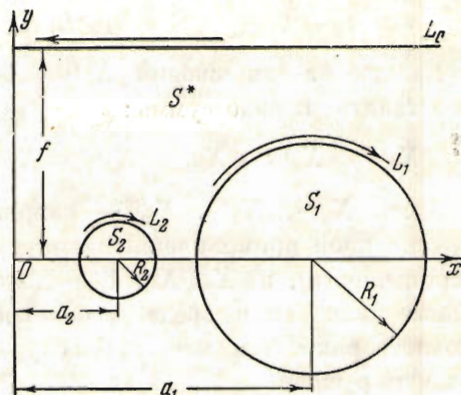


О НАПРЯЖЕНИЯХ В ВЕСОМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. Рассмотрим упругую, изотропную и однородную полуплоскость, имеющую два отверстия круговой формы, достаточно удаленные от ее границы. Обозначим границу полуплоскости через L_0 , а окружности, ограничивающие отверстия, — через L_j ($j=1, 2$); радиусы последних назовем R_j ($j=1, 2$), считая для определенности $R_1 > R_2$. Систему координат комплексной плоскости $z = x + iy$, в которой расположена среда, выберем, как указано на фиг. 1. При этом пусть a_j ($j=1, 2$) — абсциссы лежащих на вещественной оси центров окружностей L_j ($j=1, 2$) и f — расстояние от той же оси до параллельной ей границы полуплоскости. Бесконечную область, ограниченную контурами L_j ($j=1, 2$), назовем S , а исходную полубесконечную область с границами L_j ($j=0, 1, 2$) — назовем S^* .



Фиг. 1

Кроме того, пусть S_j ($j=1, 2$) — конечные односвязные области, внутренние к L_j ($j=1, 2$). Наконец, обход контуров L_j ($j=0, 1, 2$) условимся вести в положительном направлении относительно области S^* .

Будем считать, что упругая среда помимо собственного веса подвержена на бесконечности действию заданных, вообще говоря, различных между собой растягивающих напряжений $X_x^{(\infty)}$ и $Y_y^{(\infty)}$.

В данном случае нас преимущественно интересует напряженное состояние среды в окрестности кривых L_j ($j=1, 2$). Так как по условию они достаточно удалены от границы L_0 , то без заметной погрешности можно считать, что в точках среды, примыкающих к L_0 , нормальные составляющие напряжений равны $X_x^{(\infty)}$ и $Y_y^{(\infty)}$; касательная же составляющая обращается в нуль. При этом, в качестве внешнего воздействия к L_0 приложено равномерно распределенное нормальное напряжение $Y_y^{(\infty)}$. Далее предположим для простоты, что кривые L_j ($j=1, 2$) свободны от внешних усилий.

В такой постановке задача об определении напряжений в области S^* , занимаемой упругой средой, может иметь значение в практике горного дела (тоннелестроения) и в частных вопросах гидротехники.

Искомые компоненты напряжений $X_x^{(1)}$, $X_y^{(1)}$ и $Y_y^{(1)}$ в области S^* удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial X_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Y_y^{(1)}}{\partial y} - \rho g = 0 \quad (1.1)$$

и уравнению совместности

$$\Delta (X_x^{(1)} + Y_y^{(1)}) = 0 \quad (1.2)$$

где ρ — плотность упругой среды и g — ускорение силы тяжести; им сопутствуют предельные равенства (n — нормаль к L_j ($j = 0, 1, 2$), направленная изнутри S^* во вне)

$$X_y^{(1)} = 0, \quad Y_y^{(1)} = Y_y^{(\infty)} \quad \text{на } L_0 \quad (1.3)$$

$$X_x^{(1)} \cos(n, x) + X_y^{(1)} \cos(n, y) = 0, \quad X_y^{(1)} \cos(n, x) + Y_y^{(1)} \cos(n, y) = 0 \\ \text{на } L_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.4)$$

Каждое из напряжений $X_x^{(1)}$, $X_y^{(1)}$ и $Y_y^{(1)}$ можно в свою очередь представить в виде суммы:

$$X_x^{(1)} = X_x^{(0)} + X_x, \quad X_y^{(1)} = X_y^{(0)} + X_y, \quad Y_y^{(1)} = Y_y^{(0)} + Y_y \quad (1.5)$$

Здесь $X_x^{(0)}$, $X_y^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$ — напряжения в сплошной весомой среде, ограниченной прямолинейным контуром L_0 (при указанных условиях на бесконечности), и X_x , X_y , Y_y — дополнительные напряжения, обусловленные наличием в среде ослабляющих ее отверстий. Первые из них удовлетворяют той же системе уравнений (1.1) и (1.2). Решение ее возьмем в виде

$$X_x^{(0)} = n \rho g (y + C_1^{(0)}), \quad Y_y^{(0)} = \rho g (y + C_2^{(0)}), \quad X_y^{(0)} = 0 \quad (1.6)$$

где n — постоянная, зависящая от свойств среды и обычно называемая коэффициентом распора; некоторые соображения позволяют думать, что на большой глубине она весьма близка к единице. Постоянные же интегрирования $C_j^{(0)}$ ($j = 1, 2$) следует определить из условия обращения составляющих $X_x^{(0)}$ и $Y_y^{(0)}$ соответственно в $X_x^{(\infty)}$ и $Y_y^{(\infty)}$ на границе L_0 . Полагая $y = f$ в (1.6), получим

$$C_1^{(0)} = \frac{1}{n \rho g} X_x^{(\infty)} - f, \quad C_2^{(0)} = \frac{1}{\rho g} Y_y^{(\infty)} - f \quad (1.7)$$

После этого предшествующие равенства примут вид:

$$X_x^{(0)} = X_x^{(\infty)} + n \rho g (y - f), \quad X_y^{(0)} = 0, \quad Y_y^{(0)} = Y_y^{(\infty)} + \rho g (y - f) \quad (1.8)$$

Составляющие напряжений X_x , X_y и Y_y в отличие от (1.8) удовлетворяют однородной системе уравнений равновесия (1.1) при том же уравнении совместности (1.2). Будем считать также, что они обращаются в нуль на бесконечности.

Граничные равенства для них мы получим из условий (1.3) и (1.4), учитывая формулы (1.5) и (1.8). Именно, будем иметь

$$X_y \dot{=} 0, \quad Y_y = 0 \quad \text{на } L_0 \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= -\{X_x^{(\infty)} + n\rho g(y-f)\} \cos(n, x) \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= -\{Y_y^{(\infty)} + \rho g(y-f)\} \cos(n, y) \end{aligned} \quad (1.10)$$

на L_j ($j=1, 2$)

Пренебрегая в выражениях, содержащихся в фигурных скобках последних равенств, величиной y , численно не превосходящей R_j , по сравнению с остальными слагаемыми (мы предполагаем, что в сумме они столь же резко, как f , превалируют над величиной y), получим

$$\begin{aligned} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) &= k_1 \cos(n, x) \\ X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) &= k_2 \cos(n, y) \end{aligned} \quad \text{на } L_j (j=1, 2) \quad (1.11)$$

где для краткости положено

$$k_1 = nh \left(1 - \frac{X_x^{(\infty)}}{nh} \right), \quad k_2 = h \left(1 - \frac{Y_y^{(\infty)}}{h} \right), \quad h = \rho g f \quad (1.12)$$

Как было упомянуто выше, нас главным образом интересует напряженное состояние вблизи границ L_j ($j=1, 2$). Учитывая при этом условие $f \gg R_j$ ($j=1, 2$), нетрудно прийти к очевидному заключению, что мы получим решение, весьма близкое к истинному (в особенности в зоне, не чрезмерно удаленной от L_j ($j=1, 2$)), отказавшись от точного удовлетворения предельному равенству (1.9), но, разумеется, непременно соблюдая предельные равенства (1.11). Исходя из этого, допустимо считать упругую среду заполняющей бесконечную область S вместо полубесконечной области S^* . Это обстоятельство значительно облегчает рассмотрение вопроса. Таким образом, отыскание неизвестных X_x , X_y и Y_y сводится с достаточным приближением к интегрированию в области S дифференциальных (однородных) уравнений равновесия (1.1), уравнения совместности (1.2) при граничных условиях (1.11).

Примечание 1. Считаю необходимым отметить следующее обстоятельство. Сформулированная только что в несколько упрощенной постановке задача определения дополнительных напряжений, вообще говоря, может быть изучена с доведением до численных расчетов путем применения биполярной системы координат. Однако такое решение сопряжено с большими вычислительными трудностями и менее наглядно, нежели приведенное ниже. Помимо этого предлагаемый здесь прием, основанный на сведении задачи к интегральному уравнению с последующей его заменой эффективно разрешимой системой линейных алгебраических уравнений, допускает также рассмотрение (с выполнением числовых расчетов) областей иного очертания.

Примечание 2. В том случае, когда напряжения $X_x^{(\infty)}$ и $Y_y^{(\infty)}$ обращаются в нуль, постоянные (1.12) будут

$$k_1 = nh, \quad k_2 = h$$

и вблизи кривых L_j ($j=1, 2$) начальные напряжения будут равны:

$$X_x^{(0)} = -nh, \quad Y_y^{(0)} = -h, \quad X_y^{(0)} = 0 \quad (1.13)$$

Если же область S заполнена невесомой средой и подвержена на бесконечности действию напряжений

$$X_x^{(\infty)} = -nh, \quad Y_y^{(\infty)} = -h \quad (1.14)$$

то начальные напряжения точно совпадут с указанными в предшествующем равенстве, и кроме того, останутся теми же граничные равенства для дополнительных напряжений. Отсюда ясно, что напряженное состояние в части среды, расположенной в окрестности L_j ($j = 1, 2$), будет практически одинаковым в обоих случаях.

Введем теперь потенциалы Колосова-Мухелишвили ^[1], — функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного z , регулярные в области S и обращающиеся в нуль на бесконечности, с помощью которых компоненты X_x , X_y и Y_y выражаются известным образом.

Используя эти функции и проделав несложные вычисления, преобразуем граничные равенства (1.11) к форме

$$\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 2h_1(t - a_j) - 2h_2 \frac{R_j^2}{t - a_j} + C_j \quad \text{на } L_j \quad (j = 1, 2) \quad (1.15)$$

где t — аффикс точки кривой L_j и C_j — некоторые постоянные; кроме того,

$$2h_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad 2h_2 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad (1.16)$$

В данном случае, поскольку согласно допущению каждая из функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ равна нулю на бесконечности, ни одну из постоянных C_j ($j = 1, 2$) нельзя фиксировать произвольно; обе они являются неизвестными задачи.

Положим далее на кривой L_2

$$\varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = 2\omega(t) \quad (1.17)$$

где $\omega(t)$ — новая неизвестная вспомогательная функция. Так как потенциалы $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, удовлетворяющие предельным равенствам (1.15) и требуемому условию на бесконечности, существуют и определяются единственным образом, то, очевидно, может быть также найдена лишь единственная функция $\omega(t)$ из соотношения (1.17).

Мы дадим здесь решение задачи, обратив ход рассуждений. Именно, сначала мы займемся определением функции $\omega(t)$ и затем, зная ее, уже без труда найдем $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$.

В иллюстрирующем ниже решение числовом примере предполагается, что радиус одного отверстия втрое превосходит радиус другого и расстояние между отверстиями равно наименьшему из этих радиусов. При таком соотношении между основными размерами области S следует, естественно, ожидать значительной концентрации напряжений вблизи отверстия меньшего радиуса, что в свою очередь неизбежно в невыгодном смысле скажется на степени эффективности решения, заметно увеличив затруднения, связанные с проведением численных расчетов. Однако мы намеренно остановились на этом заведомо мало благоприятном случае, дабы наиболее вычлкло и полно выявить сильные и слабые стороны используемого метода.

§ 2. Для того чтобы установить формулы перехода от функции $\omega(t)$ к $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ и построить уравнение для определения $\omega(t)$, поступим следующим образом. Сложим (1.17) с равенством (1.15), соответствующим $j = 2$, и заменим во вновь полученном соотношении $\omega(t)$ разностью предельных значений (извне и изнутри S_2) интегралов типа Коши [с плотностью, равной же $\omega(t)$]. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{извне } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z} dt + \frac{h_2 R_2^2}{t_0 - a_2} = \\ = - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{изнутри } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z} dt + h_1(t_0 - a_2) + \frac{C_2}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем далее функцию $\varphi(z)$, регулярную в области S , обращающуюся в нуль на бесконечности и равную

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z} dt + \frac{h_2 R_2^2}{z - a_2} \quad (2.2)$$

Как следует из (2.1), функция $\varphi(z)$ на контуре L_2 совпадает с предельным значением некоторой функции, регулярной в S_2 . Следовательно, $\varphi(z)$ аналитически продолжима внутрь L_2 и является, таким образом, регулярной всюду вне L_1 . При этом в области S_2 имеем

$$\varphi(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z} dt + h_1(z - a_2) + \frac{C_2}{2} \quad (2.3)$$

Вычтем теперь (1.17) из равенства (1.15); взяв при этом во внимание соотношение, получаемое при сложении тех же (1.15) и (1.17), и поступая аналогично тому, как при выводе (2.1), будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_1(t_0) + \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{извне } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt + \frac{h_2 a_2 R_2^2}{(t_0 - a_2)^2} + \frac{h_2 R_2^4}{(t_0 - a_2)^3} = \\ = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{изнутри } L_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt - h_2(t_0 - a_2) - h_1 a_2 + \frac{\bar{C}_2}{2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассуждая, как выше, придем к заключению, что функция $\psi(z)$, задаваемая в S равенством

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt + \frac{h_2 a_2 R_2^2}{(z - a_2)^2} + \frac{h_2 R_2^4}{(z - a_2)^3} \quad (2.5)$$

будет, так же как $\varphi(z)$, регулярна всюду вне L_1 и равна нулю на бесконечности; в области S_2 для той же $\psi(z)$ имеет место равенство

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt - h_2(z - a_2) - h_1 a_2 + \frac{\bar{C}_2}{2} \quad (2.6)$$

Для интегралов Коши в равенствах (2.2) — (2.6) введем обозначения

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\omega(t)}{t-z} dt, \quad \psi^*(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt \quad (2.7)$$

§ 3. Выразим согласно формулам (2.2) и (2.5) функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ соответственно через $\varphi(z)$, $\varphi^*(z)$ и $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ и подставим их значения в граничное условие (1.15) на L_1 ; при этом разложим предварительно $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ в окрестности $z = a_2$ в ряды Тейлора и укоротим последние в той мере, в какой это допустимо, исходя из требуемой точности расчетов. Тогда после некоторых подчас довольно длинных, но элементарных преобразований будем иметь на L_1 приближенное равенство

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C_1 \quad (3.1)$$

Здесь введены обозначения

$$f(t) = 2h_1(t - a_1) - 2h_2 \frac{R_1^2}{t - a_1} + \sum_{h=0}^s \left[\alpha_h^* \left(\frac{R_2}{t - a_2} \right)^{h+1} + (k+1) \overline{\alpha_h^*} \left(\frac{R_2}{t - a_2} \right)^{k+1} \left\{ \left(\frac{R_2}{t - a_2} \right)^2 - \frac{t - a_2}{t - a_2} \right\} + \varepsilon_h \beta_h^* \left(\frac{R_2}{t - a_2} \right)^{k+1} \right] \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_0 = 2$ и $\varepsilon_k = 1$ ($k = 1, \dots, s$); далее

$$\alpha_0^* = \alpha_0 + h_2 R_2, \quad \alpha_k^* = \alpha_k \quad (k = 1, \dots, s), \quad \beta_k^* = \beta_k \quad (k = 0, 1, \dots, s) \quad (3.3)$$

причем α_k и β_k — неизвестные пока функционалы, равные

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi i R_2^{k+1}} \int_{L_2} \omega(t) (t - a_2)^k dt, \quad \beta_k = \frac{1}{2\pi i R_2^{k+1}} \int_{L_2} \omega(t) \overline{(t - a_2)^k} dt \quad (3.4)$$

и, наконец, s — некоторое фиксированное число; оно указывает на число слагаемых, учитываемых в упомянутых рядах Тейлора.

Нетрудно сообразить, что функционалы α_k и β_k ($k = 1, \dots, s$) суть вещественные величины. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно обратить внимание на то обстоятельство, что граничные равенства (1.15), равно как уравнения кривых L_j ($j = 1, 2$), записанные в комплексной форме, не зависят явно от i , и затем попутно с этим провести не представляющий труда анализ (хотя бы не эффективного) выражения, которое может быть получено для потенциалов Колосова-Мусхелишвили при помощи резольвенты какого-либо из существующих интегральных уравнений в плоской теории упругости. Вещественность α_k и β_k , естественно, упрощает до некоторой степени последующие вычисления.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, поскольку они регулярны вне L_1 , легко могут быть определены из равенства (3.1). Именно, рассматривая наряду с последним равенство, с ним сопряженное, найдем при помощи общеизвестного метода Н. И. Мусхелишвили

$$\varphi(z) = -2\lambda h_2 R_2 \nu(z) + \quad (3.5)$$

$$+ \sum_{h=0}^s \left[\alpha_h^* (k+1) \left\{ \chi_{h+3}(z) - \frac{z - a_2}{R_2} \chi_{h+2}(z) - (k+2) \lambda^2 \varepsilon^{h+3} \right\} + \varepsilon_h \beta_h^* \chi_{h+1}(z) \right]$$

$$\{(a_1 + R_1 \nu(z)) \varphi'(z) + \psi(z) = 2\lambda q h_2 R_2 \nu(z) + \quad (3.6)$$

$$+ \sum_{h=0}^s \alpha_h^* \{ \chi_{h+1}(z) - (k+1) \lambda \varepsilon^{h+2} \nu(z) \}$$

В формулах (3.5) и (3.6) для сокращения введены обозначения

$$\begin{aligned} \chi_k(z) &= \chi_k^*(z) - \varepsilon^k, & \chi_k^*(z) &= \left\{ \frac{R_2(z - a_1)}{R_1^2 + c(z - a_1)} \right\}^k \\ \nu(z) &= \frac{R_1}{z - a_1}, & \varepsilon &= \frac{R_2}{c}, & \lambda &= \frac{R_1}{R_2}, & q &= \frac{h_1}{h_2}, & c &= a_1 - a_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вновь введенные функции $\chi_k(z)$ регулярны вне L_1 и обращаются в нуль на бесконечности. Для дальнейшего приведем некоторые вспомогательные соотношения, связывающие две их первые производные с теми же функциями со смежными индексами:

$$R_2 \chi_k'(z) = k \nu^2(z) \{ \chi_{k+1}(z) + \varepsilon^{k+1} \} \quad (3.8)$$

$$R_2^2 \chi_k''(z) = k \nu^3(z) \left[(k+1) \nu(z) \{ \chi_{k+2}(z) + \varepsilon^{k+2} \} - \frac{2}{\lambda} \{ \chi_{k+1}(z) + \varepsilon^{k+1} \} \right]$$

Далее, дифференцируя дважды по z первое из равенств (3.5) и проделав несложные вычисления, найдем

$$R_2 \varphi'(z) = 2h_2 R_2 \nu^2(z) + \sum_{k=0}^s \{ \alpha_k^* P_k^{(1)}(z) + \varepsilon_k \beta_k^* Q_k^{(1)}(z) \} \quad (3.9)$$

$$R_2^2 \varphi''(z) = -\frac{4}{\lambda} h_2 R_2 \nu^3(z) + \sum_{k=0}^s \{ \alpha_k^* P_k^{(2)}(z) + \varepsilon_k \beta_k^* Q_k^{(2)}(z) \} \quad (3.10)$$

В этих формулах положено

$$\begin{aligned} P_k^{(1)}(z) &= (k+1) \left[\varepsilon^{k+2} - \chi_{k+2}^*(z) - (k+2) \nu(z) \left\{ \lambda + \frac{1}{\varepsilon} \nu(z) \right\} \chi_{k+3}^*(z) + \right. \\ &\quad \left. + (k+3) \nu^2(z) \chi_{k+4}^*(z) \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} P_k^{(2)}(z) &= (k+1) \nu^3(z) \left[2(k+2) \frac{1}{\varepsilon \lambda} \chi_{k+3}^*(z) - \right. \\ &\quad \left. - (k+3) \left\{ \frac{2}{\lambda} + (k+2) \left(\lambda + \frac{1}{\varepsilon} \nu(z) \right) \right\} \chi_{k+4}^*(z) + (k+3)(k+4) \nu(z) \chi_{k+5}^*(z) \right] \end{aligned}$$

$$Q_k^{(1)}(z) = (k+1) \nu^2(z) \chi_{k+2}^*(z)$$

$$Q_k^{(2)}(z) = (k+1) \nu^3(z) \left\{ (k+2) \nu(z) \chi_{k+3}^*(z) - \frac{2}{\lambda} \chi_{k+2}^*(z) \right\}$$

Помимо формул (3.9) и (3.10), отметим также легко вытекающие из них и (3.6) важные соотношения:

$$\bar{z} \varphi'(z) + \psi(z) = -\lambda \left(\nu(z) - \frac{1}{\nu(z)} \right) \{ R_2 \varphi'(z) \} + \quad (3.12)$$

$$+ 2\lambda q h_2 R_2 \nu(z) + \sum_{k=0}^s \alpha_k^* \{ \chi_{k+1}(z) - (k+1) \lambda \varepsilon^{k+2} \nu(z) \}$$

$$R_2 \{ \bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) \} = \nu^2(z) \{ R_2 \varphi'(z) \} - \lambda \left(\nu(z) - \frac{1}{\nu(z)} \right) \{ R_2^2 \varphi''(z) \} -$$

$$- 2q h_2 R_2 \nu^2(z) + \sum_{k=0}^s \alpha_k^* (k+1) \nu^2(z) \{ \chi_{k+2}^*(z) + \varepsilon^{k+2} \}$$

Значения

$m \ n$	0	1	2	3	4
0	1.0	0	0	0	0
1	0.3125	0.35156 10^{-1}	0.10986 10^{-1}	0.34332 10^{-2}	0.10729 10^{-2}
2	0.97656 10^{-1}	0.21973 10^{-1}	0.81024 10^{-2}	0.29182 10^{-2}	0.10326 10^{-2}
3	0.30518 10^{-1}	0.40300 10^{-1}	0.43774 10^{-2}	0.17735 10^{-2}	0.6945 10^{-3}
4	0.95367 10^{-2}	0.42915 10^{-2}	0.20653 10^{-2}	0.9260 10^{-3}	0.3956 10^{-3}
5	0.29802 10^{-2}	0.16764 10^{-2}	0.9010 10^{-3}	0.4419 10^{-3}	0.2038 10^{-3}
6	0.9313 10^{-3}	0.6286 10^{-3}	0.3732 10^{-3}	0.1984 10^{-3}	0.981 10^{-4}
7	0.2910 10^{-3}	0.2292 10^{-3}	0.1490 10^{-3}	0.852 10^{-4}	0.449 10^{-4}
8	0.909 10^{-4}	0.818 10^{-4}	0.578 10^{-4}	0.354 10^{-4}	0.197 10^{-4}
9	0.284 10^{-4}	0.288 10^{-4}	0.219 10^{-4}	0.143 10^{-4}	0.84 10^{-4}
10	0.89 10^{-5}	0.100 10^{-4}	0.82 10^{-5}	0.57 10^{-5}	0.35 10^{-5}

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, определяемые (3.5) и (3.6), удовлетворяют равенству (3.1) лишь с точностью до некоторой постоянной. Это, впрочем, сразу вытекает из общих соображений, тесно связанных с теоремой Гарнака и относящихся к вопросу об эквивалентности известных функциональных уравнений Н. И. Мухелишвили основным граничным задачам плоской теории упругости. Для того чтобы равенство (3.1) соблюдалось точно, необходимо¹ постоянную C_1 взять равной

$$C_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(t) \frac{dt}{t - a_1} \quad (3.13)$$

что в силу (3.2) дает

$$C_1 = - \sum_{k=0}^s \varepsilon^{k+1} [\alpha_k^* \{(k+1) \varepsilon^2 (1 + \lambda^2 (k+2)) - k\} + \varepsilon_k \beta_k^*] \quad (3.14)$$

§ 4. Займемся теперь построением уравнения для функции $\omega(t)$ и затем составлением системы линейных алгебраических уравнений, из которой могут быть найдены величины α_n и β_n , являющиеся, кстати говоря, с точностью до знака коэффициентами Фурье функции $\omega(t)$.

Подставим в равенство (1.17) вместо функций $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ их выражения из формул (2.2) и (2.5), взятых на контуре L_2 . Используя при этом свойства интегралов типа Коши, без труда найдем

$$\omega(t) = \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \beta_0 \frac{t - a_2}{R_2} + \alpha_{-1} - h_2 R_2 \frac{R_2}{t - a_2} \quad (4.1)$$

где α_{-1} — функционал, определяемый первой из формул (3.4) при $k = -1$. Заменяя в последнем равенстве функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ их приближенными значениями из (3.5) и (3.6), получим приближенное же интегральное уравнение для $\omega(t)$ с вырожденными ядрами. Мы приведем его чуть ниже в несколько преобразованном виде.

¹ В этом легко убедиться, записав правые части формул (3.5) и (3.6) в виде (распространенных по кривой L_1) интегралов Коши соответственно с плотностями $f(t)$ и $\overline{f(t)}$ и подставив из них выражения для $\varphi(t)$ и $t\overline{\varphi'(t)} + \psi(t)$ (после предельного перехода $z \rightarrow t$ на L_1) в равенство (3.1).

Таблица 1

коэффициентов P_{mn}

5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0
$0.3353 \cdot 10^{-3}$	$0.1048 \cdot 10^{-3}$	$0.327 \cdot 10^{-4}$	$0.102 \cdot 10^{-4}$	$0.32 \cdot 10^{-5}$	$0.10 \cdot 10^{-5}$
$0.3604 \cdot 10^{-3}$	$0.1244 \cdot 10^{-3}$	$0.426 \cdot 10^{-4}$	$0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.49 \cdot 10^{-5}$	$0.16 \cdot 10^{-5}$
$0.2651 \cdot 10^{-3}$	$0.992 \cdot 10^{-4}$	$0.365 \cdot 10^{-4}$	$0.133 \cdot 10^{-4}$	$0.48 \cdot 10^{-5}$	$0.17 \cdot 10^{-5}$
$0.1631 \cdot 10^{-3}$	$0.654 \cdot 10^{-4}$	$0.256 \cdot 10^{-4}$	$0.99 \cdot 10^{-5}$	$0.37 \cdot 10^{-5}$	$0.14 \cdot 10^{-5}$
$0.899 \cdot 10^{-4}$	$0.383 \cdot 10^{-4}$	$0.159 \cdot 10^{-4}$	$0.65 \cdot 10^{-5}$	$0.26 \cdot 10^{-5}$	$0.10 \cdot 10^{-5}$
$0.460 \cdot 10^{-4}$	$0.207 \cdot 10^{-4}$	$0.91 \cdot 10^{-5}$	$0.39 \cdot 10^{-5}$	$0.16 \cdot 10^{-5}$	$0.7 \cdot 10^{-6}$
$0.223 \cdot 10^{-4}$	$0.106 \cdot 10^{-4}$	$0.48 \cdot 10^{-5}$	$0.21 \cdot 10^{-5}$	$0.10 \cdot 10^{-5}$	$0.4 \cdot 10^{-6}$
$0.103 \cdot 10^{-4}$	$0.51 \cdot 10^{-5}$	$0.25 \cdot 10^{-5}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$	$0.5 \cdot 10^{-6}$	$0.2 \cdot 10^{-6}$
$0.46 \cdot 10^{-5}$	$0.24 \cdot 10^{-5}$	$0.12 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$	$0.3 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-6}$
$0.20 \cdot 10^{-5}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$	$0.6 \cdot 10^{-6}$	$0.3 \cdot 10^{-6}$	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0

Каждая из функций $\chi_m^*(z)$ может быть в некоторой окрестности $z = a_2$ представлена рядом Тейлора

$$\chi_m^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn} \left(\frac{z - a_2}{R_2} \right)^n \tag{4.2}$$

с коэффициентами разложения

$$P_{mn} = \left(\frac{\varepsilon}{1 - \lambda^2 \varepsilon^2} \right)^{m+n} m \sum_{k_1=0}^{E(n,m)} (-1)^{k_1} \frac{(m+n-k_1-1)!}{(m-k_1)! (n-k_1)! k_1!} (1 - \lambda^2 \varepsilon^2)^{k_1} \tag{4.3}$$

В них верхний предел суммирования берется в зависимости от того, каково соотношение между числами m и n ; именно, $E(n, m) = n$, если $n \leq m$, и $E(n, m) = m$, если $n > m$. Радиус сходимости этого ряда, как нетрудно усмотреть из (3.7), равен $c - R_1^2 / c$.

Значения p_{mn} для $R_1 = 3R_2$ и $c = 5R_2$ приведены в табл. 1.

В подобные же ряды и, очевидно, с тем же радиусом сходимости могут быть также разложены функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Опуская выкладки, приводим лишь окончательные результаты:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(s)} \left(\frac{z - a_2}{R_2} \right)^n - 2\beta_0 \varepsilon, \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{(s)} \left(\frac{z - a_2}{R_2} \right)^n \tag{4.4}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(s)} &= \sum_{k=0}^s (\varphi_{kn}^{(1)} \alpha_k + \varphi_{kn}^{(2)} \beta_{k+1}) + 2\beta_0 p_{1n} + h_2 R_2 c_n \\ \psi_n^{(s)} &= \sum_{k=0}^s (\psi_{kn}^{(1)} \alpha_k + \psi_{kn}^{(2)} \beta_{k+1}) - \\ &- 2\beta_0 \left\{ \lambda^2 \sum_{n_1=0}^n (n - n_1 + 1) \varepsilon^{n-n_1+2} p_{1n_1} + \frac{a_2}{R_2} (n+1) p_{1, n+1} \right\} + \\ &+ h_2 R_2 \left\{ -\frac{a_1}{R_2} (n+1) c_{n+1} + \lambda^2 (b_n + \varepsilon^{n+3} - 2q\varepsilon^{n+1}) + p_{1n} \right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

при следующих значениях введенных здесь величин:

$$\begin{aligned}\varphi_{00}^{(1)} &= p_{30} - \varepsilon^3 (2\lambda^2 + 1) \\ \varphi_{k1}^{(1)} &= (k+1)(p_{k+3,1} - p_{k+2,0} + \varepsilon^{k+2}) \quad (k=0, 1, \dots, s) \\ \varphi_{kn}^{(1)} &= (k+1)(p_{k+3,n} - p_{k+2,n-1}) \quad (k=0, 1, \dots, s; n=2, 3, \dots, \infty) \\ \varphi_{kn}^{(2)} &= p_{k+2,n} \quad (k=0, 1, \dots, s; n=0, 1, \dots, \infty)\end{aligned}\quad (4.6)$$

и выражаемые при помощи последних $\psi_{kn}^{(1)}$ и $\psi_{kn}^{(2)}$ равны:

$$\begin{aligned}\psi_{kn}^{(1)} &= -\frac{a_1}{R_2} (n+1) \varphi_{k,n+1}^{(1)} + \varphi_{k-1,n}^{(2)} + \lambda^2 \varepsilon \{ \omega_{kn}^{(1)} + (k+1) \varepsilon^{n+k+2} \} \\ \psi_{kn}^{(2)} &= -\frac{a_1}{R_2} (n+1) \varphi_{k,n+1}^{(2)} + \lambda^2 \varepsilon \omega_{kn}^{(2)} \quad (k=0, 1, \dots, s; n=0, 1, \dots, \infty)\end{aligned}\quad (4.7)$$

причем

$$\omega_{kn}^{(1)} = \sum_{m=1}^{n+1} m \varepsilon^{n-m+1} \varphi_{km}^{(1)}, \quad \omega_{kn}^{(2)} = \sum_{m=1}^{n+1} m \varepsilon^{n-m+1} \varphi_{km}^{(2)} \quad (4.8)$$

Затем в коэффициентах разложения свободного члена функции $\psi(z)$ положено

$$c_n = \varphi_{0n}^{(1)} + 2\lambda^2 \varepsilon^{n+1}, \quad b_n = \sum_{n_1=1}^{n+1} n_1 \varepsilon^{n-n_1+2} c_{n_1} \quad (4.9)$$

Кроме того, в формулах (4.4) и (4.5) нужно опустить слагаемое, содержащее β_{s+1} . Внося, далее, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (4.4) и (4.5) в равенство (4.1) и проделав несложные вычисления, получим на L_2

$$\omega(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n^{(s)} \left(\frac{t-a_2}{R_2} \right)^n + \beta_0 \frac{t-a_2}{R_2} + \alpha_{-1} \quad (4.10)$$

$$\omega_n^{(s)} = \sum_{k=0}^s (\varphi_{kn}^{(1)} \alpha_k + \varphi_{kn}^{(2)} \beta_{k+1}) + 2\beta_0 p_{1n} + h_2 R_2 c_n \quad (n=2, 3, \dots, \infty)$$

$$\omega_{-n}^{(s)} = \sum_{k=0}^s (\chi_{kn}^{(1)} \alpha_k + \chi_{kn}^{(2)} \beta_{k+1}) + 2\beta_0 \delta_n + h_2 R_2 d_n \quad (n=0, 1, \dots, \infty)$$

где штрих при знаке суммы означает пропуск слагаемого, соответствующего $n=1$, и в дополнение к указанным обозначениям положено

$$\begin{aligned}\chi_{kn}^{(1)} &= \frac{n+1}{\varepsilon} \varphi_{k,n+1}^{(1)} - (n+2) \varphi_{k,n+2}^{(1)} - \varphi_{k-1,n}^{(2)} - \\ &\quad - \lambda^2 \varepsilon \{ \omega_{kn}^{(1)} + (k+1) \varepsilon^{k+n+2} \} + \mu_n \varphi_{k0}^{(1)}\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\chi_{kn}^{(2)} = \frac{n+1}{\varepsilon} \varphi_{k,n+1}^{(2)} - (n+2) \varphi_{k,n+2}^{(2)} - \lambda^2 \varepsilon \omega_{kn}^{(2)}$$

$$\delta_n = -(n+2) p_{1,n+2} + \lambda^2 \varepsilon^2 \sum_{n_1=0}^n (n-n_1+1) \varepsilon^{n-n_1} p_{1n_1} + \mu_n (p_{10} - \varepsilon)$$

$$d_n = \frac{n+1}{\varepsilon} c_{n+1} - (n+2) c_{n+2} - \lambda^2 (b_n + \varepsilon^{n+3} - 2q\varepsilon^{n+1}) - p_{1n} + \mu_n (c_0 + \varepsilon) - \lambda_n$$

причем следует взять $\mu_0 = 1$, $\mu_n = 0$ ($n \neq 0$) и $\lambda_1 = 1$, $\lambda_n = 0$ ($n \neq 1$).

Умножим теперь обе части равенства (4.10) последовательно на выражение

$$(2\pi i R_2^{n+1})^{-1} (t - a)^n dt \quad (n = -1, 0, 1, \dots, s) \quad (4.12)$$

и с ним сопряженное при значениях индекса $n = 0, 1, \dots, s$ и проинтегрируем каждое из них по контуру L_2 (не упуская из внимания направление его обхода). Выделяя при этом первое уравнение, соответствующее $n = -1$, получим

$$\alpha_{-1} = -\frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^s (\chi_{k0}^{(1)} \alpha_k + \chi_{k0}^{(2)} \beta_{k+1}) + 2\beta_0 \delta_0 + h_2 R_2 d_0 \right] \quad (4.13)$$

Затем относительно α_k и β_{k+1} ($k = 0, 1, \dots, s$) (помня, что β_{s+1} не учитывается) будем иметь систему

$$\alpha_n = -\sum_{k=0}^s (\alpha_k \chi_{k, n+1}^{(1)} + \beta_{k+1} \chi_{k, n+1}^{(2)}) - 2\beta_0 \delta_{n+1} - h_2 R_2 d_{n+1} \quad (n=0, 1, \dots, s) \quad (4.14)$$

$$\beta_n = \sum_{k=0}^s (\alpha_k \varphi_{k, n+1}^{(1)} + \beta_{k+1} \varphi_{k, n+1}^{(2)}) + 2\beta_0 p_{1, n+1} + h_2 R_2 c_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots, s) \quad (4.15)$$

Из уравнений второй группы с входящими в них главными (не содержащимися под знаком суммы) членами β_k выпадает обращающееся в тождество уравнение, отвечающее нулевому значению индекса n . Отсюда можно сделать вывод, что соотношение (4.10), если его рассматривать как интегральное уравнение относительно функций $\omega(t)$, позволяет определить последнюю лишь с точностью до некоторого оператора, линейно зависящего от β_0 ; говоря иными словами, однородное интегральное уравнение (4.10) имеет одно нетривиальное решение, и соответствующая ему фундаментальная функция союзного ядра автоматически удовлетворяет требуемому условию ортогональности.

Несколько ниже будет установлено дополнительное уравнение для определения β_0 . Пока же, изучая систему (4.14) и (4.15), отнесем в ней временно слагаемые, содержащие β_0 , к известной правой части.

Положим для удобства

$$x_{2n} = \alpha_n \quad (n = 0, 1, \dots, s), \quad x_{2n-1} = \beta_n \quad (n = 1, \dots, s) \quad (4.16)$$

$$a_{2n-1, 2k} = -\varphi_{k, n+1}^{(1)}, \quad a_{2n-1, 2k+1} = -\varphi_{k, n+1}^{(2)}, \quad a_{2n-1, 2n-1} = 1 - \varphi_{n-1, n+1}^{(2)}$$

$$a_{2n, 2k} = \chi_{k, n+1}^{(1)}, \quad a_{2n, 2n} = 1 + \chi_{n, n+1}^{(1)}, \quad a_{2n, 2k-1} = \chi_{k-1, n+1}^{(2)}$$

$$f_{2n}^{(0)} = -(2\beta_0 \delta_{n+1} + h_2 R_2 d_{n+1}), \quad f_{2n-1}^{(0)} = 2\beta_0 p_{1, n+1} + h_2 R_2 c_{n+1}$$

При этом система (4.14) и (4.15) примет вид:

$$\sum_{k=0}^{2s} a_{n, k} x_k = f_n^{(0)} \quad (n = 0, 1, \dots, 2s). \quad (4.17)$$

Допустим, что она каким-либо образом разрешена относительно неизвестных x_k ($k = 0, 1, \dots, 2s$).

Таблица 2

Значения a_{nk}

$n k$	0	1	2	3	4
0	0.873870	$0.35191 \cdot 10^{-1}$	$-0.99302 \cdot 10^{-1}$	$0.18987 \cdot 10^{-1}$	$-0.54198 \cdot 10^{-2}$
1	$0.17595 \cdot 10^{-1}$	0.9918976	$0.16469 \cdot 10^{-1}$	$-0.43774 \cdot 10^{-2}$	$0.10172 \cdot 10^{-2}$
2	$-0.49651 \cdot 10^{-1}$	$0.16469 \cdot 10^{-1}$	0.949984	$0.10354 \cdot 10^{-1}$	$-0.34134 \cdot 10^{-1}$
3	$0.63289 \cdot 10^{-2}$	$-0.29182 \cdot 10^{-2}$	$0.69028 \cdot 10^{-2}$	0.998227	$0.48702 \cdot 10^{-2}$
4	$-0.18584 \cdot 10^{-1}$	$0.67805 \cdot 10^{-2}$	$-0.22757 \cdot 10^{-1}$	$0.52975 \cdot 10^{-2}$	0.982005
5	$0.22237 \cdot 10^{-2}$	$-0.10326 \cdot 10^{-2}$	$0.27558 \cdot 10^{-2}$	$-0.6945 \cdot 10^{-3}$	$0.21666 \cdot 10^{-2}$
6	$-0.66904 \cdot 10^{-2}$	$0.26062 \cdot 10^{-2}$	$-0.96024 \cdot 10^{-2}$	$0.21076 \cdot 10^{-2}$	$-0.86166 \cdot 10^{-2}$
7	$0.7675 \cdot 10^{-3}$	$-0.3604 \cdot 10^{-3}$	$0.10628 \cdot 10^{-2}$	$-0.2651 \cdot 10^{-3}$	$0.9171 \cdot 10^{-3}$
8	$-0.23342 \cdot 10^{-2}$	$0.9588 \cdot 10^{-3}$	$-0.38868 \cdot 10^{-2}$	$0.8642 \cdot 10^{-3}$	$-0.38598 \cdot 10^{-2}$
9	$0.2612 \cdot 10^{-3}$	$-0.1244 \cdot 10^{-3}$	$0.3994 \cdot 10^{-3}$	$-0.992 \cdot 10^{-4}$	$0.3744 \cdot 10^{-3}$
10	$-0.7951 \cdot 10^{-3}$	$0.3432 \cdot 10^{-3}$	$-0.15111 \cdot 10^{-2}$	$0.3400 \cdot 10^{-3}$	$-0.16482 \cdot 10^{-2}$
11	$0.879 \cdot 10^{-4}$	$-0.426 \cdot 10^{-4}$	$0.1472 \cdot 10^{-3}$	$-0.365 \cdot 10^{-4}$	$0.1485 \cdot 10^{-3}$
12	$-0.2651 \cdot 10^{-3}$	$0.1208 \cdot 10^{-3}$	$-0.5638 \cdot 10^{-3}$	$0.1311 \cdot 10^{-3}$	$-0.6483 \cdot 10^{-3}$
13	$0.293 \cdot 10^{-4}$	$-0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.532 \cdot 10^{-4}$	$-0.133 \cdot 10^{-4}$	$0.573 \cdot 10^{-4}$
14	$-0.870 \cdot 10^{-4}$	$0.437 \cdot 10^{-4}$	$-0.2126 \cdot 10^{-3}$	$0.568 \cdot 10^{-4}$	$-0.2703 \cdot 10^{-3}$
$n k$	5	6	7	8	9
0	$0.88950 \cdot 10^{-2}$	$-0.26758 \cdot 10^{-1}$	$0.38372 \cdot 10^{-2}$	$-0.11670 \cdot 10^{-1}$	$0.15670 \cdot 10^{-2}$
1	$-0.20653 \cdot 10^{-2}$	$0.52128 \cdot 10^{-2}$	$-0.9010 \cdot 10^{-3}$	$0.23980 \cdot 10^{-2}$	$-0.3732 \cdot 10^{-3}$
2	$0.55112 \cdot 10^{-2}$	$-0.19298 \cdot 10^{-1}$	$0.26577 \cdot 10^{-2}$	$-0.97218 \cdot 10^{-2}$	$0.11983 \cdot 10^{-2}$
3	$-0.9260 \cdot 10^{-3}$	$0.28104 \cdot 10^{-2}$	$-0.4419 \cdot 10^{-3}$	$0.14400 \cdot 10^{-2}$	$-0.1984 \cdot 10^{-2}$
4	$0.28890 \cdot 10^{-2}$	$-0.11488 \cdot 10^{-1}$	$0.15281 \cdot 10^{-2}$	$-0.64290 \cdot 10^{-2}$	$0.7487 \cdot 10^{-3}$
5	0.999604	$0.13752 \cdot 10^{-2}$	$-0.2038 \cdot 10^{-3}$	$0.7675 \cdot 10^{-3}$	$-0.981 \cdot 10^{-4}$
6	$0.13757 \cdot 10^{-2}$	0.996320	$0.7888 \cdot 10^{-3}$	$-0.37122 \cdot 10^{-2}$	$0.4151 \cdot 10^{-3}$
7	$-0.1631 \cdot 10^{-3}$	$0.6312 \cdot 10^{-3}$	0.999910	$0.3790 \cdot 10^{-3}$	$-0.460 \cdot 10^{-4}$
8	$0.6146 \cdot 10^{-3}$	$-0.29723 \cdot 10^{-2}$	$0.3783 \cdot 10^{-3}$	0.998049	$0.2115 \cdot 10^{-3}$
9	$-0.654 \cdot 10^{-4}$	$0.2768 \cdot 10^{-3}$	$-0.383 \cdot 10^{-4}$	$0.1770 \cdot 10^{-3}$	0.999979
10	$0.2606 \cdot 10^{-3}$	$-0.13624 \cdot 10^{-2}$	$0.1722 \cdot 10^{-3}$	$-0.9606 \cdot 10^{-3}$	$0.1035 \cdot 10^{-3}$
11	$-0.256 \cdot 10^{-4}$	$0.1168 \cdot 10^{-3}$	$-0.159 \cdot 10^{-4}$	$0.795 \cdot 10^{-4}$	$-0.91 \cdot 10^{-5}$
12	$0.1089 \cdot 10^{-3}$	$-0.6208 \cdot 10^{-3}$	$0.766 \cdot 10^{-4}$	$-0.4653 \cdot 10^{-3}$	$0.487 \cdot 10^{-4}$
13	$-0.99 \cdot 10^{-5}$	$0.480 \cdot 10^{-4}$	$-0.65 \cdot 10^{-5}$	$0.350 \cdot 10^{-4}$	$-0.39 \cdot 10^{-5}$
14	$0.398 \cdot 10^{-4}$	$-0.2639 \cdot 10^{-3}$	$0.249 \cdot 10^{-4}$	$-0.2001 \cdot 10^{-3}$	$0.183 \cdot 10^{-4}$
$n k$	10	11	12	13	14
0	$-0.47689 \cdot 10^{-2}$	$0.6156 \cdot 10^{-3}$	$-0.18534 \cdot 10^{-2}$	$0.2342 \cdot 10^{-3}$	$-0.6939 \cdot 10^{-3}$
1	$0.10284 \cdot 10^{-2}$	$-0.1490 \cdot 10^{-3}$	$0.4195 \cdot 10^{-3}$	$-0.578 \cdot 10^{-4}$	$0.1648 \cdot 10^{-3}$
2	$-0.45248 \cdot 10^{-2}$	$0.5145 \cdot 10^{-3}$	$-0.19856 \cdot 10^{-3}$	$0.2135 \cdot 10^{-3}$	$-0.8351 \cdot 10^{-3}$
3	$0.6816 \cdot 10^{-3}$	$-0.852 \cdot 10^{-4}$	$0.3045 \cdot 10^{-3}$	$-0.354 \cdot 10^{-4}$	$0.1304 \cdot 10^{-3}$
4	$-0.32908 \cdot 10^{-2}$	$0.3464 \cdot 10^{-3}$	$-0.15808 \cdot 10^{-2}$	$0.1530 \cdot 10^{-3}$	$-0.7187 \cdot 10^{-3}$
5	$0.3930 \cdot 10^{-3}$	$-0.449 \cdot 10^{-3}$	$0.1890 \cdot 10^{-3}$	$-0.197 \cdot 10^{-4}$	$0.864 \cdot 10^{-4}$
6	$-0.20546 \cdot 10^{-2}$	$0.2052 \cdot 10^{-3}$	$-0.10531 \cdot 10^{-2}$	$0.962 \cdot 10^{-4}$	$-0.5132 \cdot 10^{-3}$
7	$0.2076 \cdot 10^{-3}$	$-0.223 \cdot 10^{-4}$	$0.1057 \cdot 10^{-3}$	$-0.103 \cdot 10^{-4}$	$0.512 \cdot 10^{-4}$
8	$-0.11643 \cdot 10^{-2}$	$0.1121 \cdot 10^{-3}$	$-0.6325 \cdot 10^{-3}$	$0.543 \cdot 10^{-4}$	$-0.3233 \cdot 10^{-3}$
9	$0.1032 \cdot 10^{-3}$	$-0.106 \cdot 10^{-4}$	$0.553 \cdot 10^{-4}$	$-0.51 \cdot 10^{-5}$	$0.280 \cdot 10^{-4}$
10	0.999396	$0.563 \cdot 10^{-4}$	$-0.3442 \cdot 10^{-3}$	$0.310 \cdot 10^{-4}$	$-0.1849 \cdot 10^{-3}$
11	$0.486 \cdot 10^{-4}$	0.999995	$0.273 \cdot 10^{-4}$	$-0.25 \cdot 10^{-5}$	$0.144 \cdot 10^{-4}$
12	$-0.3011 \cdot 10^{-3}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$	0.999808	$0.141 \cdot 10^{-4}$	$-0.975 \cdot 10^{-4}$
13	$0.222 \cdot 10^{-4}$	$-0.21 \cdot 10^{-5}$	$0.133 \cdot 10^{-4}$	0.999999	$0.72 \cdot 10^{-5}$
14	$-0.1309 \cdot 10^{-3}$	$0.89 \cdot 10^{-5}$	$-0.765 \cdot 10^{-4}$	$0.24 \cdot 10^{-5}$	0.999913

Значения f_n°

Таблица 3

n	0	1	2	3	4
$B_n^{(0)}$	$-0.947132 \cdot 10^{-1}$	$0.219726 \cdot 10^{-1}$	$-0.36452 \cdot 10^{-1}$	$0.688664 \cdot 10^{-2}$	$-0.125204 \cdot 10^{-1}$
$B_n^{(1)}$	0.550131	0.128405	$-0.482624 \cdot 10^{-1}$	$0.224711 \cdot 10^{-1}$	$0.128236 \cdot 10^{-1}$
$B_n^{(2)}$	-0.72	0	-0.144	0	$-0.288 \cdot 10^{-1}$
n	5	6	7	8	9
$B_n^{(0)}$	$0.21458 \cdot 10^{-2}$	$-0.40628 \cdot 10^{-2}$	$0.6706 \cdot 10^{-3}$	$-0.12768 \cdot 10^{-2}$	$0.2096 \cdot 10^{-3}$
$B_n^{(1)}$	$0.35363 \cdot 10^{-2}$	$0.103745 \cdot 10^{-1}$	$0.3845 \cdot 10^{-3}$	$0.44528 \cdot 10^{-2}$	$-0.308 \cdot 10^{-4}$
$B_n^{(2)}$	0	$-0.576 \cdot 10^{-2}$	0	$-0.1152 \cdot 10^{-2}$	0
n	10	11	12	13	14
$B_n^{(0)}$	$-0.3932 \cdot 10^{-3}$	$0.654 \cdot 10^{-4}$	$-0.1192 \cdot 10^{-3}$	$0.204 \cdot 10^{-4}$	$-0.358 \cdot 10^{-4}$
$B_n^{(1)}$	$0.15781 \cdot 10^{-2}$	$-0.418 \cdot 10^{-4}$	$0.5109 \cdot 10^{-3}$	$-0.201 \cdot 10^{-4}$	$0.1579 \cdot 10^{-3}$
$B_n^{(2)}$	$-0.2304 \cdot 10^{-3}$	0	$-0.461 \cdot 10^{-4}$	0	$-0.929 \cdot 10^{-5}$

Для того чтобы построить недостающее уравнение для β_0 , обратимся к не использованному до сих пор соотношению (2.3), справедливому в области S_2 .

Подставим вместо содержащейся в нем под знаком интеграла функции $\omega(t)$ ее выражение из формулы (4.1). Тогда, опираясь на свойства интегралов Коши и проделав простые вычисления, получим

$$\beta_0 - R_2 \varphi'(a_2) = -h_2 R_2 q \tag{4.18}$$

Внося затем в левую часть этого равенства значение второго слагаемого из (3.9), приходим к уравнению, из которого может быть найдена величина β_0 . Попутно с этим, полагая в том же соотношении (2.3) переменную $z = a_2$, будем иметь

$$\varphi(a_2) = -\alpha_{-1} + \frac{1}{2} C_2 \tag{4.19}$$

Наконец, присоединяя сюда формулу (3.5), взятую в той же точке $z = a_2$, и, кроме того, используя (4.13), определим также постоянную C_2 .

Значения коэффициентов a_{nk} и свободного члена $f_n^{(0)}$ при указанном выше числовом соотношении между основными размерами области $S (R_1 = 3R_2, c = 5R_2)$ даны в табл. 2 и 3; при этом в табл. 3 значения свободного члена определяются через $B_n^{(0)}, B_n^{(1)}$ и $B_n^{(2)}$ при помощи выражения

$$f_n^{(0)} = \beta_0 B_n^{(0)} + h_2 R_2 (B_n^{(1)} + q B_n^{(2)})$$

Обращает на себя внимание поведение элементов матрицы, составленной из коэффициентов a_{nk} для рассматриваемого же числового примера. Ее диагональные элементы близки к единице и, испытывая незначительные колебания, медленно приближаются к ней с увеличением их порядкового номера. В каждой строке матрицы элементы, предшествующие диагональному члену, оставаясь, что самое существенное, численно малыми по сравнению с единицей, либо несколько возрастают, либо

убывают. На первый взгляд не удастся уловить более четкой закономерности в поведении этих величин. Элементы же, по крайней мере с одноименными знаками, следующие с резким по величине спадом за диагональным членом, будучи также значительно меньше единицы, монотонно и довольно быстро численно убывают.

Так как число уравнений системы (4.17), которые нужно взять, чтобы получить ее решение с большей степенью точности, вообще говоря, довольно велико, то применение обычного метода последовательных приближений здесь представляется затруднительным. В то же время отмеченные свойства матрицы этой системы, естественно, наводят на мысль, что мы придем к быстро сходящемуся процессу, если первоначально укоротим матрицу до треугольной и затем учтем в надлежащей мере влияние отброшенных в ней элементов.

В соответствии со сказанным, введя параметр α , возьмем вместо системы (4.17) следующую:

$$\sum_{k=0}^n a_{nk} x_k = -\alpha \sum_{k=n+1}^{2s} a_{nk} x_k + f_n^{(0)} \quad (n = 0, 1, \dots, 2s) \quad (4.20)$$

Она, очевидно, совпадает с исходной при $\alpha = 1$. Будем искать ее решение x_k ($k = 0, 1, \dots, 2s$), положив

$$x_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l x_k^{(l)} \quad (k = 0, 1, \dots, 2s)$$

где $x_k^{(l)}$ — так называемые приближения порядка $l = 0, 1, 2, \dots$. Для нахождения каждого из них имеем систему

$$\sum_{k=0}^n a_{nk} x_k^{(l)} = f_n^{(l)} \quad (n = 0, 1, \dots, 2s) \quad (4.21)$$

В ней свободный член помимо задаваемого $f_n^{(0)}$ для нулевого приближения определяется для любого из следующих приближений посредством предшествующего согласно равенству

$$f_n^{(l)} = -\sum_{k=n+1}^{2s} a_{nk} x_k^{(l-1)} \quad (l = 1, 2, \dots, s) \quad (4.22)$$

Ясно, что из (4.21) неизвестные $x_k^{(l)}$ (при фиксированном l) могут быть найдены последовательно одно за другим.

Отметим, что численные расчеты более удобно вести, пользуясь эквивалентной процессу (4.21) схемой

$$x_n^{(l)} = -\frac{1}{a_{nn}} \left[\sum_{k=0}^{2s} a_{nk} x_k^{(v)} - \mu_l f_n^{(0)} \right] \quad (n = 0, 1, \dots, 2s; l = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.23)$$

Здесь штрих, приписанный справа к символу суммы, указывает на пропуск в ней слагаемого с индексом $k = n$; коэффициент μ_l имеет

тот же смысл, что в (4.11), и, кроме того, указатель ν нужно взять равным либо l , либо $l-1$, смотря по тому, будет ли k меньше n или больше n .

Некоторое подтверждение высказанной мысли о пригодности в разбираемом случае алгоритма (4.21) можно до известной степени найти также в следующем рассуждении.

Пусть x_n ($n=1, 2, \dots, 2s-1$) — корни определителя системы (4.20), расположенные так, что модули их возрастают (или во всяком случае не убывают) с увеличением индекса.

Ее решение x_k ($k=0, 1, \dots, 2s$), очевидно, является мероморфной функцией параметра x .

Поскольку система (4.20) совпадает с исходной (4.17) при $x=1$, непосредственно ясно, что определяемый (4.21) процесс последовательных приближений сходится лишь в том случае, если наименьший по модулю из упомянутых корней превосходит единицу, причем сходимостъ будет тем быстрее, чем более этот корень удален от единицы.

Далее, главные диагональные элементы определителя системы (4.20) совпадают с таковыми же элементами упоминавшейся выше матрицы. Как указывалось, они мало отличаются от единицы и стремятся к ней, хотя и не монотонно, по мере удаления от верхней строки. Элементы, лежащие слева от главной диагонали определителя, равны соответственным из величин a_{nk} ; эти же величины при подходящих n и k входят в качестве коэффициентов в зависящие от x элементы, расположенные справа от главной диагонали.

Все a_{nk} ($n \neq k$), как мы уже имели случай отметить, по абсолютному значению малы по сравнению с единицей; кроме того, имеющиеся из них одинаковые знаки численно монотонно убывают с возрастанием n (при фиксированном k).

Отсюда с большей степенью вероятности можно заключить, что все корни названного определителя, в том числе наименее удаленные из них от $x=0$, значительно превосходят по модулю единицу.

Это соображение вкупе с приведенным ранее (оба они, разумеется, не претендуют на абсолютную строгость и скорее базируются на доводах, носящих в изрядной мере интуитивный характер) позволяет рассчитывать на достаточно хорошую сходимостъ алгоритма (4.21).

Между прочим, о порядке модуля, ближайшего к $x=0$ корня того же определителя, можно примерно судить по модулям аналогичных же из корней диагональных миноров Δ_j ($j=2, 3, 4$), составленных из его начальных строк и столбцов.

Подсчет дает (первый из индексов указывает порядок минора)

$$\begin{array}{lll} x_{21} = 1399.9, & x_{31} = 96.6, & x_{32} = -296 \\ x_{41} = 87.32, & x_{42} = -357.4, & x_{43} = -693.6 \end{array} \quad (4.24)$$

Непосредственные вычисления показывают, что приближения $x_k^{(l)}$ ($l=0, 1, \dots$) на самом деле быстрее убывают. Нулевое и первое из них

приводят уже к достаточно точным значениям x_k ($k = 0, 1, \dots, 2s$); второе приближение вносит малые изменения лишь в первые две-три из этих величин и практически не влияет сколь-либо заметным образом на остальные.

Значения α_n и β_n

Таблица 4

n	$\alpha_n^{(1)}$	$\alpha_n^{(2)}$	$\beta_n^{(1)}$	$\beta_n^{(2)}$
0	0.542904	-0.731392	0.700976	-1.031846
1	-0.5129 10^{-1}	-0.151504	0.134110	-0.69751 10^{-2}
2	0.122881 10^{-1}	-0.336163 10^{-1}	0.245436 10^{-1}	-0.12409 10^{-2}
3	0.104246 10^{-1}	-0.93563 10^{-2}	0.40829 10^{-2}	-0.893 10^{-4}
4	0.45612 10^{-2}	-0.12466 10^{-2}	0.5298 10^{-3}	0.651 10^{-4}
5	0.16428 10^{-2}	-0.7049 10^{-3}	0.59 10^{-5}	0.697 10^{-4}
6	0.5328 10^{-3}	-0.2298 10^{-3}	-0.231 10^{-4}	0.250 10^{-4}
7	0.1685 10^{-3}	-0.785 10^{-4}	-0.174 10^{-4}	0.105 10^{-4}

Окончательные значения α_k и β_k ($k = 0, 1, \dots, s$) помещены в табл. 4, где эти коэффициенты определяются через $\alpha_n^{(1)}$, $\alpha_n^{(2)}$, $\beta_n^{(1)}$, $\beta_n^{(2)}$ при помощи следующих выражений:

$$\alpha_n = h_2 R_2 (\alpha_n^{(1)} + q\alpha_n^{(2)}), \quad \beta_n = h_2 R_2 (\beta_n^{(1)} + q\beta_n^{(2)})$$

Имея их в виду, дополнительно найдем из (4.13)

$$\alpha_{-1} = -h_2 R_2 (2.78423 + 1.76457 q) \quad (4.25)$$

и затем из (3.14) и (4.19) получим

$$C_1 = h_2 R_2 (-0.518259 + 0.532438 q), \quad (4.26)$$

$$C_2 = h_2 R_2 (1.59514 - 3.79332 q)$$

Примечание. Каждая из искоемых функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ может быть, как известно, представлена в виде суммы двух функций, одна из которых регулярна вне L_1 , а другая — вне L_2 . Определяемая (3.5) функция $\varphi(z)$ составляет часть $\varphi_1(z)$, регулярную вне L_1 . Ее можно записать в виде ряда Тейлора

$$\varphi(z) = h_2 R_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \left(\frac{R_1}{z - a_1} \right)^n \quad (4.27)$$

где

$$b_n^* = b_n^{(1)} + qb_n^{(2)}$$

Вычисленные на основании формулы (3.5), (3.7) и табл. 4 первые двенадцать коэффициентов этого разложения (они приведены в табл. 5) явно указывают на недостаточно удовлетворительную его сходимости, в особенности в точках, расположенных вблизи L_1 . Все же оно позволяет, если учесть лишь слагаемые с названными коэффициентами, получить с мало заметной погрешностью значение $\varphi(z)$. Однако было бы неосторожно без надлежащей проверки пользоваться укороченным рядом (4.27) при изучении напряженного состояния среды: ввиду наличия в формулах Колосова, связывающих напряжения с потенциалами $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, первой и второй производных от $\varphi_1(z)$, это могло бы привести к нежелательной погрешности в величинах напряжений.

Таблица 5

Значения $b_n^{(j)}$

n	1	2	3	4
$b_n^{(1)}$	-6.0286	-3.677 10^{-2}	5.14586 10^{-2}	-4.68005 10^{-2}
$b_n^{(2)}$	1.72771 10^{-1}	-6.9999 10^{-2}	2.14463 10^{-2}	-3.196 10^{-4}
n	5	6	7	8
$b_n^{(1)}$	3.6649 10^{-2}	-2.65653 10^{-2}	1.83629 10^{-2}	-1.229 10^{-2}
$b_n^{(2)}$	-7.46866 10^{-3}	9.15722 10^{-3}	-8.34824 10^{-3}	6.75011 10^{-3}
n	9	10	11	12
$b_n^{(1)}$	8.03559 10^{-3}	-5.16141 10^{-3}	3.27 10^{-3}	-2.04921 10^{-3}
$b_n^{(2)}$	-5.11322 10^{-3}	3.71628 10^{-3}	-2.62521 10^{-3}	1.81643 10^{-3}

§ 5. При помощи величин α_k и β_k ($k = 0, 1, \dots, s$) легко выписать приближенное значение $\omega(t)$. Оно будет равно:

$$\omega(t) = - \sum_{n=1}^{s+1} \left[\alpha_{n-1} \left(\frac{R_2}{t-a_2} \right)^n - \beta_{n-1} \left(\frac{t-a_2}{R_2} \right)^n \right] - \alpha_{-1} \quad (5.1)$$

Внеся отсюда $\omega(t)$ в формулы (2.7), после несложных вычислений найдем

$$R_2 \varphi^{*'}(z) = \sum_{n=1}^{s+1} n \alpha_{n-1} \left(\frac{R_2}{z-a_2} \right)^{n+1}$$

$$R_2 \{ \bar{z} \varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z) \} = \sum_{n=0}^{s+1} \mu_n(z) \left(\frac{R_2}{z-a_2} \right)^{n+2} \quad (5.2)$$

где положено

$$\mu_0(z) = 2\beta_0$$

$$\mu_n(z) = (n+1)\beta_n + n\alpha_{n-1} \left\{ (n+2) \frac{R_2}{z-a_2} - (n+1) \frac{\bar{z}-a_2}{R_2} \right\} \quad (5.3)$$

Взяв, далее, во внимание соотношения (2.2), (2.5) и (2.7), будем иметь

$$R_2 \varphi_1'(z) = R_2 \{ \varphi'(z) + \varphi^{*'}(z) \} + h_2 R_2 \left(\frac{R_2}{z-a_2} \right)^2$$

$$R_2 \{ \bar{z} \varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \} = R_2 \{ \bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) \} +$$

$$+ R_2 \{ \bar{z} \varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z) \} + h_2 R_2 \left(\frac{R_2}{z-a_2} \right)^2 \left\{ -2 \frac{\bar{z}-a_2}{z-a_2} + 3 \left(\frac{R_2}{z-a_2} \right)^2 \right\} \quad (5.4)$$

Эти выражения непосредственно входят в уже упоминавшиеся в конце предыдущего параграфа широко известные формулы Колосова

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z} \varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]. \quad (5.5)$$

Подсчитав значения (5.4) в отдельных точках среды, сразу найдем на основании (5.5) компоненты действующих в них напряжений.

Равенства (5.4) можно заменить гораздо более простыми и наглядными на окружности L_2 .

Действительно, исходя из основных формул (1.15) и (1.17) и учитывая наряду с ними (5.1), легко получим на L_2

$$\begin{aligned}
 R_2 \varphi_1'(t) &= h_2 R_2 q + \sum_{n=0}^s (n+1) \left\{ \alpha_n^* \left(\frac{R_2}{t-a_2} \right)^{n+2} + \beta_n^* \left(\frac{t-a_2}{R_2} \right)^n \right\} \\
 R_2 \{ t \varphi_1''(t) + \psi_1'(t) \} &= -2h_2 R_2 + \\
 &+ \sum_{n=0}^s (n+1) \left[\left\{ \alpha_n^* + \beta_n^* \left(\frac{R_2}{t-a_2} \right)^2 \right\} \left(\frac{t-a_2}{R_2} \right)^n + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \alpha_n^* \left(\frac{R_2}{t-a_2} \right)^2 + \beta_n^* \right\} \left(\frac{R_2}{t-a_2} \right)^{n+2} \right].
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Разумеется, этим формулам следует отдать предпочтение перед (5.4) при определении действующих вдоль L_2 компонент напряжений.

Иногда не столько важно знать напряжения в различных точках упругой среды, сколько их средние значения вдоль некоторого участка.

В данном случае представляет интерес определение средних значений дополнительных и полных напряжений на вещественном отрезке длиной $l = (a_1 - a_2) - (R_1 + R_2)$, лежащем между окружностями L_j ($j = 1, 2$).

Используя формулы (5.5), найдем для них после преобразований

$$\begin{aligned}
 (X_x)_{cp} &= \frac{1}{l} \left[4\varphi_1(z) - \{ \varphi_1(z) + z\varphi_1'(z) + \psi_1(z) \} \right]_{z=a_2+R_2}^{z=a_1-R_1} \\
 (Y_y)_{cp} &= \frac{1}{l} \left[\varphi_1(z) + z\varphi_1'(z) + \psi_1(z) \right]_{z=a_2+R_2}^{z=a_1-R_1} \\
 (X_x^{(1)})_{cp} &= -k_1 + (X_x)_{cp}, \quad (Y_y^{(1)})_{cp} = -k_2 + (Y_y)_{cp}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь в первых двух равенствах под квадратными скобками с правыми сторонами снизу и сверху аффиксами концов названного отрезка понимается приращение, испытываемое содержащимся в них выражением при движении переменного z вдоль этого отрезка. При помощи граничных равенств (1.15) средние значения дополнительных напряжений могут быть записаны в более простом виде:

$$\begin{aligned}
 (X_x)_{cp} &= \frac{1}{l} \left[4\varphi_1(z) \right]_{z=a_2+R_2}^{z=a_1-R_1} - (Y_y)_{cp} \\
 (Y_y)_{cp} &= \frac{1}{l} \{ 2h_2(1-q)(R_1 + R_2) + C_1 - C_2 \}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Для рассматриваемого здесь числового примера, принимая во внимание (2.2), (4.26), (4.27) и (5.1), найдем

$$(X_x)_{cp} = h_2(2.49493 + 1.40580 q), \quad (Y_y)_{cp} = h_2(5.88660 - 3.67424 q) \tag{5.9}$$

Примечание. Из указываемых ниже формул (5.10) видно, что слагаемое в $(X_x)_{ср}$, не зависящее от q , превосходит таковое же в заданных X_x на концах упомянутого отрезка. Это не должно вызывать удивление, ибо, как мы сейчас убедимся, и в случае плоскости с одним отверстием, неизмеримо проще поддающемся анализу, подобное обстоятельство [при сохранении соответствующего из условий (1.15)] также имеет место для множества вещественных отрезков, исходящих из границы. Действительно, взяв за контур отверстия, ослабляющего среду, какую-либо из кривых L_j ($j = 1, 2$), найдем, что на вещественной оси

$$X_x = 2h_2 \left(\frac{R_j}{z - a_j} \right)^2 \left[-3 \left(\frac{R_j}{z - a_j} \right)^2 + 4 \right] + q$$

В этом равенстве слагаемое, содержащее q , с самого начала монотонно убывает с удалением от L_j ; остальная же часть в нем сперва возрастает, достигая наиболь-

Таблица 6

Значения X_x, Y_y, X_y

z	$a_2 - R_2$	$a_2 + iR_2$	$a_2 + R_2$	$a_1 - R_1$	$a_1 + iR_1$	$a_1 + R_1$
A_x	2	-1.5798	2	2.0036	-6.0218	2.0000
B_x	2	0.42878	2	2.0021	-1.9041	2.0000
A_y	6.5945	-2	8.4727	5.9194	-2.0000	6.1475
B_y	-4.0642	2	-6.9370	-2.8962	2.0000	-2.1593
A_{xy}	0	0	0	0	-0.17 10^{-4}	0
B_{xy}	0	0	0	0	0.54 10^{-4}	0

шего значения, равного $\frac{2}{3} h_2$ при $z - a_j = \sqrt{\frac{3}{2}} R_j$, и затем уже убывает при дальнейшем увеличении z . Кстати отметим, что для этого же случая

$$Y_y = 2h_2 (3 - q) \quad \text{при } z = a_j \pm R$$

$$X_x = -2h_2 (3 + q) \quad \text{при } z = a_j + iR_j$$

Знание этих составляющих вместе с указываемыми выше в табл. 6 полезно для установления характера влияния одного из отверстий среды на напряженное состояние вблизи другого.

В табл. 6 приведены (при тех же числовых размерах) значения дополнительных напряжений X_x, Y_y, X_y в следующих наиболее характерных точках:

$$z = a_2 - R_2, \quad z = a_2 + iR_2, \quad z = a_2 + R_2, \quad z = a_1 - R_1, \quad z = a_1 + iR_1, \quad z = a_1 + R_1;$$

при этом значения напряжений даются через величины $A_x, B_x, A_y, B_y, A_{xy}, B_{xy}$ при помощи формул

$$X_x = h_2 (A_x + qB_x), \quad Y_y = h_2 (A_y + qB_y), \quad X_y = h_2 (A_{xy} + qB_{xy})$$

В силу (1.15) задаются

$$X_x = 2h_2 (1 + q), \quad X_y = 0 \tag{5.10}$$

для вещественных аффиксов $z = a_2 - R_2, z = a_2 + R_2, z = a_1 - R_1, z = a_1 + R_1$ и затем

$$Y_y = -2h_2 (1 - q), \quad X_y = 0 \tag{5.11}$$

в двух остальных точках $z = a_2 + iR_2$ и $z = a_1 + iR_1$.

Напряжения в точках $z = a_2 - R_2, z = a_2 + R_2$ и $z = a_1 - R_1, z = a_1 + R_1$ были вычислены посредством соотношений (5.6), справедливых лишь на контуре L_2 и, очевидно, обеспечивающих точное выполнение на нем соответствующего из условий (1.15).

Если же при определении напряжений на L_2 исходить из пригодных всюду в S выражений (5.4), то, в частности, получим:

при $z = a_2 + R_2$

$$X_x = h_2(2.0039 + 2.0001 q), \quad Y_y = h_2(8.4681 - 6.9373 q), \quad X_y = 0 \quad (5.12)$$

при $z = a_2 + iR_2$

$$\begin{aligned} X_x &= h_2(-1.5833 + 0.43229 q) \\ Y_y &= 1.9966 h_2(-1 + q) \\ X_y &= h_2(-0.011495 + 0.008284 q) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Как видно, эти числа относительно весьма близки к предшествующим. (В последней точке о степени отклонения составляющей X_y от предписанного нулевого значения нужно судить, сравнивая ее с соответствующим значением Y_y .) То обстоятельство, что предельные условия (1.15) с большей степенью точности соблюдаются в выбранных среди них наиболее опасных точках L_j ($j=1, 2$), дает известное основание думать, что с такой же степенью точности они будут удовлетворяться всюду на этих кривых. Величины же напряжений, которые могут быть посредством (5.4) найдены в различных точках среды, будут, повидимому, также весьма близки к истинным.

Из табл. 6 явствует, что в окрестности точки $z = a_2 + R_2$, как, впрочем, с самого начала можно было ожидать, имеет место значительная концентрация напряжений, обусловленная наличием близ расположенного дополнительного выреза с границей L_1 ; в меньшей степени она наблюдается в окрестности $z = a_2 - R_2$. При этом существенно искажается также поле напряжений вблизи $z = a_2 + iR_2$. В свою очередь ослабление среды, первоначально имеющей вырез, ограниченный контуром L_1 , дополнительным отверстием с контуром L_2 , вызывает некоторую, сравнительно невысокую концентрацию напряжений в окрестности $z = a_1 - R_1$. Здесь, проводя сопоставления, нужно иметь в виду указанные выше величины составляющих напряжений для плоскости с одним круговым отверстием.

Зная в точках среды дополнительные напряжения, найдем согласно (1.5) величины действующих в них полных напряжений.

В заключение мы позволим себе сделать следующее замечание. Как ясно из сказанного, формулы (5.4) позволяют для взятого в качестве иллюстрации числового примера определить напряженное состояние в среде с точностью, значительно превосходящей требуемую в практических расчетах. Между тем из анализа ряда приведенных формул и таблиц можно усмотреть, что, отбросив в (5.4) постоянные α_k и β_k ($k=3, 4, \dots, s$), мы получим значения напряжений, уклоняющиеся от истинных, по крайней мере в подавляющем числе практически важных случаев, не более чем на 3—5%. В то же время это значительно упростит технику вычислений и делает их в достаточной мере приемлемыми для практики инженерных расчетов.

Поступила 16 III 1951

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М. — Л. 1935.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. — Л. 1949.