. Проведем нормаль к предельному циклу и зафиксируем на ней две точки M_1 и M_2 пересечения нормали с упомянутой частью спирали L.

Все траектории пересекают отрезок нормали M_1M_2 в одном направлении, если ε достаточно мало. На нормали M_1M_2 найдется точка, через которую проходит замкнутая траектория, потому что точки M_1 и M_2 входят в состав границы области R.

Но замкнутой эта траектория быть не может потому, что для замкнутости она обязана пересечь дугу M_1M_2 спирали L, что невозможно. Потому невозможен случай (1б).

Предположим, что имеет место случай (2), когда множество ω предельных точек траектории L содержит точку равновесия C. Тогда C является граничной точкой области R, потому что:

1) точка C не принадлежит области R, так как R содержит только одну точку равновесия A,

2) в любой окростности C содержатся точки области R, потому что в этой окрестности есть точки траектории L.

Но точка равновесия C не может быть граничной точкой области R, так как по предположению граница области R не содержит точек равновесия. Поэтому невозможен случай 2).

Следовательно, граничная траектория L есть замкнутая траектория, окружающая A.

Если граничная кривая L есть замкнутая траектория, то, очевидно, легко доказать, что вне области R, в ε-окрестности граничного цикла L, все траектории системы являются спиралями, асимптотически приближающимися к граничному циклу L.

Через любую точку траектории L можно провести дугу без контакта, пересекающую L, а также те замкнутые траектории, которые достаточно близки к L, и продолжающуюся по другую сторону граничного цикла вне области R.

Определим положение точки на этой дуге при помощи некоторого параметра s, который будет, например, равен нулю на граничном цикле L, отрицателен в области R и положителен вне этой области.

Каждая точка дуги без контакта имеет так называемую последующую, потому что внутри R траектории замкнуты, а вне R в достаточной близости к граничном циклу являются спиралями, асимптотически приближающимися к L.

Пусть $S = f(s)$ есть закон последования. При отрицательных s траектории замкнуты и поэтому $f(s) = s$. При положительных s траектории уже не замкнуты и $f(s) > s$ или $f(s) < s$.

Следовательно, функция $f(s)$ не может быть голоморфна в точке $s = 0$. Это утверждение находится в противоречии с известной [3] теоремой о голоморфности функции $f(s)$.

Следовательно, сформулированное выше предложение, что система не имеет особых точек, отличных от A, или что кривая L не проходит ни через одну из имеющихся особых точек, не соответствует действительности. Следовательно, в фазовой плоскости имеются особые точки системы, отличные от A, и граничная траектория L проходит по крайней мере через одну из них. Заметим, что это последнее утверждение имеется у Пуанкаре [4], но доказательство Пуанкаре не является убедительным.

Докажем теперь вторую часть утверждения, соответствующего случаю 3°, что особая точка, через которую проходит граничная траектория L, может быть только седлом.

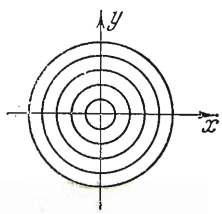
Действительно, на граничной траектории L может быть несколько особых точек. Обозначим через B одну из этих точек, а через G ту часть области R, которая содержится внутри круга достаточно малого радиуса с центром в точке B. Пусть M есть любая точка области G. Точка B не есть центр, потому что к ней примыкает граничная траектория L.

Точка B не есть фокус или узел, потому что в противном случае через точку M должны пройти две траектории, из которых одна окружает точку A, а другая примыкает к точке B.

По условию теоремы особыми точками системы могут быть лишь особые точки первого рода. Поэтому в случае 3° граничная траектория L проходит через особую точку вида «седло» и не может проходить через особые точки иного вида. Теорема доказана.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x$$



Фиг. 1

Система допускает интеграл $x^2 + y^2$. Поэтому единственная особая точка $x = y = 0$ является центром. Через каждую точку фазовой плоскости проходит единственная замкнутая траектория — окружность с центром в начале координат. Имеет место явление, соответствующее случаю 1° (фиг. 1).

Пример 2.

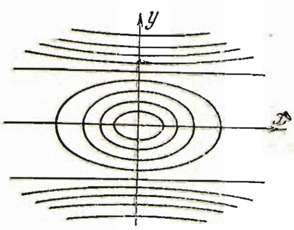
$$\frac{dx}{dt} = y + x^2 y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + xy^2$$

Система допускает интеграл

$$1 + x^2 = c\,(1 - y^2)$$

или

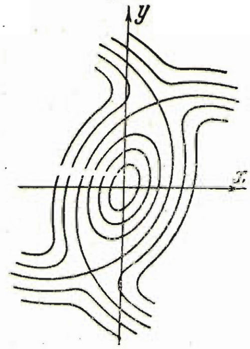
$$\frac{x^2}{c-1} + \frac{y^2}{1-c^{-1}} = 1$$



Фиг. 2

Поэтому единственная особая точка $x = y = 0$ является центром. Не все траектории является замкнутыми кривыми, окружающими центр. Граница области замкнутых траекторий состоит из пары прямых $y = \pm 1$. Имеет место явление, соответствующее случаю 2° (фиг. 2).

Пример 3. В качестве последнего примера рассмотрим систему



Фиг. 3

$$\frac{dx}{dt} = y + x^3 - 3\,xy^2 - y^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - x^3 - 3\,x^2y + y^3$$

Особая точка $x = y = 0$ является центром, потому что система допускает интеграл

$$2\,(x^2 + y^2) + x^4 + 4\,x^3y - 4\,xy^3 - y^4$$

Остальные две особые точки являются седлами. Не все траектории — замкнутые кривые, окружающие начало координат. Граница области замкнутых траекторий проходит через две особые точки вида «седло». Имеет место явление, соответствующее случаю 3° (фиг. 3).

Следствие. Если правые части системы двух дифференциальных уравнений суть целые функции переменных x и y, то в силу вышеизложенного область замкнутых траекторий, соответствующих периодическим решениям, есть всегда *открытая* область. Действительно, это утверждение основывается на первой части доказательства теоремы и имеет место как в случае отсутствия у системы особых точек не первого рода, так и в противном случае.

Если правые части системы не являются целыми функциями переменных x и y, то односвязная область замкнутых траекторий может быть *замкнутой*.

Например, это явление имеет место в известном случае системы

$$\frac{dx}{dt} = -y + xF(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + yF(x, y)$$

где

$$F(x, y) = 0, \qquad \text{если} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2, \qquad \text{если} \quad x^2 + y^2 > 1$$

Эта система имеет единственную особую точку $x = y = 0$, которая является центром, потому что внутри единичного круга с центром в начале координат все траектории суть концентрические окружности. Границей области замкнутых траекторий служит окружность радиуса единица. К граничному циклу асимптотически приближаются траектории, расположенные вне единичного круга.

Поступила 9 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 2.
2. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук. 1941. Вып. IX.
3. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. ОНТИ. 1937.
4. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. ОГИЗ. 1947.