Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

М. М. Холмянский

(Новосибирск)

1. Пусть на некоторую область круг конформно отображается алгебраическим полиномом степени p. Тогда при известных ограничениях, накладываемых на вид контура, решение для этой области «основных задач» плоской теории упругости и задач технической теории изгиба тонких пластинок, защемленных и свободных от закреплений по контуру, сводится по методу Н. И. Мусхелишвили [1] к решению комплексной системы p уравнений с p неизвестными. Эта система в зависимости от того, равен или не равен нулю ее детерминант, приводится к системе соответственно $u = 2p - 2$ или $u = 2p$ действительных уравнений с u неизвестными, имеющей вид:

$$a_{jj}x_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{u-j+1} a_{jk}X_k = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, u) \tag{1.1}$$

где a_{jk} — коэффициент при k-м неизвестном в j-м уравнении. Целью заметки является указание некоторых упрощений в решении этой системы, которую будем называть системой типа E.

2. Область пластинки не имеет осей симметрии. Система u уравнений с u неизвестными типа E сводится к симметричной системе t уравнений с t неизвестными, причем $t = \frac{1}{2} u$ или $t = \frac{1}{2}(u + 1)$ соответственно при четном и нечетном u.

Подвергнем матрицу $\| a_{jk} \|$ системы (1.1) следующему преобразованию:

Обратим в нуль в j-й строке все члены, начиная с $t + 1$-го. Для этого умножим:

строку $t + 1$ на $-a_{j,t+1}\dfrac{1}{a_{t+1,t+1}}$

строку $t + 2$ на $-a_{j,t+2}\dfrac{1}{a_{t+2,t+2}}$

. . . .

строку $u - j + 1$ на $-a_{j,u-j+1}\dfrac{1}{a_{u-j+1,u-j+1}}$

и прибавим к j-й строке.

Проведя это преобразование над всеми первыми строками от $j=1$ до $j=t$, обратим в нуль все элементы a_{jk}, для которых $1 \leqslant j \leqslant t$, $t+1 \leqslant k \leqslant u$. В результате в исходной системе последние $u-t$ уравнений останутся без изменений, а первые t образуют систему t уравнений с t неизвестными, с матрицей $\|A_{jk}\|$ и свободными членами B_j, вместо b_j в исходной системе.

Выражения для A_{jk} и B_j даются формулами

$$
\begin{gathered}
A_{jk} = a_{jk} - \sum_{\alpha=t+1}^{u-j+1} \frac{a_{jk}\, a_{\alpha k}}{a_{\alpha\alpha}} \qquad (k \leqslant j) \\
A_{jk} = a_{jk} - \sum_{\alpha=t+1}^{u-k+1} \frac{a_{j\alpha}\, a_{\alpha k}}{a_{\alpha\alpha}} \qquad (k \geqslant j) \\
A_{j,\, t+c} = 0 \qquad \begin{pmatrix} j \leqslant t \\ c = 1, 2, \ldots, u-t \end{pmatrix} \\
B_j = b_j - \sum_{\alpha=t+1}^{u-j+2} b_\alpha \frac{a_{j\alpha}}{a_{\alpha\alpha}}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

После разрешения этой системы остается подставить найденные значения t неизвестных в другие $u-t$ уравнения и последовательно получить остальные неизвестные, решая каждый раз одно уравнение с одним неизвестным.

Из симметрии матрицы $\|a_{jk}\|$ следует симметрия матрицы $\|A_{jk}\|$.

3. Область пластинки имеет $n \geqslant 1$ осей симметрии. При $n=1$ коэффициенты исходного уравнения будут действительными величинами. Следовательно, комплексная система p уравнений с p неизвестными может быть заменена двумя действительными системами p уравнений с p неизвестными, приводящимися к типу E.

Покажем, что при $n \geqslant 2$ решение системы u уравнений с u неизвестными типа E сводится к решению ряда независимых систем уравнений с симметричными относительно главной диагонали матрицами и числом неизвестных не большим числа $m = (u-1)/n$.

При $n \geqslant 2$ система (1.1) преобразуется к системе вида

$$
a_{jj} x_j + \sum_{\substack{q \geqslant (j-1)/n \\ q \neq (2j-2)/n}}^{m} a_{j,\, qn+2-j}\, x_{qn+2-j} = b_j \qquad (j-1, 2, \ldots, u) \tag{3.1}
$$

с симметричной матрицей.

Выделив особо первое уравнение, разобъем остальные на m групп по n уравнений в каждом, занумеровав их по порядку от 1 до m.

Рассмотрим первое уравнение:

$$
a_{11} x_1 + \sum_{q=1}^{m} a_{1,\, qn+1}\, x_{qn+1} = b_1
$$

Выделим все уравнения системы (3.1), в которых могут встретиться неизвестные, входящие в это уравнение. Имеем условие

$$nq^* + 2 - j = nq + 1, \quad \text{или} \quad j = n(q^* - q) + 1$$

Полагая $q^* - q = s - 1$, где s совпадает с порядковым номером выделенных строк, получим

$$j = (s-1)n + 1 \qquad (1 \leqslant s \leqslant m+1)$$

Выделенные строки имеют вид:

$$a_{(s-1)n+1,\,(s-1)n+1}\, x_{(s-1)n} + \sum_{q>s-1}^{m} a_{(s-1)n+1,\,(q-s+1)n+1}\, x_{(q-s+1)n+1} = b_{(s-1)n+1}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m+1)$$

Все неизвестные, входящие в какую-либо из этих строк, встречаются вторично только в этих же строках. Действительно, индексы этих неизвестных имеют вид $q^* n + 1\ (q^* \leqslant m)$ и, следовательно, все встречаются в первой строке, а поэтому все находятся в выделенной системе. Число неизвестных больше всего в первом уравнении и равно $m+1$.

Полученная система, назовем ее системой I, состоит из $m+1$ уравнения с $m+1$ неизвестными. Это суть первая строка исходной системы и последние строки каждой из m групп.

Покажем, что система I принадлежит типу E. Введем обозначения

$$x_{qn+1} = x_{q+1}^*, \qquad a_{qn+1,\,jn+1} = a_{qj}^* \qquad (a_{qj}^* = a_{jq}^*)$$

Система I примет вид:

$$a_{ss}^* x_{ss}^* + \sum_{q=s-1}^{m} a_{s,\,q-s+2}^* x_{q-s+2}^* = b_{(s-1)n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m+1)$$

или

$$a_{ss}^* x_{ss}^* + \sum_{k=1}^{(m+1)-s+1} a_{sk}^* x_k^* = b_{(s-1)n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m+1)$$

совпадающий с уравнением (1.1) при $u = m+1$. Следовательно, решение системы I может быть сведено к решению системы t уравнений с t неизвестными ($t = \frac{1}{2}(m+1)$ или $t = \frac{1}{2}(m+2)$ соответственно при нечетном и четном m). При дальнейшем расчленении надо различать случай четного и нечетного n.

Пусть n — четное. Рассмотрим строку номера $\frac{1}{2}n+1$, представляющую собой после удаления уравнений системы I середину первой группы:

$$a_{\frac{1}{2}n+1,\,\frac{1}{2}n+1}\, x_{\frac{1}{2}n+1} + \sum_{q=1}^{n} a_{\frac{1}{2}n+2,\,qn-\frac{1}{2}n+1}\, x_{qn-\frac{1}{2}n+1} = b_{qn-\frac{1}{2}n+1}$$

Все строки, содержащие неизвестные, входящие в эту строку, имеют номера, удовлетворяющие равенству

$$qn - \tfrac{1}{2}n + 1 = q^* n + 2 - j$$

Отсюда

$$j = (q^* - q)\,n + \tfrac{1}{2}\,n + 1 = (s-1)\,n + \tfrac{1}{2}\,n + 1 = sn - \tfrac{1}{2}\,n + 1$$

где $1 \leqslant s \leqslant m$, так как $j \leqslant mn + 1$.

Количество этих строк равно m. Это суть середины каждой из m групп после удаления из них строк системы I.

Назовем выделенную совокупность m строк системой II. Покажем, что неизвестные, входящие в эту систему, встречаются только в ней же.

Возьмем произвольную s-ю строку системы:

$$a_{sn-\frac{1}{2}n+1,\, sn-\frac{1}{2}n+1}\, x_{sn-\frac{1}{2}n+1} + \sum_{q=s}^{m} a_{sn-\frac{1}{2}n+1,\, (q-s+1)n-\frac{1}{2}n+1}\, x_{(q-s+1)n-\frac{1}{2}n+1} = \\ = b_{sn-\frac{1}{2}n+1}$$

Общий вид индекса при неизвестном есть

$$q^* n - \tfrac{1}{2}\,n + 1 \qquad (1 \leqslant q^* \leqslant m)$$

Все такие индексы имеются в первом уравнении системы II, следовательно, все они встречаются только в выделенной системе, а число их равно m. Система II содержит, таким образом, m уравнений и m неизвестных. Покажем, что она принадлежит типу E.

Обозначим $x_{q^*n-\frac{1}{2}n+1}$ через $x_{q^*}{}^*$, а $a_{q^*n-\frac{1}{2}n+1,\, j^*n-\frac{1}{2}n+1}$ через $a^*_{q^*j^*}$. Тогда система II примет вид:

$$a_{ss}{}^*\, x_s{}^* + \sum_{q=s}^{m} a^*_{s,\, q-s+1}\, x^*_{q-s+1} = b_{sn-\frac{1}{2}n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

или, полагая $q - s + 1 = k$:

$$a_{ss}{}^*\, x_s{}^* + \sum_{k=1}^{m-s+1} a_{sk}{}^*\, x_k{}^* = b_{sn-\frac{1}{2}n+1} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

Сравнивая эту систему с системой (1.1), убеждаемся, что система II принадлежит типу E и, следовательно, допускает сведение к симметричной системе t уравнений с t неизвестными ($t = \frac{1}{2}\,m$ или $t = \frac{1}{2}\,(m+1)$ соответственно при четном и нечетном m).

Продолжим расчленение системы (3.1). Рассмотрим в первой группе две строки, равностоящие от строки номера $\frac{1}{2}\,n + 1$. Пусть это будут строки номеров

$$\tfrac{1}{2}\,n + 1 - \nu \qquad \text{и} \qquad \tfrac{1}{2}\,n + 1 + \nu \quad (\nu \leqslant \tfrac{1}{2}\,n - 1)$$

$$a_{\frac{1}{2}n+1-\nu,\, \frac{1}{2}n+1-\nu}\, x_{\frac{1}{2}n+1-\nu} + \sum_{q=1}^{m} a_{\frac{1}{2}n+1-\nu,\, qn-\frac{1}{2}n+1+\nu}\, x_{qn-\frac{1}{2}n+1+\nu} = b_{\frac{1}{2}n+1-\nu}$$

Тогда

$$a_{\frac{1}{2}n+1+\nu,\, \frac{1}{2}n+1+\nu}\, x_{\frac{1}{2}n+1+\nu} + \sum_{q=1}^{m} a_{\frac{1}{2}n+1+\nu,\, qn-\frac{1}{2}n+1-\nu}\, x_{qn-\frac{1}{2}n+1-\nu} = b_{\frac{1}{2}n+1+\nu}$$

Найдем все другие строки, содержащие то же неизвестные, что и выделенные уравнения. Это будут в каждой из m групп пары строк расположенных симметрично относительно строки системы II, на расстоянии ν от нее. Действительно, из условия

$$q^*n - \frac{1}{2}n + 1 + \nu = qn + 2 - j$$

находим

$$j = (q^* - q)\,n + \frac{1}{2}n + 1 \mp \nu, \quad \text{или} \quad j = sn - \frac{1}{2}n + 1 \mp \nu = j_2 \mp \nu$$

где j_2 — номера строк системы II.

Неизвестные, входящие в выделенные строки, встречаются вторично только в выделенных же строках. Действительно, индексы этих неизвестных имеют вид $q^*n + \frac{1}{2}n + 1 \pm \nu$ $(1 \leqslant q^* \leqslant m)$ и, следовательно, все содержатся в выделенной выше паре строк. Полученная система, назовем ее системой III ν, состоит из $2m$ уравнений с $2m$ неизвестными. Покажем, что она принадлежит типу E и, следовательно, сводится к системе $t = m$ уравнений с t неизвестными.

Выпишем s-ю пару уравнений:

$$a_{sn-\frac{1}{2}n+1-\nu,\, sn-\frac{1}{2}n+1-\nu}\, x_{sn-\frac{1}{2}n+1-\nu} + \\ + \sum_{q=s}^{m} a_{sn-\frac{1}{2}n+1-\nu,\, (q-s+1)n-\frac{1}{2}n+\nu}\, x_{(q-s+1)n-\frac{1}{2}n+1+\nu} = b_{sn-\frac{1}{2}n+1-\nu}$$

$$a_{sn-\frac{1}{2}n+1+\nu,\, sn-\frac{1}{2}n+1+\nu}\, x_{sn-\frac{1}{2}n+\nu} + \\ + \sum_{q=s}^{m} a_{sn-\frac{1}{2}n+1+\nu,\, (q-s+1)n-\frac{1}{2}n+1-\nu}\, x_{(q-s+1)n-\frac{1}{2}n+1-\nu} = b_{sn-\frac{1}{2}n+1+\nu}$$

Выведем обозначения

$$a_{rn-\frac{1}{2}n+1+\nu,\, gn-\frac{1}{2}n+\nu} = a^*_{2r,\,2g}, \qquad b_{rn-\frac{1}{2}n+1+\nu} = b^*_{2r}$$
$$a_{rn-\frac{1}{2}n+1-\nu,\, gn-\frac{1}{2}n-\nu} = a^*_{2r-1,\,2g-1}, \qquad b_{rn-\frac{1}{2}n+1-\nu} = b^*_{2r-1}$$

$$x_{rn-\frac{1}{2}n+1-\nu} = x^*_{2r-1}, \qquad x_{rn-\frac{1}{2}n+1+\nu} = x_{2r}{}^*$$

Тогда выделенная пара строк запишется в виде

$$a^*_{2s-1,\,2s-1}\, x^*_{2s-1} + \sum_{q=s}^{m} a^*_{2s-1,\,2(q-s+1)}\, x^*_{2(q-s+1)} = b^*_{2s-1}$$

$$a^*_{2s,\,2s}\, x_{2s}{}^* + \sum_{q=1}^{m} a_{2s}{}^*{}_{,\,2(q-s+1)-1}\, x_2{}^*{}_{(q-s+1)-1} = b_{2s}{}^*$$

Замечая, что номер первого из уравнений в системе III ν равен $j = 2s - 1$, а второго $j = 2s$, запишем ее в виде

$$a_{jj}{}^*\, x_j{}^* + \sum_{q=s}^{m} a_{j,\,2q-j+1}\, x^*_{2q-j+1} = b_j{}^*$$

$$a_{jj}{}^*\, x_j{}^* + \sum_{q=s}^{m} a^*_{j,\,2q-j+1}\, x^*_{2q-j+1} = b_i{}^*$$

Заменяя индекс суммирования q индексом $k = 2q - j + 1$, получим

$$a_{jj}{}^* x_j{}^* + \sum_{k=2}^{2m-j+1} a_{jk}{}^* x_k{}^* = b_j{}^* \qquad (j \text{ — нечетное})$$

$$a_{jj}\, x_j{}^* + \sum_{k=1}^{2m-j+1} a_{jk}{}^* x_k{}^* = b_j{}^* \qquad (j \text{ — четное})$$

Полагая $a_{j_1} = 0$ при j нечетном, убеждаемся, что системы уравнений III ν, где $\nu = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-2)$, совпадают с системой (1.1), а следовательно, принадлежат типу E и допускают сведе́ние к системам t уравнений с t неизвестными ($t = m$).

При нечетном n исследование проводится аналогично.

Окончательные результаты можно представить в виде следующей таблицы.

n	Сводится к системе	Число систем	Число уравнений: m — четное	Число уравнений: m — нечетное
Четное	I	1	$\frac{1}{2}(m+2)$	$\frac{1}{2}(m+1)$
	II	1	$\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{2}(m+1)$
	III ν	$\frac{1}{2}(n-2)$	m	m
Нечетное	I	1	$\frac{1}{2}m+1$	$\frac{1}{2}(m+1)$
	III ν	$\frac{1}{2}(n-1)$	m	m

Заметим, кроме того:

а) для симметричных областей разбиение исходное комплексной системы на две действительные не обязательно, если ее детерминант не равен нулю, так как в каждую из групп уравнений (системы I, II и III ν), на которые распадается система, неизвестные z_k входят или только как z_k, или только как $\overline{z}_k$;

б) если каждая из осей симметрии пластинки является осью симметрии или осью косой симметрии нагрузки, то из всех систем, на которые распадается исходная система, остается соответственно только одна система II или одна система I;

в) при решении указанных выше граничных задач, а также некоторых смешанных задач число членов алгебраического полинома, отображающего круг на симметричную область пластинки, а не степень этого полинома, определяет собой степень сложности систем алгебраических уравнений, к разрешению которых сводятся эти задачи.

Поступила 26 I 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 1949.