Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ И О ЛЯПУНОВСКИХ ЗОНАХ УСТОЙЧИВОСТИ

М. Г. Крейн
(Одесса)

Если $\rho(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — плотность струны, натянутой единичной силой между точками $x = 0$ и $x = l$, то квадраты частот $\lambda = p^2$ ее гармонических колебаний будут последовательными характеристическими числами краевой задачи

$$y'' + \lambda\rho(x)\,y = 0, \qquad y(0) = y(l) = 0 \tag{0.1}$$

Обозначим эти числа через

$$\lambda_1(\rho) < \lambda_2(\rho) < \ldots$$

Краевая задача (0.1) имеет смысл для любой неотрицательной суммируемой функции $\rho(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$; в этом предположении и будем говорить о функционалах $\lambda_n(\rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $M > 0$, $H > 0$, $h \geqslant 0$ — числа, подчиненные единственному условию

$$hl \leqslant M \leqslant Hl$$

В этой статье решается задача об определении максимума и минимума $\lambda_n(\rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, когда ρ пробегает класс всех функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условиям

$$h \leqslant \rho(x) \leqslant H, \qquad \int_0^l \rho(x)\,dx = M$$

Если $h = 0$, то этот класс функций обозначаем через $E(M, H, l)$.

Первые три параграфа нашей статьи посвящены установлению того, что для $\rho \in E(M, H, l)$

$$\max \lambda_n(\rho) = \frac{\pi^2}{Md} n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{0.2}$$

$$\min \lambda_n(\rho) = \frac{4n^2}{Md}\chi\left(\frac{d}{l}\right) > \frac{4n^2}{Ml}\,\frac{1}{1 - (1 - 4/\pi^2)\,d/l}$$

где $d = M/H$, а функция $\chi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{\chi}\,\mathrm{tg}\sqrt{\chi} = \frac{t}{1-t}$$

В этих же параграфах выясняется, для каких функций $\rho \in E(M, H, l)$ достигается максимум или минимум $\lambda_n(\rho)$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (при этом, естественно, две функции ρ, совпадающие почти всюду, не различаются).

Если для некоторой струны (натянутой единичной силой) ничего неизвестно, кроме ее длины l и массы M, то можно лишь утверждать, что

$$\lambda_n \geqslant \frac{4n^2}{Ml} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{0.3}$$

Это неравенство «точное» и «достигается» при следующем распределении масс: струна делится на n равных частей и в центре каждой части сосредоточивается масса, равная M/n (так что получается нить с n бусинками).

Для $n = 1$ неравенство было указано Н. Е. Жуковским [1] (см. также Гильберта-Куранта [2], стр. 420). Как недавно заметил И. М. Рапопорт [1], из неравенства (0,3) для $n = 1$ немедленно вытекает справедливость неравенства для любого натурального n.

Неравенство (0.3), очевидно, получается предельным переходом из неравенства (0.2) при $H \to \infty$.

В § 4 приводится решение нашей задачи при $h > 0$, а также рассматривается предельный случай задачи, соответствующий $H = \infty$.

Рассуждения, на основании которых получается решение, здесь опущены, так как никаких существенно новых трудностей по сравнению со случаем $h = 0$ при решении общей задачи преодолевать не приходится.

В § 4, кроме того, указывается ряд возможных обобщений решенной задачи и, в частности, рассматривается аналогичная ей задача для мембраны.

Полученные в § 1—4 результаты позволяют (§ 5) получить интересные приближения с недостатком и избытком для $\lambda_n(\rho)$, основанные на учете величины момента инерции струны.

Последние два параграфа посвящены различным обобщениям и уточнениям результатов А. М. Ляпунова [4,5] и Н. Е. Жуковского [1] о зонах устойчивости уравнения

$$y'' + \lambda p(x) y = 0 \tag{0.4}$$

с периодической функцией $p(x) = p(x + l) \neq 0$.

В § 6 мы показываем, что если

$$\int_0^l p(x)\,dx \geqslant 0, \qquad p(x) \leqslant H \qquad (H \leqslant \infty)$$

то все решения уравнения (0.4) будут ограничены на всей бесконечной оси, коль скоро

$$0 < \lambda < \frac{4H}{L^2}\chi\left(\frac{L}{Hl}\right) \qquad \left(> \frac{4}{Ll}\,\frac{1}{1 - L/2Hl}\right) \tag{0.5}$$

где

$$L = \int_0^l p_+(x)\,dx, \qquad p_+(x) = \max(p(x),\ 0)$$

Этот признак ограниченности всех решений уравнения (0.4), повидимому, не был известен [4—7, 11] даже для случая $H = \infty$, когда условие (0.5) принимает вид:

$$0 < \lambda < \frac{4}{l}\left(\int_0^l p_+(x)\,dx\right)^{-1}$$

и когда оно становится непосредственным обобщением классического условия А. М. Ляпунова [для случая неотрицательной функции $p(x)$].

В § 7 в числе прочих результатов показывается, что все решения уравнения (0.4) ограничены, если для некоторого натурального n

$$p(x) \geqslant \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad \int_0^l p(x)\,dx \leqslant \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{2\pi}{l}\,n(n+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2(n+1)}$$

Этот признак недавно был получен В. А. Якубовичем [13] но, повидимому, из других соображений (см. по этому поводу примечание на стр. 348).

---

[1] Неравенство (0.3) для $n = 1$ И. М. Рапопорт [3] получает так же, как и Н. Е. Жуковский [1]. Ссылка на Н. Е. Жуковского в заметке И. М. Рапопорта отсутствует.

§ 1. Определение минимума $\lambda_1(\rho)$. **1**. Обозначим через C_1 класс непрерывно дифференцируемых функций $\psi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, удовлетворяющих граничным условиям $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда для любой интегрируемой функции $\rho(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$

$$\lambda_1(\rho) = \min_{\psi \in C_1} \left(\int_0^l \psi'^2 dx \Big/ \int_0^l \psi^2 \rho dx \right) \tag{1.1}$$

причем минимум достигается только на фундаментальной функции $\varphi_1(x)$, соответствующей числу $\lambda_1 = \lambda_1(\rho)$, т. е. на любом решении (определяемом до пропорциональности) $\varphi \not\equiv 0$ системы (0.1) при $\lambda = \lambda_1(\rho)$.

Система (0.1), как известно, эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, s)\, y(s)\, \rho(s)\, ds, \qquad K(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{l} x(l - s) & (x \leqslant s) \\ \frac{1}{l} s(l - x) & (x \geqslant s) \end{cases}$$

Положим

$$\mu = \inf \lambda_1(\rho), \qquad \rho \in E(M, H, l)$$

где, напомним, $E(M, H, l)$ обозначает класс измеримых функций $\rho(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant \rho(x) \leqslant H, \quad \int_0^l \rho(x)\, dx = M \tag{1.2}$$

Покажем, что значение μ достигается на некоторой функции $\rho^{(0)}(x) \in E(M, H, l)$. Пусть $\rho^{(n)}(x) \in E(M, H, l)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — такая последовательность, что

$$\lambda_1^{(n)} = \lambda_1(\rho^{(n)}) \to \mu \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Образуем соответствующую последовательность фундаментальных функций

$$\varphi^{(n)}(x) = \lambda_1^{(n)} \int_0^l K(x, s)\, \varphi^{(n)}(s)\, \rho^{(n)}(s)\, ds \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

и пронормируем ее так, что

$$\int_0^l [\varphi^{(n)}(x)]^2 \rho^{(n)}(x)\, dx = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

В силу неравенства Буняковского

$$[\varphi^{(n)}(x)]^2 \leqslant [\lambda_1^{(n)}]^2 \int_0^l K^2(x, s)\, \rho^{(n)}(s)\, ds \int_0^l [\varphi^{(n)}(s)]^2 \rho^{(n)}(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant [\lambda_1^{(n)}]^2 H \int_0^l [K(x, s)]^2 ds \leqslant \frac{1}{4} H l^3 [\lambda_1^{(n)}]^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

так как

$$|K(x, s)|^2 \leqslant \frac{1}{4} l^2 \qquad (0 \leqslant x,\ s \leqslant l)$$

Аналогичным образом из равенства

$$\frac{d\varphi^{(n)}(x)}{dx} = \lambda_1^{(n)} \int_0^l \frac{\partial K(x, s)}{\partial x} \varphi^{(n)}(s) \rho^{(n)}(s)\, ds$$

найдем, что

$$\left[\frac{d\varphi^{(n)}(x)}{dx}\right]^2 \leqslant [\lambda_1^{(n)}]^2 H \int_0^l \left[\frac{\partial K(x, s)}{\partial x}\right]^2 ds \leqslant Hl\,[\lambda_1^{(n)}]^2$$

Таким образом, последовательность $\varphi^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. По теореме Арцеля из нее можно будет выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся. Чтобы не усложнять записи, будем считать, что сама последовательность $\varphi^{(n)}(x)$ равномерно сходится к некоторой функции $\varphi^{(n)}(x)$.

Рассмотрим, с другой стороны, последовательность равномерно ограниченных монотонных функций

$$(0 \leqslant)\, \sigma^{(n)}(x) = \int_0^x \rho^{(n)}(\xi)\, d\xi \leqslant Hx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Так как

$$(0 \leqslant) \qquad \sigma^{(n)}(x + h) - \sigma^{(n)}(x) = \int_x^{x+h} \rho^{(n)}(\xi)\, d\xi \leqslant Hh \quad (0 \leqslant x < x+h \leqslant l;\ n = 1, 2, \ldots)$$

то к последовательности $\{\sigma^{(n)}(x)\}$, соответствующей последовательности $\{\varphi^{(n)}(x)\}$, также применима теорема Арцеля, и поэтому без ограничения общности можно сразу принять, что и последовательность функций $\sigma^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно сходится к некоторой монотонной функции $\sigma^{(0)}(x)$. Для функции $\sigma^{(0)}(x)$, очевидно также

$$0 \leqslant \sigma^{(0)}(x + h) - \sigma^{(0)}(x) \leqslant Hh \qquad (0 \leqslant x \leqslant x + h \leqslant l)$$

Следовательно, найдется измеримая функция $\rho^{(0)}(x) \leqslant H$ такая, что

$$\sigma^{(0)}(x) = \int_0^x \rho^{(0)}(\xi)\, d\xi, \qquad 0 \leqslant \rho^{(0)}(x) \leqslant H \tag{1.5}$$

и так как $\sigma^{(n)}(l) = M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то и

$$\sigma^{(0)}(l) = \int_0^l \rho^{(0)}(\xi)\, d\xi = M$$

Таким образом, $\rho^{(0)}(x) \in E(M, H, l)$.

Равенства (1.3) и (1.4) можно переписать в виде

$$\varphi^{(n)}(x) = \lambda_1^{(n)} \int_0^l K(x, s)\, \varphi^{(n)}(s)\, d\sigma^{(n)}(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

$$\int_0^l [\varphi^{(n)}(x)]^2\, d\sigma^{(n)}(x) = 1$$

С другой стороны, при равномерной сходимости функций $\varphi^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ к $\varphi^{(0)}(x)$ уже достаточно простой точечной сходимости функций $\sigma^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ к функции $\sigma^{(0)}(x)$ для возможности предельного перехода в равенствах (1.6) при $n\to\infty$. Совершая этот предельный переход, получим

$$\varphi^{(0)}(x)=\mu\int_0^l K(x, s)\,\varphi^{(0)}(s)\,d\sigma^{(0)}(s), \qquad \int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2\,d\sigma^{(0)}(x)=1$$

Учитывая (1.5), можно здесь заменить $d\sigma^{(0)}(x)$ на $\rho^{(0)}(x)\,dx$ и, таким образом,

$$\mu=\lambda_1(\rho^{(0)})$$

а $\varphi^{(0)}(x)$ есть ему соответствующая фундаментальная функция краевой задачи (0.1) с $\rho\equiv\rho^{(0)}$, т. е.

$$\frac{d^2\varphi^{(0)}(x)}{dx^2}+\mu\rho^{(0)}(x)\,\varphi^{(0)}(x)=0, \qquad \varphi^{(0)}(0)=\varphi^{(0)}(l)=0. \tag{1.7}$$

Отсюда, в частности,

$$\mu=\int_0^l\left[\frac{d\varphi^{(0)}}{dx}\right]^2 dx \Big/ \int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2\,\rho^{(0)}(x)\,dx$$

2. Пусть теперь $\rho(x)$ — произвольная функция из $E(M, H, l)$. Тогда согласно (1.1)

$$\mu\leqslant\lambda_1(\rho)\leqslant\int_0^l\left[\frac{d\varphi^{(0)}}{dx}\right]^2 dx \Big/ \int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2\,\rho(x)\,dx$$

Таким образом,

$$\int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2\,\rho(x)\,dx\leqslant\int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2\,\rho^{(0)}(x)\,dx \qquad \big(\rho\in E(M, H, l)\big) \tag{1.8}$$

Функция $\varphi^{(0)}(x)$ как первая фундаментальная функция задачи Штурма-Лиувилля не имеет нулей внутри интервала $(0, l)$ и мы можем считать, что она там положительна. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x)=\varphi^{(0)}(x+d)-\varphi^{(0)}(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant l-d)$$

Так как $\Phi(0)=\varphi^{(0)}(d)>0$, а $\Phi(l-d)=-\varphi^{(0)}(l-d)<0$, то найдется такое $\xi\,(0<\xi<l-d)$, что $\Phi(\xi)=0$, т. е.

$$\varphi^{(0)}(\xi+d)=\varphi^{(0)}(\xi)=1 \tag{1.9}$$

В силу (1.7) функция $\varphi^{(0)}(x)$ выпукла (ее вторая производная неположительна) и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0\leqslant\varphi^{(0)}(x)\leqslant h \qquad & \text{при } x\,\overline{\in}\,(\xi, \xi+d) \\ \varphi^{(0)}(x)\geqslant h \qquad & \text{при } x\in(\xi, \xi+d) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Введем в рассмотрение функцию $\rho_\xi(x)\in E(M, H, l)$, определяемую равенствами

$$\rho_\xi(x)=\begin{cases} H & \text{при } x\in(\xi, \xi+d) \\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,(\xi, \xi+d) \end{cases} \tag{1.11}$$

В силу (1.10) и (1.11) будем иметь

$$\int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2 \rho_\xi(x)\,dx - \int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2 \rho^{(0)}(x)\,dx = \int_\xi^{\xi+d} [\varphi^{(0)}(x)]^2 (H - \rho^{(0)}(x))\,dx -$$

$$-\left(\int_0^\xi + \int_{\xi+d}^l\right)[\varphi^{(0)}(x)]^2 \rho^{(0)}(x)\,dx \geqslant h^2 \int_\xi^{\xi+d} (H - \rho^{(0)}(x))\,dx -$$

$$-h^2\left(\int_0^\xi + \int_{\xi+d}^l\right)\rho^{(0)}(x)\,dx = h^2\left[Hd - \int_0^l \rho^{(0)}(x)\,dx\right] = 0 \qquad (1.12)$$

Таким образом,

$$\int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2 \rho_\xi(x)\,dx \geqslant \int_0^l [\varphi^{(0)}(x)]^2 \rho^{(0)}(x)\,dx$$

Сопоставляя это соотношение с (1.8), убеждаемся, что здесь имеет место знак равенства, а следовательно, и в (1.12) вместо знака $\geqslant$ должен стоять знак равенства. Но это может иметь место только при $\rho^{(0)}(x) = H$, при $x \in (\xi, \xi + d)$, т. е. если почти всюду

$$\rho^{(0)}(x) = \rho_\xi(x)$$

Но тогда согласно (1.7)

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dx^2} + \mu H \varphi^{(0)}(x) = 0 \quad &\text{при } x \in (\xi, \xi + d) \\ &\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dx^2} = 0 \quad &\text{при } x \overline{\in} (\xi, \xi + d) \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Из первого уравнения находим, учитывая (1.9), что

$$\varphi^{(0)}(x) = \frac{h \cos\sqrt{\mu H}\,(x - \xi - {}^1/_2\, d)}{\cos\sqrt{\mu H}\;{}^1/_2\, d} \qquad \text{при } x \in (\xi, \xi + d)$$

Отсюда

$$\left.\frac{d\varphi^{(0)}}{dx}\right|_{x=\xi} = h\sqrt{\mu H}\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{d}{2}, \qquad \left.\frac{d\varphi^{(0)}}{dx}\right|_{x=\xi+d} = -h\sqrt{\mu H}\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{d}{2}$$

Принимая теперь во внимание уравнение (1.13), получим

$$\varphi^{(0)}(x) = \begin{cases} h + h\sqrt{\mu H}\,(x - \xi)\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{1}{2}\,d & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \xi \\ h - h\sqrt{\mu H}\,(x - \xi - d)\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{1}{2}\,d & \text{при } \xi + d \leqslant x < l \end{cases}$$

А так как $\varphi^{(0)}(0) = \varphi^{(0)}(l) = 0$, то находим

$$\sqrt{\mu H}\,\xi\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{d}{2} = 1, \qquad \sqrt{\mu H}\,(l - \xi - d)\,\mathrm{tg}\sqrt{\mu H}\,\frac{d}{2} = 1$$

Отсюда

$$\xi = \frac{l - d}{2}$$

Тем самым функция $\rho^{(0)}(x) = \rho_\xi(x)$ полностью определилась, а с ней и число μ, являющееся первым (наименьшим) корнем уравнения

$$\sqrt{\lambda H}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{\lambda H}\,\frac{d}{2} = \frac{2}{l-d}$$

совокупность всех корней которого, как следует из приведенных рассуждений, совпадает с множеством всех характеристических чисел с нечетными номерами краевой задачи (0.1) с $\rho(x) = \rho_\xi(x)$ $\left(\xi = \frac{1}{2}(l-d)\right)$,

Полагая

$$\chi = \mu H \frac{d^2}{4} = \mu \frac{Md}{4}, \qquad \mu = \frac{4\chi}{Md}$$

найдем, что χ есть первый корень уравнения

$$\sqrt{z}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{z} = \frac{t}{1-t} \qquad \left(t = \frac{d}{l}\right) \tag{1.14}$$

т. е. корень, удовлетворяющий условию

$$0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{4}\pi^2 \tag{1.15}$$

Уравнением (1.14) вместе с условием (1.15) определяется некоторая монотонная функция $\chi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Обращая по известным правилам уравнение (1.14), найдем, что χ при достаточно малых t изображается рядом

$$\chi = t + \frac{2}{3}t^2 + \frac{19}{45}t^2 + \frac{236}{945}t^4 + \ldots$$

Сделанные выводы могут быть резюмированы в виде теоремы.

Теорема 1. Минимум μ первого характеристического числа $\lambda_1(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ равен
$$\frac{4}{Md}\chi\left(\frac{d}{l}\right)$$

Этот минимум достигается на единственной функции $\rho(x) = \rho^{(\mu)}(x)$, где

$$\rho^{(\mu)}(x) = \begin{cases} H & \text{при } x \in \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}d,\ \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}d\right) \\ 0 & \text{при } x \,\overline{\in}\, \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}d,\ \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}d\right) \end{cases}$$

3. Для минимума μ можно весьма просто получить интересные оценки снизу и сверху.

Пусть $z_1 = \chi < z_2 < z_3 < \ldots$ все корни уравнения (1.14) или, что одно и то же, все корни целой функции

$$F(z) = \cos\sqrt{z} + \left(1 - \frac{1}{t}\right)\sqrt{z}\sin\sqrt{z} = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)z + \cdots \tag{1.16}$$

Так как $F(z)$ — целая функция с порядком роста, равным $^1/_2$, то

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \tag{1.17}$$

Сопоставляя (1.16) и (1.17), найдем, что

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k}=\frac{1}{\chi}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{z_k}$$

Простой анализ уравнения (1.14) показывает, что

$$(k-1)^2\pi^2<z_k<\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2 \qquad (k=1,\,2,\ldots) \tag{1.18}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{2}<\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2}=\frac{1}{\chi}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{2}>\frac{1}{\chi}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{\chi}+\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}$$

Откуда

$$\frac{t}{1-(1-4/\pi^2)\,t}<\chi<\frac{t}{1-{}^2/_3\,t} \tag{1.19}$$

и, таким образом,

$$\frac{4}{Ml}\left[1-\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{d}{l}\right]^{-1}<\mu<\frac{4}{Ml}\left[1-\frac{2}{3}\frac{d}{l}\right]^{-1}$$

Оценки числа μ снизу и сверху с любой точностью можно получить следующим путем. В разложении

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k-z}=-\frac{F'(z)}{F(z)}=s_1+s_2z+\cdots\cdot s_ps^p+\cdots$$

находим последовательные коэффициенты $s_1,\ s_2,\ldots$

$$s_1=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}, \qquad s_2=\frac{1}{t^2}-\frac{4}{3t}+\frac{1}{2}+\cdots$$

С другой стороны,

$$s_m=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z_k^m} \qquad (m=1,\,2,\ldots)$$

Откуда, принимая во внимание (1.18), находим

$$\left(s_m-\frac{1}{\pi^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\right)^{\frac{1}{2m}}<\frac{1}{\chi}<\left(s_m-\frac{4}{\pi^{2m}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2m}}\right)^{\frac{1}{2m}} \qquad (m=1,\,2,\ldots)$$

При $m=1$ получим (1.19); при $m=2$ находим, что

$$t\left[1-\frac{4}{3}t+\left(\frac{11}{24}+\frac{4}{\pi^4}\right)t^2\right]^{-1/2}<\chi<t\left[1-\frac{4}{3}t+\frac{22}{45}t^2\right)^{-1/2}$$

и, следовательно,

$$\frac{4}{Ml}\left[1-\frac{4}{3}\frac{d}{l}+\left(\frac{11}{24}+\frac{4}{\pi^4}\right)\frac{d^2}{l^2}\right]^{-1/2}<\mu<\frac{4}{Ml}\left[1-\frac{4}{3}\frac{d}{l}+\frac{22}{45}\frac{d^2}{l^2}\right]^{-1/2}$$

§ 2. Определение минимума $\lambda_n(\rho)$ $(n=2, 3, \ldots)$. **1.** Пусть n — некоторое натуральное число.

Обозначим через $c_j^{(n)}$ середину интервала $\left(\frac{(j-1)\,l}{n}, \frac{jl}{n}\right)$ так, что

$$c_j^{(n)} = \frac{2j-1}{2n}\,l \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

Введем в рассмотрение функцию $\rho_n^{(\mu)}(x)$, равную H для значений x, попадающих в один из интервалов

$$\left(c_j^{(n)} - \frac{d}{2n}, \; c_j^{(n)} + \frac{d}{2n}\right) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

и равную нулю для всех прочих значений x из интервала $(0, l)$.

В обобщение теоремы 1 будет доказана

Теорема 2. Минимум характеристического числа $\lambda_n(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ равен

$$\frac{4n^2}{Md}\,\chi\left(\frac{d}{l}\right) \tag{2.1}$$

Этот минимум достигается на единственной функции $\rho(x) = \rho_n^{(\mu)}(x)$.

Предварительно докажем следующее предложение.

Лемма. Пусть x и y $(0<x<l,\ 0<y<d,\ y \leqslant x)$ таковы, что

$$\frac{1}{y^2}\,\chi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{(d-y)^2}\,\chi\left(\frac{d-y}{l-x}\right)$$

Тогда

$$\frac{1}{y^2}\,\chi\left(\frac{y}{x}\right) \geqslant \frac{4}{d^2}\,\chi\left(\frac{d}{l}\right)$$

причем знак равенства достигается только при $x = \frac{1}{2}l$, $y = \frac{1}{2}d$.

Доказательство. Рассмотрим линию L_1 на плоскости xy с уравнением

$$\frac{1}{y^2}\,\chi\left(\frac{y}{x}\right) = 1 \qquad (0 < y \leqslant x \leqslant \infty) \tag{2.2}$$

Так как по определению функции χ

$$\sqrt{\chi\left(\frac{y}{x}\right)}\,\mathrm{tg}\sqrt{\chi\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{y}{x-y}$$

то уравнение (2.2) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{1}{x-y} \quad \text{или} \quad x = y + \mathrm{ctg}\, y \qquad (0 < y \leqslant x \leqslant \infty)$$

Так как $\chi(y/x) \leqslant \frac{1}{4}\pi^2$, то $y \leqslant \frac{1}{2}\pi$ и

$$\frac{dx}{dy} = 1 - \frac{1}{\sin^2 y} < 0, \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2\cos y}{\sin^3 y} > 0$$

Таким образом, линия L_1 начинается в точке $x = y = \frac{1}{2}\pi$ и затем с возрастанием x монотонно и асимптотически приближается к оси x;

кроме того, линия L_1 выпукла по отношению к оси y, а значит, и оси x (в силу монотонности функции $y(x)$).

Всякая другая линия уровня L_c $(0<c<\infty)$

$$\frac{1}{y^2}\chi\left(\frac{y}{x}\right)=c$$

получается из L_1 путем «подобного растяжения»:

$$x\to\frac{1}{\sqrt{c}}x,\qquad y\to\frac{1}{\sqrt{c}}y$$

Пусть $A(x,\ y)$ и $A'\ (l-x,\ d-y)$ — две различные точки, лежащие на одной и той же линии уровня L_a, т. е.

$$\frac{1}{y^2}\chi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{(d-y)^2}\chi\left(\frac{d-y}{l-x}\right)=a$$

Хорда AA' имеет своей серединой точку $S\left(\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}d\right)$, которая, таким образом, лежит над L_a. Следовательно, линия уровня L_c, проходящая через S и для которой

$$c=\frac{4}{d^2}\chi\left(\frac{d}{l}\right)$$

получается из линии L_1 подобным растяжением с большим коэффициентом, чем линия L_a, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{a}}<\frac{1}{\sqrt{c}},\qquad c<a$$

Лемма доказана.

2. В уравнении (0.1) функцию $\rho(x)$ будем представлять себе как плотность распределения масс на некоторой струне $S=S(\rho)$, натянутой единичной силой между точками $x=0$ и $x=l$. Тогда характеристические числа $\lambda_n(\rho)$ $(n=1,\ 2,\ldots)$ системы (0.1) будут квадратами частот p_n гармонических колебаний струны $S(\rho)$, а соответствующие им фундаментальные функции $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ будут амплитудными функциями этих колебаний, так что уравнение всякого такого колебания в плоскости xy будет иметь вид:

$$y=\mathrm{const}\,\varphi_n(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,t+\alpha)\tag{2.3}$$

Если струну $S(\rho)$ защемить в $n-1$ точках $(0<)\ \alpha_1<\alpha_2<\ldots\ldots<\alpha_{n-1}\ (<l)$, то получающаяся при этом система $S^*(\rho)$ из n независимых струн будет обладать следующим свойством. Расположим в одну неубывающую последовательность частоты всех отдельных струн системы $S^*(\rho)$ и число, стоящее на n-м месте в этой последовательности, назовем n-й частотой системы $S^*(\rho)$. Оказывается [2,8], n-я частота p_n^* системы $S(\rho)$ всегда не меньше n-й частоты p_n первоначальной струны $S(\rho)$ и равенство $p_n^*=p_n$ имеет место в том и только том случае, если $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ суть последовательные узлы n-го гармонического колебания (2.3) струны $S(\rho)$ [т. е. узлы функции $\varphi_n(x)$].

На этом факте и приведенной выше лемме мы построим доказательство теоремы 2. Пусть

$$\mu_n=\min\lambda_n(\rho),\qquad \rho\in E(M,\ H,\ l)\tag{2.4}$$

Возможность здесь писать знак минимума вместо знака нижней грани (inf) доказывается для любого $n = 2, 3 \ldots$ точно так же, как и для $n = 1$ (см. § 1).

Пусть $\rho_n(x)$ — та функция, на которой минимум μ_n в (2.4) достигается:

$$\mu_n = \lambda_n(\rho_n)$$

Обозначим через $(0) < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} (< l)$ узлы гармонического колебания струны $S(\rho_n)$ с частотой μ_n. Положим

$$l_i = d_i - d_{i-1}, \quad M_i = \int\limits_{d_{i-1}}^{d_i} \rho_n(x)\,dx, \quad d_i = \frac{M_i}{H} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha_0 = 0,\ \alpha_n = l)$$

Число μ_n является квадратом первой частоты для каждого отрезка (α_{i-1}, α_i) струны $S(\rho_n)$ при защемлении концов отрезка. Поэтому в силу теоремы 1

$$\mu_n \geqslant \frac{4}{M_i l_i} \chi\left(\frac{d_i}{l_i}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

причем знак равенства для данного i будет иметь место в том и только том случае, если на интервале (α_{i-1}, α_i) функция $\rho_n(x)$ совпадает с функцией

$$\rho_i^\circ(x) = \begin{cases} H & \text{при} \quad x \in (\gamma_i - d/n,\ \gamma_i + d/n) \\ 0 & \text{при} \quad x \overline{\in} (\gamma_i - d/n,\ \gamma_i + d/n) \end{cases}$$

где γ_i — центр интервала (α_{i-1}, α_i):

$$\gamma_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i-1} + \alpha_i)$$

Докажем, что в каждом из соотношений (2.5) имеет место знак равенства. Введем в рассмотрение функцию $\rho^\circ(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, совпадающую в каждом из интервалов (α_{i-1}, α_i) с функцией $\rho_i^\circ(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Так как $\rho^\circ(x) \in E(M, H, l)$, то

$$\mu_n \leqslant \lambda_n(\rho^\circ) \tag{2.6}$$

Защемим струну $S(\rho^\circ)$ в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. В последовательности квадратов частот получающейся при этом системы $S^*(\rho^\circ)$ независимых струн будут фигурировать n первых частот отдельных струн, на которые распадается система $S^*(\rho^\circ)$.

Следовательно, для λ_n^* (квадрата n-й частоты системы струн $S^*(\rho^\circ)$) будут выполняться неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{4}{M_i l_i} \chi\left(\frac{d_i}{l_i}\right) \geqslant \lambda_n^* \geqslant \lambda_n(\rho^\circ) \tag{2.7}$$

Сопоставляя (2.5), (2.6) и (2.7), мы заключаем, что в (2.6) и (2.7) имеет место знак равенства.

Но знак равенства в (2.7) показывает, что точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ суть узлы n-го тона струны $S(\rho^\circ)$ и, следовательно, все независимые струны, на которые распадается струна $S(\rho^\circ)$ при защемлении в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, имеют один и тот же основной тон, т. е.

$$\frac{4}{M_i l_i} \chi\left(\frac{d_i}{l_i}\right) = \lambda_n(\rho^\circ) = \mu_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

Одновременно доказано, что

$$\rho_n(x) = \rho^\circ(x) \tag{2.9}$$

Если мы теперь докажем, что

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_n = \frac{d}{n}, \qquad l_1 = l_2 = \ldots = l_n = \frac{l}{n} \tag{2.10}$$

и, стало быть,

$$M_i = Hd_i = \frac{M}{n} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

то равенства (2.8) будут означать, что

$$\mu_n = \frac{4n^2}{Ml} \chi\left(\frac{d}{l}\right) \tag{2.11}$$

а равенство (2.9), что $\rho_n(x) = \rho_n^{(\mu)}(x)$. Таким образом, доказательство теоремы будет закончено.

Рассмотрим сперва случай $n = 2$. В этом случае равенства (2.8) дают

$$\mu_2 = \frac{4}{Hd_1^2} \chi\left(\frac{d_1}{l_1}\right) = \frac{4}{Hd_2^2} \chi\left(\frac{d_2}{l_2}\right), \qquad d_1 + d_2 = d, \qquad l_1 + l_2 = l$$

и, следовательно, согласно лемме

$$\mu_2 \geqslant \frac{4.4}{Hd^2} \chi\left(\frac{d}{l}\right)$$

С другой стороны, стоящая здесь справа величина есть квадрат второй частоты струны $S(\rho_n^{(\mu)})$ и, следовательно, она либо меньше, либо равна μ_2. Таким образом, для $n = 2$ равенство (2.11) установлено.

Докажем его теперь для любого $n > 2$. Пусть k — одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$. Положим

$$M' = \frac{1}{2}(M_k + M_{k+1}), \qquad d_k' = \frac{1}{2}(d_k + d_{k+1})$$

Сохраняя распределение масс на струне $S(\rho_n)$ вне отрезка $(\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1})$ перераспределим массу $2M'$ на этом отрезке так, чтобы на каждую половинку $(\alpha_{k-1}, \alpha_k')$ и $(\alpha_k', \alpha_{k+1})$ приходилась масса M' и чтобы основной тон $\sqrt{\mu'}$ этих половинок был возможно меньшим при условии, что плотность распределения масс $\rho \leqslant H$. Тогда

$$\mu' = \frac{4}{M'l'} \chi\left(\frac{d'}{l'}\right) \qquad \left(d' = \frac{d_k + d_{k+1}}{2},\ l' = \frac{l_k + l_{k+1}}{2}\right)$$

Величина $\sqrt{\mu'}$ одновременно будет минимальным значением второй частоты струны длины $2l'$ с массой $2M'$ и любой плотностью $\rho \leqslant H$ (так как теорема для $n = 2$ уже доказана).

Так как $\sqrt{\mu_n}$ также является второй частотой для отрезка $(\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1})$ струны $S(\rho^\circ)$, то $\mu' \leqslant \mu_n$ и равенство $\mu' = \mu_n$ будет иметь место в том и только том случае, когда

$$l' = l_k = l_{k+1}, \qquad d' = d_k = d_{k+1} \tag{2.12}$$

Обозначим через $S(\rho')$ струну, получающуюся из струны $S(\rho)$ путем указанного перераспределения масс на ее отрезке $(\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1})$. Квадрат ее n-й частоты $\lambda_n(\rho') \geqslant \mu_n$.

С другой стороны, при закреплении струны $S(\rho')$ в точках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k', \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$ среди частот получающейся при этом системы $S^*(\rho')$ из n струн будет $n-2$ частот, равных μ_n, и две частоты, равные μ', и, следовательно,

$$\lambda_n(\rho') \leqslant \max(\mu', \mu_n) = \mu_n$$

Таким образом, $\mu' = \mu_n$ и, стало быть, имеют место равенства (2.12).

Так как k — произвольное из чисел $1, 2, \ldots, n-1$, то (2.10) доказано, а вместе с этим и теорема 2.

§ 3. Определение максимума $\lambda_n(\rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **1.** Всякой интегрируемой функции $\rho(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ отвечает симметричная с ней интегрируемая функция $\rho^*(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$:

$$\rho^*(x) = \rho(l - x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Очевидно,

$$\lambda_n(\rho^*) = \lambda_n(\rho) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Лемма 2. Какова бы ни была неотрицательная интегрируемая функция $\rho(x)$ $(0 \geqslant x \leqslant l)$, всегда

$$\lambda_1\left(\frac{\rho + \rho^*}{2}\right) \geqslant \lambda_1(\rho) \tag{3.1}$$

причем знак равенства имеет место в том и только том случае, если

$$\rho(x) \equiv \rho^*(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Доказательство. Пусть $\varphi_s(x) = \varphi_s\ (l - x)$ — фундаментальная функция системы (0.1) при

$$\rho(x) = \rho_s(x) = \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho^*(x))$$

отвечающая первому характеристическому числу $\lambda_1(\rho_s)$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_1(\rho_s)} = \int_0^l \varphi_s^2 \rho_s\, dx \Big/ \int_0^l \varphi_s'^2\, dx = \int_0^l \varphi_s^2 \rho\, dx \Big/ \int_0^l \varphi_s'^2\, dx$$

Так как согласно (1.1)

$$\int_0^l \varphi_s^2(x)\, \rho(x)\, dx \Big/ \int_0^l \varphi_s'^2(x)\, dx \geqslant \frac{1}{\lambda_1(\rho)} \tag{3.2}$$

то отсюда следует (3.1).

Так как знак равенства имеет место в (3.2) только в том случае, когда $\varphi_s(x)$ есть фундаментальная функция система (0.1), т. е. если $\rho(x) = -\varphi_s''(x) / \lambda_1 \varphi_s(x) = \rho_s(x)$, то лемма полностью доказана.

2. В силу леммы 2 при отыскании максимума $\lambda_1(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ мы можем ограничиться рассмотрением только симметрических функций $\rho = \rho^*$. Пользуясь этим, мы докажем следующую теорему.

Теорема 3. Первое характеристическое число $\lambda_1(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ имеет своим максимумом величину

$$\Lambda = \frac{\pi^2}{Md}$$

Этот максимум достигается на единственной функции

$$\rho(x) = \rho^{(\Lambda)}(x) = \begin{cases} H & \text{при } x \in \left(0, \frac{1}{2} d\right) \\ 0 & \text{при } x \in \left(\frac{1}{2} d, l - \frac{1}{2} d\right) \\ H & \text{при } x \in \left(l - \frac{1}{2} d, l\right. \end{cases}$$

Доказательство. Равенство

$$\Lambda = \lambda_1(\rho^{(\Lambda)})$$

роверяется немедленно. Соответствующая $\rho^{(\Lambda)}(x)$ и числу Λ фундаментальная функция $\psi(x)$ имеет вид:

$$\psi(x) = \psi(l - x) = \begin{cases} \sin\sqrt{\Lambda H}\, x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} d \\ \sin\sqrt{\Lambda H}\, \frac{1}{2} d & \text{при } \frac{1}{2} d \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} l \end{cases}$$

Пусть $\rho(x) = \rho^*(x)$ — некоторая симметричная функция из $E(M, H,$ Для нее согласно (1.1)

$$\lambda_1(\rho) \leqslant \int_0^l \psi'^2\, dx \Big/ \int_0^l \psi^2 \rho\, dx \tag{3.3}$$

С другой стороны, имеем

$$\int_0^l \psi^2 \rho\, dx - \int_0^l \psi^2 \rho^{(\Lambda)}\, dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \psi^2 (\rho - \rho^{(\Lambda)})\, dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}d} \psi^2 (\rho - H)\, dx + 2\psi^2\left(\tfrac{1}{2} d\right) \int_{\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}l} \rho\, dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\psi^2\left(\tfrac{1}{2} d\right) \int_0^{\frac{1}{2}d} (\rho - H)\, dx + 2\psi^2\left(\tfrac{1}{2} d\right) \int_{\frac{1}{2}d}^{\frac{1}{2}l} \rho\, dx = 0 \tag{3.4}$$

так как

$$\int_0^{\frac{1}{2}l} \rho\, dx = \frac{M}{2} = \frac{Hd}{2}$$

Следовательно,

$$\int_0^l \psi'^2\, dx \Big/ \int_0^l \psi^2 \rho\, dx \leqslant \int_0^l \psi'^2\, dx \Big/ \int_0^l \psi^2 \rho^{(\Lambda)} dx = \Lambda \tag{3.5}$$

Сопоставление (3.3) и (3.5) дает

$$\lambda_1(\rho) \leqslant \Lambda$$

причем знак равенства может иметь место только при условии, что в (3.4) вместо $\geqslant$ стоит знак $=$. Но последнее будет иметь место в том и только том случае, если $\rho(x) = \rho(l - x) = H$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} d$, т. е. если

$$\rho(x) \equiv \rho^{(\Lambda)}(x) \qquad (0 < x < l)$$

Теорема доказана.

2. После теоремы 3 максимум $\lambda_n(\rho)$ находится чрезвычайно просто.

Узлы n-го гармонического колебания струн $S(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ делят струну на n частей. По крайней мере одна из этих частей будет иметь массу $M' \geqslant M / n$. Для этой части при закреплении ее концов $\lambda_n(\rho)$ будет квадратом первой частоты и, следовательно, по теореме 3 будем иметь

$$\lambda_n(\rho) \leqslant \frac{\pi^2}{M' d'} \leqslant \frac{\pi^2}{M d^2} n^2 \qquad \left(d' = \frac{M'}{H}\right)$$

С другой стороны, существует бесконечное множество функций $\rho \varepsilon E(M, H, l)$, для которых

$$\lambda_n(\rho) = \frac{\pi^2}{M d} n^2$$

В самом деле, пусть $(0 <)$ $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{n-1} (< l)$ — произвольная последовательность точек, удовлетворяющая условиям

$$\beta_i - \beta_{i-1} \geqslant \frac{d}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ \beta_0 = 0,\ \beta_n = l)$$

Рассмотрим функцию $\rho_\beta(x)$, определяемую в каждом из интервалов (β_{i-1}, β_i) равенствами

$$\rho_\beta(x) = \begin{cases} H & \text{при } x \in (\beta_{i-1}, \beta_{i-1} + d / 2n) \\ 0 & \text{при } x \in (\beta_{i-1} + d / 2n, \beta_i - d / 2n) \\ H & \text{при } x \in (\beta_i - d / 2n, \beta_i) \end{cases}$$

Если струну $S(\rho_\beta)$ закрепить в точках $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, то каждый из ее отрезков своей первой частотой будет иметь величину, равную корню квадратному из $n^2\pi^2 / Md$ (длина ненагруженной массами средней части отрезка (β_{i-1}, β_i) на значении первой частоты никак не отражается). Следовательно, эта же величина будет n-й частотой струны $S(\rho_\alpha)$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Максимум характеристического числа $\lambda_n(\rho)$ $(\rho \in E(M, H, l))$ равен

$$\frac{\pi^2 n^2}{M d}$$

Для $n \geqslant 2$ этот максимум достигается на бесконечном множестве функций $(\rho(x) \in E(M, H, l))$.

Рассуждениями типа тех, которые были приведены при доказательстве теоремы 2, можно доказать, что максимум (3.6) достигается только на функциях $\rho_\beta(x)$, описанных выше.

§ 4. Возможные обобщения предыдущих результатов. **1.** Как указывалось в введении, результаты, аналогичные предыдущим, можно получить при более общей постановке, когда на функцию $\rho(x)$ вместо ограничений (1.1) накладываются ограничения

$$\int_0^l \rho(x)\,dx = M, \qquad h \leqslant \rho(x) \leqslant H \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{4.1}$$

причем

$$(0 <)\ \ hl < M < Hl$$

Приведем здесь окончательные результаты.

Обозначим через $\omega(t, s)$ $(0 \leqslant t, s < \infty)$ наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{s}\operatorname{ctg}\sqrt{s}\,t\omega \tag{4.2}$$

Таким образом,

$$0 < \omega(t, s) < \frac{1}{2}\pi$$

Определим числа d и D равенствами $Hd + hD = M$, $d + D = l$ так, что

$$d = \frac{M - hl}{H - h}, \qquad D = \frac{Hl - M}{H - h}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Если функция $\rho(x)$ удовлетворяет условиям (4.1), то для любого натурального n имеют место следующие «точные» неравенства:

$$\frac{4n^2}{Hd^2}\omega^2\left(\frac{h}{H}, \frac{D}{d}\right) \leqslant \lambda_n(\rho) \leqslant \frac{4n^2}{hD^2}\omega^2\left(\frac{H}{h}, \frac{d}{D}\right) \tag{4.3}$$

Здесь верхняя граница получается из нижней путем транспозиции d с D и h с H.

Для $\lambda_1(\rho)$ нижняя грань при условии (4.1) будет достигаться тогда и только тогда, если

$$\rho(x) = \begin{cases} h & \text{при } x \in \left(0, \frac{1}{2}D\right) \\ H & \text{при } x \in \left(\frac{1}{2}D, d + \frac{1}{2}D\right) \\ h & \text{при } x \in \left(l - \frac{1}{2}D, l\right) \end{cases} \tag{4.4}$$

Меняя здесь ролями d с D и h с H, получим единственную функцию, для которой $\lambda_n(\rho)$ при условии (4.1) будет достигать верхней грани, указанной в (4.3).

Если интервал $(0, l)$ разделить на n равных частей и на каждом из них задать $\rho(x)$ аналогично тому, как в (4.4), отправляясь уже вместо чисел d, D от чисел d/n, D/n, то мы получим ту единственную функцию, для которой $\lambda_n(\rho)$ достигает минимума при условии (4.1). Меняя в этом определении ролями d с D и h с H, получим единственную функцию $\rho(x)$, на которой при условии (4.1) будет достигаться максимум $\lambda_n(\rho)$.

2. Полученные в предыдущих параграфах результаты можно рассматривать как предельные по отношению к только что изложенным, получающиеся при предельном переходе $h \to 0$.

Представляет интерес выяснение того, что происходит при предельном переходе противоположного характера, когда $H \to \infty$ и, следовательно,

$$d \to 0, \qquad D \to l, \qquad Hd \to M - hl$$

Предельной теоремой для теоремы 5 будет следующее предложение.

Теорема 6. Если плотность распределения массы M по некоторой струне длины l всюду не меньше $h\,(0 < h < M/l)$, то квадраты $\lambda_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ последовательных частот струны удовлетворяют следующим «точным» неравенствам:

$$\frac{4n^2}{hl^2}\chi\left(\frac{hl}{M}\right) \leqslant \lambda_n \leqslant \frac{n^2\pi^2}{hl^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

Верхние границы здесь будут «достигаться» для всех $n = 1, 2, \ldots$ одновременно, когда струна равномерно нагружена с плотностью h, а дополнительная масса $M - hl$ размещается на неподвижных концах струны.

Для данного натурального n нижняя граница в (4.5) будет достигаться, если струна нагружена равномерно с плотностью h и, кроме того, несет n сосредоточенных масс величины $(M - hl)/n$, размещаемых следующим образом: струна делится на n равных по длине частей и в середине каждой части помещается указанная сосредоточенная масса.

3. Дальнейшие обобщения возможны на пути замены дифференциальной системы (0.1) системой

$$y'' - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \qquad y(0) = y(l) = 0$$

где $q(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — некоторая интегрируемая функция.

Если функция $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$1^\circ \quad q(l - x) \equiv q(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

$$2^\circ \quad \int_0^l (y'^2 + qy^2)\,dx > 0 \qquad \text{при } y \in C_1,\ y \not\equiv 0,$$

(определение класса C_1 см. в начале § 1), то, как легко обнаружить, максимум и минимум числа $\lambda_1(\rho)$ при условии (1.1) или более общем (4.1) будет достигаться на тех же функциях, что и при $q \equiv 0$.

4. К трудным вопросам мы придем, если попытаемся обобщить предыдущие результаты на случай уравнений в частных производных.

Пусть, например, в двумерной области G с границей Γ рассматривается дифференциальная система

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda\rho(x, y)\,u = 0, \qquad u = 0 \quad \text{на } \Gamma \tag{4.6}$$

Пусть $\lambda_1(\rho) \leqslant \lambda_2(\rho) \leqslant \ldots$ последовательные характеристические числа этой системы. Можно и здесь поставить задачу [1] об определении верхней и нижней грани числа $\lambda_n(\rho)$ при дополнительном условии

$$\iint_G \rho(x, y)\,dx\,dy = M, \qquad 0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant H \tag{4.7}$$

---

[1] При этом лучше систему (4.6) переписать в виде соответствующего интегрального уравнения; тогда под $\rho(x, y)$ можно будет понимать любую измеримую функцию, удовлетворяющую условиям (4.7).

где M и H — заданные положительные числа, причем

$$M < H \iint_G dx\,dy$$

Рассуждения, при помощи которых доказывалась теорема 1, допускают непосредственное обобщение на тот случай, когда G — круг, и приводят к следующему предложению.

1°. Если G — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, то максимум $\lambda_1(\rho)$ при условии (4.7) достигается на единственной функции $\rho(x, y)$, а именно, когда

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant r^2 \\ H & \text{при } r^2 < x^2 + y^2 \leqslant R^2 \end{cases}$$

где число r определяется из условия

$$\pi(R^2 - r^2) H = M$$

Отсюда легко найдем, что максимум Λ числа $\lambda_1(\rho)$ есть первый положительный корень уравнения

$$J_0'(\sqrt{\lambda H} r) Y_0(\sqrt{\lambda H} R) - Y_0'(\sqrt{\lambda H} r) J_0(\sqrt{\lambda H} R) = 0$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ бесселевы функции 1-го и 2-го рода:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} 1^2 2^2 \ldots n^2}, \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \log \frac{x}{2} - c_0 - c_2 x^2 - c_4 x^4 - \ldots$$

Повидимому, имеет место также следующее предложение.

2°. Если G — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, то минимум $\lambda_1(\rho)$ при условии (4.7) достигается на единственной функции $\rho(x, y)$, а именно, когда

$$\rho(x, y) = \begin{cases} H & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant r^2 \\ 0 & \text{при } r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2 \end{cases}$$

где число r определяется из условия

$$\pi r^2 H = M$$

Доказательство этого предложения требует более тонких средств.

Согласно этому предложению минимумом числе $\lambda_1(\rho)$ будет наименьший корень μ уравнения

$$R J_0(\sqrt{\lambda H} r) + r(R - r)\sqrt{\lambda H} J_0'(\sqrt{\lambda H} r) = 0$$

Число μ можно еще представить так:

$$\mu = \frac{M}{\pi} \zeta\left(\frac{r}{R}\right)$$

где функция $\zeta(t)$ $(0 < t < 1)$ определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$-\sqrt{\zeta} \frac{J_0'(\sqrt{\zeta})}{J_0(\sqrt{\zeta})} = \frac{1}{1 - t}$$

Рассуждая аналогично тому, как в п. 3 § 1, легко показать, что

$$\frac{2}{1.387 - t} < \zeta < \frac{2}{1.349 - t}$$

§ 5. Приближенное определение $\lambda_1(\rho)$ при дополнительном задании момента инерции струны. Момент инерции I струны $S(\rho)$ относительно ее центра имеет значение

$$I=\int\limits_{{}^1/_2 l}^{{}^1/_2 l}\left(x-\frac{1}{2}l\right)^2\rho(x)\,dx$$

С другой стороны, если $K(x,s)$, так же как и в § 1, обозначает функцию влияния струны $S(\rho)$, то, как известно,

$$\int\limits_0^l K(s,s)\,\rho(s)\,ds=\frac{1}{l}\int\limits_0^l(l-s)\,s\rho(s)\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\rho)}$$

Таким образом,

$$\frac{Ml}{4}-\frac{I}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\rho)}$$

Из этого соотношения немедленно следует неравенство

$$\lambda_1(\rho)>\frac{4}{Ml}\frac{1}{1-4I/Ml^2}$$

содержащее в себе между прочим неравенство Н. Е. Жуковского (см. введение). Но мы теперь в состоянии получить лучшую оценку снизу для $\lambda_1(\rho)$, а также и новую оценку сверху для $\lambda_1(\rho)$, коль скоро известно, например, что

$$0\leqslant\rho(x)\leqslant H$$

В самом деле, согласно теоремам 2 и 4

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\rho)}\leqslant\frac{Md}{4}\,\chi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{Md}{4}\,\chi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\rho)}\geqslant\frac{Md}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{Md}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$$

Откуда

$$\frac{Ml}{4}-\frac{I}{l}-\frac{Md}{4}\,\chi^{-1}\left(\frac{d}{l}\right)\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\leqslant\frac{1}{\lambda_1(\rho)}<M\left(\frac{l}{4}-\frac{d}{6}\right)-\frac{I}{l}-\frac{Md}{\pi^2}$$

В отношении выбора приближенного среднего значения для $\lambda_1(\rho)$ можно порекомендовать следующее.

Как известно, имеет место асимптотическая формула

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}=\pi^2\left(\int\limits_0^l\sqrt{\rho}\,dx\right)^{-2}$$

Поэтому во многих случаях можно приближенно полагать

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n(\rho)}\approx\frac{1}{\pi^2}\left(\int\limits_0^l\sqrt{\rho}\,dx\right)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\right)\left(\int\limits_0^l\sqrt{\rho}\,dx\right)^2 \qquad (5.1)$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{\lambda_1(\rho)} \approx \frac{Ml}{4} - \frac{I}{l} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2}\right)\left(\int_0^l \sqrt{\rho}\, dx\right)^2 \tag{5.2}$$

Такого рода приближенные формулы для квадрата первой частоты можно составить и для задачи о поперечных вибрациях стержня и многих других задач.

Более точные формулы типа (5.2) можно получить, привлекая, во-первых, более точные асимптотические формулы для $\lambda_n(\rho)$, например формулы вида

$$\lambda_n(\rho) = cn^2 + c_0 + O(n^{-2})$$

имеющие место для дважды дифференцируемой функции ρ, во-вторых, используя формулу для второго следа

$$\int_0^l K^{(2)}(s, s)\,\rho(s)\,ds = \int_0^l\int_0^l K^2(x, s)\,dx\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2(\rho)}$$

и, в-третьих, вычисляя по способу (5.1) суммы обратных величин $\lambda_n(\rho)$ и $\lambda_n^2(\rho)$, начиная не с $n=2$, а с $n=3$ и т. д.

§ 6. Оценка для первой зоны устойчивости. 1. В этом параграфе мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \lambda p(x)\, y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{6.1}$$

где $p(x)\ (\not\equiv 0)$ — некоторая периодическая функция

$$p(x + l) = p(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

интегрируемая в интервале $(0, l)$.

А. М. Ляпунов [5] показал, что для того, чтобы при достаточно малых положительных λ все решения уравнения (6.1) были ограничены на всей оси $(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^l p(x)\,dx \geqslant 0 \tag{6.2}$$

А. М. Ляпунову [5,6] (см. также [9]) принадлежат также первые оценки снизу верхней границы Λ первой максимальной зоны $0 < \lambda < \Lambda$, для которой при условии (6.2) все решения уравнения (6.1) будут ограниченными.

Недавно Г. Борг [11] в обобщение известного классического результата А. М. Ляпунова для случая $p(x) \geqslant 0$ показал, что при выполнении условия (6.2) все решения уравнения будут ограничены, если

$$0 < \lambda < \frac{4}{l}\left(\int_0^l |p(x)|\,dx\right)^{-1}$$

Как мы покажем, использование одного предложения А. М. Ляпунова позволяет очень просто установить более точный результат, а именно:

При выполнении условия (6.2) все решения уравнения (6.1) будут ограниченными, если

$$0 < \lambda < \frac{4}{l}\left(\int_0^l p_+(x)dx\right)^{-1}$$

где

$$p_+(x) = \begin{cases} p(x) & \text{при } p(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } p(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

Более того, если функция $p_+(x)$ ограничена известным числом H, то при помощи теоремы 1 можно получить еще лучший результат.

Теорема 7. Если в уравнении (6.1)

$$p_+(x) \leqslant H, \qquad \int_0^l p_+(x)\,dx = M, \qquad \int_0^l p(x)\,dx > 0$$

то при

$$0 < \lambda < \frac{4}{Md}\,\chi\left(\frac{M}{Hl}\right) \qquad \left(d = \frac{M}{H}\right)$$

все решения уравнения (6.1) ограничены на всей вещественной оси.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_1(a)$ $(0 \leqslant a \leqslant l)$ первое положительное характеристическое число краевой задачи

$$y'' + \lambda p(x)\,y = 0, \qquad y(a) = y(a+l) = 0 \tag{6.3}$$

и положим

$$\Lambda_1 = \min \lambda_1(a) \qquad (0 \leqslant a \leqslant l)$$

А. М. Ляпунов [6,7] (см. также [9]) доказал, что при $0 < \lambda < \Lambda_1$ все решения уравнения (6.1) ограничены.

Воспользуемся еще тем, что

$$\frac{1}{\lambda_1(a)} = \max_{\psi \in C_1(a)} \left(\int_a^{a+} p(x)\,\psi^2(x)\,dx \Big/ \int_a^{a+} \psi'^2(x)\,dx\right) \tag{6.4}$$

где $C_1(a)$ — совокупность функций $\psi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant a+l)$, непрерывно дифференцируемых в интервале $(a, a+l)$ и удовлетворяющих условиям

$$\psi(a) = \psi(a+l) = 0$$

С другой стороны, для первого характеристического числа $\lambda_1^+(a)$ краевой задачи

$$y'' + \lambda p_+(x)\,y = 0, \qquad y(a) = y(a+l) = 0$$

будем иметь

$$\frac{1}{\lambda_1^+(a)} = \max_{\psi \in C_1(a)} \left(\int_a^{a+l} p_+\psi^2\,dx \Big/ \int_a^{a+l} \psi'^2\,dx\right) \geqslant \frac{1}{\lambda_1(a)} \qquad (\psi \in C_1(a))$$

и, таким образом, в силу теоремы 1

$$\lambda_1(a) \geqslant \lambda_1^+(a) \geqslant \frac{4}{Ml}\,\chi\left(\frac{M}{Hl}\right)$$

Вспоминая сформулированный выше результат А. М. Ляпунова, приходим к теореме 7.

Предшествовавшее теореме предложение следует рассматривать как соответствующее предельному случаю, получающемуся при $H \to \infty$.

Заметим, что и для случая $p(x) \geqslant 0$ теорема 7 дает уточнение классической оценки А. М. Ляпунова для первой зоны устойчивости (если только $p(x)$ — ограниченная функция).

Предоставляем читателю выяснить, к каким следствиям для уравнения (6.1) ведут теоремы 5, 6, если коэффициент $p(x)$ этого уравнения удовлетворяет условиям

$$(0<)\quad h \leqslant p(x) \leqslant H \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

или только условию

$$h \leqslant p(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

§ 7. Оценки для следующих зон устойчивости. Будем предполагать, что периодическая функция $p(x) = p(x+l)$ неотрицательна ($n \neq 0$):

$$p(x) \geqslant 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Обозначим через $\lambda_n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ последовательные характеристические числа краевой задачи (6.3) и положим

$$\lambda_n' = \min \lambda_n(a), \qquad \lambda_n'' = \max \lambda_n(a) \qquad (0 \leqslant a \leqslant l) \tag{7.1}$$

А. М. Ляпунов [6] доказал, что всегда

$$(0<)\,\lambda_1' \leqslant \lambda_1'' < \lambda_2' \leqslant \lambda_2'' < \lambda_3' \leqslant \lambda_3'' < \cdots$$

при этом числа λ_{2n-1}', λ_{2n-1}'' $(n = 1, 2, \ldots)$ составляют полную последовательность характеристических чисел «полупериодической» краевой задачи

$$y'' + \lambda p(x) y = 0, \qquad y(0) = -y(l), \qquad y'(0) = -y'(l) \tag{7.2}$$

а числа λ_{2n}', λ_{2n}'' $(n = 1, 2, \ldots)$ — «периодической» краевой задачи

$$y'' + \lambda p(x) y = 0; \qquad y(0) = y(l), \qquad y'(0) = y'(l). \tag{7.3}$$

Далее в числе прочих результатов А. М. Ляпунов [6] установил, что для данного значения λ не все решения уравнения (6.1) ограничены в том и только в том случае, когда либо λ не положительно, либо при некотором n будет $\lambda_n' \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n''$ и при этом $\lambda_n' < \lambda_n''$. Поэтому не вырождающиеся в точку интервалы $(\lambda_n', \lambda_n'')$ называются зонами неустойчивости. Пусть теперь

$$(0 \leqslant)\quad h \leqslant p(x) \leqslant H\,(\leqslant \infty), \qquad \int_0^l p(x)\,dx = M \tag{7.4}$$

а числа d и D определены по l, H и M, как в § 4.

Сопоставляя (7.1) с теоремой 5, сразу получаем

$$\frac{4n^2}{Hd^2}\,\omega^2\left(\frac{h}{H}, \frac{D}{d}\right) \leqslant \lambda_n' \leqslant \lambda_n'' \leqslant \frac{4n^2}{hD^2}\,\omega^2\left(\frac{H}{h}, \frac{d}{D}\right)$$

Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 8. Все решения уравнения

$$y'' + p(x)y = 0; \qquad p(x+l) = p(x) \tag{7.5}$$

ограничены, если при некотором натуральном

$$\frac{4n^2}{hD^2}\omega^2\left(\frac{H}{h}, \frac{d}{D}\right) < 1 < \frac{4(n+1)^2}{Hd^2}\omega^2\left(\frac{h}{H}, \frac{D}{d}\right) \tag{7.6}$$

Это условие можно ослабить, допуская равенство единице одной из крайних частей соотношения, если только заведомо известно, что $p(x)$ не совпадает с той экстремальной функцией ρ (класса, выделяемого условиями (7.4)), для которой $\lambda_n(\rho)$, или соответственно $\lambda_{n+1}(\rho)$ совпадает с левым или соответственно с правым выражением из (7.6).

Легкий анализ уравнения (4.2), из которого определяется функция $\omega(s, t)$, позволяет показать, что правое неравенство (7.6) эквивалентно двум неравенствам:

$$\frac{Hd^2}{(n+1)^2} < \pi^2, \qquad \operatorname{tg}\frac{\sqrt{H}d}{2(n+1)} < \sqrt{\frac{H}{h}}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{h}D}{2(n+1)}$$

а левое неравенство (7.6) выполняется, когда либо

$$\frac{hD^2}{n^2} \geqslant \pi^2$$

либо

$$\frac{hD^2}{n^2} < \pi^2, \qquad \operatorname{tg}\frac{\sqrt{h}D}{2n} > \sqrt{\frac{H}{h}}\operatorname{ctg}\frac{\sqrt{H}d}{2n}$$

2. Для случая $h = 0$ условие (7.6) означает следующее:

$$\frac{\pi^2 n^2}{Md} < 1 < \frac{4(n+1)^2}{Md}\chi\left(\frac{d}{l}\right) \qquad \left(d = \frac{M}{H}\right) \tag{7.7}$$

для случая же $H = \infty$

$$\frac{\pi^2 n^2}{hl^2} \leqslant 1 < \frac{4(n+1)^2}{hl^2}\chi\left(\frac{hl}{M}\right) \tag{7.8}$$

При этом мы учли, что в левом соотношении (7.6) теперь допускается знак равенства. Последнее вытекает из того, что если

$$\lambda_n'' = \lambda_n(p) = \frac{\pi^2 n^2}{hl^2} = 1$$

то в этом случае $p(x) \equiv h$ и все решения уравнения (7.5) будут ограничены. Если при некотором натуральном n

$$p(x) \geqslant \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

то для этого n условие (7.8) сведется при выборе $h = \pi^2 n^2 / l^2$ к единственному условию

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\pi^2}{4} < \chi\left(\frac{\pi^2 n^2}{Ml}\right) \tag{7.9}$$

Так как стоящее здесь значение функции χ представляет собой (см. § 1, п. 2) первый положительный корень уравнения

$$\sqrt{z}\,\operatorname{tg}\sqrt{z} = \frac{\pi^2 n^2}{Ml - \pi^2 n^2}$$

левая часть которого есть возрастающая функция z в интервале $\left(0, \frac{1}{4}\pi^2\right)$, то (7.9) эквивалентно условию

$$\frac{n}{n+1}\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2(n+1)} < \frac{2n^2\pi}{Ml - \pi^2 n^2}$$

Определяя отсюда нижнюю границу для M, приходим к следующему предложению.

Теорема 9. Если для некоторого натурального n выполняются условия

$$p(x+l) = p(x) \geqslant \frac{n^2\pi^2}{l^2} \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{7.10}$$

$$\int_0^l p(x)\,dx < \frac{\pi^2 n^2}{l} + \frac{2\pi}{l} n(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{l}\left(\pi^2 n^2 + \pi^2 n + \frac{\pi^4 n}{12l(n+1)^3} + \dots\right)$$

то все решения уравнения (7.5) ограничены.

Сравним это предложение с близким по характеру предложением, полученным Р. С. Гусаровой [12]. Вместо нашего условия (7.10) она, принимая $l = \pi$, получила условие

$$\pi\int_0^\pi p(x)\,dx \leqslant 4(n+1) + n^2\left(\frac{\pi^2}{2} + 4\right)$$

Это условие имеет смысл только при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (при $n = 0$, заметим, оно совпадает с классическим условием А. М. Ляпунова) и для каждого $n = 1, 2, 3, 4$ дает более грубый результат, нежели наше.

3. Если

$$(0 <) \qquad h \leqslant p(x) \leqslant H\ (< \infty) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

то, как известно еще из исследований Штурма:

$$\frac{n^2\pi^2}{Hl^2} \leqslant \lambda_n(a) \leqslant \frac{n^2\pi^2}{hl^2} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

а поэтому согласно (7.1) также

$$\frac{n^2\pi^2}{Hl^2} \leqslant \lambda_n' \leqslant \lambda_n'' \leqslant \frac{n^2\pi^2}{hl^2}$$

и, таким образом, все решения уравнения (7.5) будут ограничены, если при некотором натуральном n между числами $n^2\pi^2 / hl^2$ и $(n+1)^2\pi^2 / Hl^2$ заключена единица, т. е. если при некотором натуральном n:

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2} \leqslant p(x) \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Этот критерий был указан Н. Е. Жуковским [1]. Очевидно, что в некоторых случаях он лучше, а в некоторых хуже критерия, даваемого теоремой 9. Но, конечно, он во всех случаях оказывается более слабым, чем критерий, даваемый теоремой 8, или даже критерий, получаемый «сочетанием» критериев (7.7) и (7.8):

$$\min\left(\frac{\pi^2 n^2}{Md}, \frac{\pi^2 n^2}{hl^2}\right) < 1 < \max\left(\frac{4(n+1)^2}{Md}\chi\left(\frac{d}{l}\right), \frac{4(n+1)^2}{hl^2}\chi\left(\frac{hl}{M}\right)\right) \quad (7.11)$$

Легко убедиться в законности такого «сочетания» двух критериев.

4. Если функция $p(x+l) = p(x)$ — положительна и имеет абсолютно непрерывную первую производную, то, как известно, уравнение

$$y'' + \lambda p(x) y = 0, \qquad p(x+l) = p(x)$$

может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + q(\xi) z + \lambda z = 0 \quad (7.12)$$

при помощи подстановок

$$\xi = \int_0^x \sqrt{p(x)}\, dx, \qquad z(\xi) = \sqrt[4]{p(x)}\, y(x)$$

при этом

$$q(\xi) = q(\xi + L) = -\frac{1}{\sqrt[4]{p(x)}} \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[4]{p(x)}\right), \qquad L = \int_0^l \sqrt{p(x)}\, dx$$

Предположим, что

$$q_m = \inf q(\xi) > -\infty \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi) \quad (7.13)$$

Согласно теореме 8 все решения уравнения (7.12), а значит, и уравнения (7.5) будут ограничены, если при некотором натуральном n

$$\lambda + q_m \geqslant \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad \int_0^L [\lambda + q(x)]\, dx < \frac{\pi^2 n^2}{L} + \frac{2\pi}{L} n(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Таким образом, для всех λ, удовлетворяющих при каком-либо натуральном n неравенству

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} - q_m < \lambda < \frac{\pi^2 n^2}{L^2} + \frac{2\pi}{L^2} n(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{L}\int_0^L q(x)\, dx \quad (7.14)$$

все решения уравнения (7.12) ограничены.

При достаточно большом натуральном n неравенство (7.14) всегда непротиворечиво и определяет некоторый интервал, лежащий внутри $n+1$-й зоны устойчивости уравнения (7.12).

Если выполняется не только условие (7.12), но и условие

$$q_M = \sup q(x) < \infty$$

то, воспользовавшись критерием Н. Е. Жуковского, можно будет утверждать, что $n+1$-я зона устойчивости уравнения (7.12) всегда содержит интервал

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} - q_m < \lambda < \frac{\pi^2 (n+1)^2}{L^2} - q_M$$

если только он имеет смысл.

Более широкие границы можно получить, принимая во внимание, кроме значения величин q_m, q_M, также значение интеграла, стоящего в правой части (7.14); при этом придется воспользоваться критерием (7.6) или (7.11), и вычисление границ усложняется.

В заключение укажем, что к моменту окончания статьи автор познакомился с недавно опубликованной заметкой В. А. Якубовича [13].

В этой заметке имеется ряд общих моментов с ранее появившейся статьей автора [10] о системах уравнений с периодическими коэффициентами, а также с содержанием этого параграфа; методы же исследования, повидимому, отличны от наших.

Примечание. Во время печатания настоящей работы появилась статья М. Г. Нейтауз и В. Б. Лидского (ДАН. 1951. Т. LXXVII. № 3), в которой на основе предыдущих исследований автора [10] получены важные обобщения ряда результатов В. А. Якубовича [13] и автора на случай системы уравнений с периодическими коэффициентами.

Поступила 26 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y / dx^2 + py = 0$. Собрание сочинений. 1948. Т. I. Стр. 246—253. Полное собрание сочинений. ОНТИ. 1937. Т. I. 315—322.
2. Гильберт-Курант. Методы математической физики. ГТТИ. 1933. Т. I.
3. Рапопорт И. М. Об одной вариационной задаче в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями. ДАН. 1950. Т. LXXIII. № 5. Стр. 889—890 1950.
4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1950.
5. Ляпунов А. М. Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Сообщ. Харьк. матем. о-ва. 2-я серия. 1896. Т. V. № 3 и 4, 5 и 6.
6. Liapounoff A. M. Sur une équation linéaire du second ordre. C. R. Acad. Sci. 1899. T. CXXVIII. P. 910—913.
7. Liapounoff A. M. Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coéfficients périodiques. C. R. Acad. Sci 1899. T. CXXVIII. P. 1085—1088.
8. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. ГТТИ. 1950.
9. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г. О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами. ДАН. 1950. Т. LXXV. No 4. Стр. 495—498.
10. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН. 1950. Т. XXIII. № 3. Стр. 445—448.
11. Borg G. On a Liapounoff criterion. Amer. Journ. of Math. 1949. V. LXXI. No. 1. P. 67—70.
12. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ. 1949. Т. VIII. Вып. 3 и 1950. Т. XIV. Вып. 3.
13. Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t + \omega) = p(t)$. ДАН. 1950. Т. XXIV. № 5. Стр. 901—905.