ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

М. М. Фридман (Саратов)

Круглая тонкая изотропная плита единичного радиуса изгибается $M+N$ сосредоточенными силами P_k $(k=1,\ldots,M,\ M+1,\ldots,M+N)$, приложенными в точках

$$z_k = r_k e^{i\theta_k}$$

ее плоскости $|z_m|<1$ $(m=1,\ldots,M)$ и края $|z_n|=1$ $(n=M+1,\ldots,M+N)$.

При этом

$$\sum_{k=1}^{M+N} P_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{M+N} z_k P_k = 0$$

Средняя плоскость плиты принята за плоскость xy комплексного переменного $z = x+iy = re^{i\theta}$; ось Z направлена вертикально вниз. Обозначим, как обычно, через ν, E, D коэффициент Пуассона, модуль Юнга и цилиндрическую жесткость.

Прогиб плиты w, изгибающие и скручивающий моменты M_x, M_y, H_{xy} и перерезывающие силы N_x и N_y могут быть выражены [1] через две функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексного переменного z:

$$w = 2\,\mathrm{Re}\,[\bar z\varphi(z) + \chi(z)]$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4(1-\nu)D[\bar z\varphi''(z) + \chi''(z)]$$

$$M_x + M_y = -8(1+\nu)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z)$$

$$N_x - iN_y = -8D\varphi''(z) \tag{1}$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{16\pi D}\sum_{m=1}^{M} P_m(z-z_m)\lg(z-z_m) + \sum_{h=0}^{\infty} a_h z^h$$

$$\chi(z) = -\frac{1}{16\pi D}\sum_{m=1}^{M} P_m\bar z_m(z-z_m)\lg(z-z_m) + \sum_{h=0}^{\infty} a_h' z^h \tag{2}$$

При заданных напряжениях коэффициенты a_0, a_0', $a_1 - \bar a_1$ и a_1' могут быть выбраны произвольно. Если заданы перемещения, то произвольно могут быть выбраны коэффициенты a_0, $a_0' - \bar a_0'$ и $a_1 - \bar a_1$.

Вдоль края плиты функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ связаны соотношением

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(\sigma) + \sigma\bar\varphi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \bar\chi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = f_1(\sigma) + if_2(\sigma) + iC_1\sigma + C_2$$

$$f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = \frac{1}{2(1-\nu)D}[M(\sigma) + i\sigma P(\sigma)] \tag{3}$$

Здесь $P(\sigma)$ — главный вектор, $M(\sigma)$ — главный момент усилий, приложенных вдоль края плиты на дуге между точками z_{M+1} и σ, C_1 — действительная и C_2 — комплексная постоянные, которые можно считать равными нулю, $\sigma = e^{i\theta}$.

Функция $f_1 + if_2$ в точке z_n приложения силы P_n претерпевает конечный разрыв и на дуге между точками z_n и z_{n+1} может быть представлена в виде

$$f_1(\sigma) + if_2(\sigma) = \frac{1}{2(1-\nu)D}\sum_{j=M+1}^{M+n}(\sigma - z_j)P_j \tag{4}$$

Для определения функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, удовлетворяющих условию (3), возьмем наряду с соотношением (3) комплексно сопряженное с ним, умножим каждое из них на $[2\pi i(\sigma - z)]^{-1}d\sigma$ и проинтегрируем в положительном направлении вдоль окружности единичного радиуса [3]; здесь $|z|<1$. В результате вычисления интегралов и определения некоторых коэффициентов для функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ получим

$$\varphi(z)=\frac{1}{16\pi D}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{(z-z_k)\left[\lg(z-z_k)+\frac{1-\nu}{3+\nu}\lg(1-\bar{z}_k z)\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\nu)^2}{2(1+\nu)(3+\nu)}(1-z_k\bar{z}_k)z\right\}+c_1$$

$$\chi(z)=-\frac{1}{16\pi D}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{\bar{z}_k(z-z_k)\left[\lg(z-z_k)+\frac{1-\nu}{3+\nu}\lg(1-\bar{z}_k z)\right]-\right. \tag{5}$$
$$\left.-\frac{(1-\nu)^2}{2(1+\nu)(3+\nu)}(1-z_k\bar{z}_k)-\frac{8(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)}\int_0^1(1-\bar{z}_k zu)\lg(1-\bar{z}_k zu)\frac{du}{u}\right\}+c_2$$

Воспользовавшись формулами (1) и (5), для прогиба w, изгибающих и скручивающего моментов M_r, M_θ, $H_{r\theta}$ и перерезывающих сил N_r и N_θ, получим

$$w=\frac{1}{16\pi D}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)\left[\lg(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)+\right.\right. \tag{6}$$
$$\left.+\frac{1-\nu}{3+\nu}\lg(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})\right]+\frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)(3+\nu)}(1-z_k\bar{z}_k)(1-z\bar{z})+$$
$$\left.+\frac{16(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)}\operatorname{Re}\int_0^1(1-\bar{z}_k zu)\lg(1-\bar{z}_k zu)\frac{du}{u}\right\}+\omega_1 x-\omega_2 y+w_0$$

$$M_r=-\frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{2\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{(1-r_k^2)(1-r^2)}{r^2}+(1+\nu)\left[\lg(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1-r^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\lg(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})\right]+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{(r_k^2-r^2)^2r^{-2}}{(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)}-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(1-r_k^2)(1-r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}\right]-\frac{(1-\nu)^2}{2(3+\nu)}\frac{1-r^2}{r^2}\left[\frac{1-2r_k^2+r_k^2r^2}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}-\frac{(1-r_k^2)(1-r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)^2(1-z_k\bar{z})^2}\right]\right\}$$

$$M_\theta=\frac{1}{8\pi}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{2\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{(1-r_k^2)(1+r^2)}{r^2}-(1+\nu)\left[\lg(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{1+r^2}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\lg(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})\right]+$$
$$+\frac{1-\nu}{2}\left[\frac{(r_k^2-r^2)^2r^{-2}}{(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)}+\frac{1+3\nu}{3+\nu}\frac{(1-r_k^2)(1-r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}\right]-$$
$$\left.-\frac{(1-\nu)^2}{2(3+\nu)}\frac{1-r^2}{r^2}\left[\frac{1-2r_k^2+r_k^2r^2}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}-\frac{(1-r_k^2)(1-r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)^2(1-z_k\bar{z})^2}\right]\right\}$$

$$H_{r\theta}=-\frac{1}{2\pi i r^2}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left\{\frac{1+\nu}{3+\nu}\lg\frac{1-\bar{z}_k z}{1-z_k\bar{z}}+\frac{1-\nu}{8}\left[\frac{r_k^2-r^2}{(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{r_k^2-r^2}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}+\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{(1-r_k^2)(1-r^2)(1-r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)^2(1-z_k\bar{z})^2}\right](z_k\bar{z}-\bar{z}_k z)\right\}$$

$$N_r=\frac{1}{4\pi r}\sum_{k=1}^{M+N}P_k\left[\frac{r_k^2-r^2}{(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)}+\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{r_k^2(1-2r^2+r_k^2r^2)}{(1-\bar{z}_k z)(1-z_k\bar{z})}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{(1-r_k^2)(1-r_k^2r^2)^2}{(1-\bar{z}_k z)^2(1-z_k\bar{z})^2}\right]$$

$$N_\theta = \frac{1}{4\pi i r} \sum_{k=1}^{M+N} P_k \left[\frac{1}{(z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k)} + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{1}{(1 - \bar{z}_k z)(1 - z_k \bar{z})} + \right.$$
$$\left. + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{(1 - r_k^2)(1 - r_k^2 r^2)}{(1 - \bar{z}_k z)^2 (1 - z_k \bar{z})^2} \right] (z_k \bar{z} - \bar{z}_k z)$$

Отметим некоторые из задач, решение которых содержится в формулах (6).

Полагая в формулах (6) $N = 0$, получим решение задачи об изгибе круглой плиты со свободным краем сосредоточенными силами, приложенными в ее плоскости [2]. Положив в формулах (6)

$$M = 1, \quad P_1 = p, \quad z_1 = 0, \quad P_n = -\frac{p}{N}, \quad z_n = e^{2\pi i n / N}, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0$$

$$w_0 = \frac{1}{2(3+\nu)\pi D} \frac{p}{N} \sum_{n=2}^{1+N} \left[(1 - z_n)(1 - \bar{z}_n) \lg (1 - z_n) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^1 (1 - z_n u) \lg (1 - z_n u) \frac{du}{u} \right]$$

получим в замкнутой форме решение задачи об изгибе круглой плиты, опертой в N точках, равномерно распределенных вдоль края, сосредоточенной силой p, приложенной в центре плиты [4, 5]. Полагая в формулах (6)

$$P_m = p, \quad z_m = a e^{2\pi i m / M}, \quad P_n = -\frac{Q}{N}, \quad Q = Mp, \quad z_n = e^{2\pi i n / N}$$

$$M \equiv 0 \pmod N, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0$$

$$w_0 = -\frac{1}{2\pi (3+\nu) D} \sum_{k=1}^{M+N} P_k \left[(1 - z_k)(1 - \bar{z}_k) \lg (1 - z_k) + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^1 (1 - z_k u) \lg (1 - z_k u) \frac{du}{u} \right]$$

получим решение задачи об изгибе круглой плиты, опертой в N точках, равномерно распределенных вдоль края, системой сил, приложенных в M точках, равномерно распределенных вдоль окружности радиуса $a < 1$.

Из формул (6) непосредственно может быть получено в замкнутой форме решение задачи об изгибе круглой плиты, опертой в N точках, равномерно распределенных вдоль края, нагрузкой, равномерно распределенной вдоль всей поверхности плиты. Совершенно аналогичным путем, как и выше, может быть получено в замкнутой форме решение задачи об изгибе круглой плиты сосредоточенными силами и моментами, приложенными в точках ее плоскости и края.

Поступила 6 V 1950

Саратовский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2.
2. Лурье А. И. Некоторые задачи об изгибе круглой пластины. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР. 1935. § 69.
4. Nadai A. Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisformiger Platten. Phys. Zeitschr. 1922. Bd. 23. S. 366.
5. Nadai A. Elastische Platten. Berlin. 1925. S. 193.