Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЕ ДВУХ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$
$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \cdots + p_{sn} x_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, x_j) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

где λ, p_{sj}, p_s, q_s — постоянные, а X, Y, X_s — аналитические в окрестности начала координат функции переменных $x, y, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых по степеням этих переменных начинаются членами не ниже второго порядка.

Характеристическое уравнение системы первого приближения имеет пару чисто мнимых корней $\pm\lambda i$ и n корней, определяемых уравнением

$$|\, p_{sj} - \delta_{sj} \rho \,| = 0 \qquad (\delta_{sj} \text{ — символ Кронекера}) \tag{2}$$

относительно которых предполагается, что они обладают отрицательными вещественными частями.

Согласно Ляпунову для решения задачи устойчивости в рассматриваемом критическом случае составляем систему уравнений с частными производными

$$\Big[\lambda x + Y(x, y, v_j)\Big] \frac{\partial v_s}{\partial y} + [-\lambda y + X(x, y, v_j)] \frac{\partial v_s}{\partial x} = \tag{3}$$
$$= p_{s1} v_1 + \cdots + p_{sn} v_n + p_s x + q_s y + X_s(x, y, v_j) \quad (s = 1, \ldots, n)$$

которой всегда можно удовлетворить формальными рядами

$$v_s(x, y) = v_s^{(1)}(x, y) + v_s^{(2)}(x, y) + \cdots \tag{4}$$

где $v_s^{(k)}(x, y)$ — формы k-го порядка переменных x и y. Этими рядами заменяем величины x_s в первых двух уравнениях (1) и решаем задачу устойчивости для полученной таким образом системы второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y, v_1, \ldots, v_n), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y, v_1, \ldots, v_n) \tag{5}$$

Тогда если для системы (5) получается устойчивость, то и для системы (1) будет иметь место устойчивость, и наоборот, если для системы (5) получится неустойчивость, то то же самое будет и для системы (1).

Решение задачи устойчивости для системы второго порядка не вызывает серьезных вычислительных трудностей даже и в тех случаях, когда она решается членами порядка выше третьего в правых частях этих уравнений. Напротив, определение рядов (4) связано с очень громоздкими вычислениями.

Действительно, для форм $v_s^{(k)}$ получается система уравнений

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}-y\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}\right)=p_{s1}\,v_1^{(k)}+\cdots+p_{sn}\,v_n^{(k)}+u_s^{(k)}(x,y)$$
$$(s=1,\ldots,k) \tag{6}$$

где $u_s^{(k)}(x, y)$ — известные формы k-го порядка. Каждая из форм $v_s^{(k)}$ содержит $k+1$ коэффициентов и, следовательно, для вычисления $v_s^{(k)}$ необходимо определить $n(k+1)$ коэффициентов. Для этих коэффициентов мы получим из (6) $n(k+1)$ линейных неоднородных алгебраических уравнений. В простейшем случае, когда задача устойчивости для системы (5) решается членами третьего порядка[1], требуется вычислить формы $v_s^{(1)}$ и $v_s^{(2)}$ и, следовательно, необходимо будет разрешить две системы линейных уравнений, содержащих соответственно $2n$ и $3n$ неизвестных. Если же члены третьего порядка задачи устойчивости не решают, то необходимо рассмотреть по крайней мере члены четвертого и пятого порядков, для чего придется найти $v_s^{(3)}$ и $v_s^{(4)}$ и, следовательно, дополнительно решить две системы уравнений, содержащих соответственно $4n$ и $5n$ неизвестных.

В настоящей заметке мы хотим показать, что достаточно вычислить только формы первого порядка $v_s^{(1)}$. Если эти формы уже вычислены, то определение $v_s^{(k)}$ при каком угодно k может быть произведено при помощи весьма простых вычислений без решения вышеуказанных систем уравнений.

Рассмотрим функции $v_s^{(1)}$. Эти линейные формы удовлетворяют уравнениям

$$\lambda\left(x\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial y}-y\frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial x}\right)=p_{s1}\,v_1^{(1)}+\cdots+p_{sn}\,v_n^{(1)}+p_s x+q_s y\quad (s=1,\ldots,n)$$

Полагая в этих уравнениях $v_s^{(1)}=A_s x+B_s y$, мы получим для определения A_s и B_s неоднородные линейные уравнения

$$\begin{aligned}\lambda B_s&=p_{s1}A_1+\cdots+p_{sn}A_n+p_s\\ -\lambda A_s&=p_s\ B_1+\cdots+p_{sn}B_n+q_s\end{aligned}\qquad (s=1,\ldots,n) \tag{7}$$

Пусть $A_s(\lambda, p_j, q_j)$, $B_s(\lambda, p_j, q_j)$ — решение этих уравнений. Мы рассматриваем при этом указанные величины как функции величин $\lambda, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$. Тогда мы можем писать

$$v_s^{(1)}(\lambda, p_j, q_j, x, y)=A_s(\lambda, p_j, q_j)\,x+B_s(\lambda, p_j, q_j)\,y\qquad (s=1,\ldots,n) \tag{8}$$

Переходим теперь к определению форм $v_s^{(k)}$. Для решения системы (6) положим $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$. Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial\vartheta}=r^k\left\{x\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial y}-y\frac{\partial v_s^{(k)}}{\partial x}\right\}_{x=\cos\vartheta,\ y=\sin\vartheta}$$

будем иметь

$$\lambda\frac{dv_s^{(k)}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)}{d\vartheta}=\qquad s=1,\ldots,n) \tag{9}$$
$$=p_{s1}\,v_1^{(k)}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)+\cdots+p_{sn}v_n{}^{k)}(\cos\vartheta,\sin\vartheta)+u_s^{(k)}(\cos\vartheta,\sin\vartheta),$$

Таким образом, величины $v_s^{(k)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, рассматриваемые как функции ϑ, являются одним из решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9). Но эти функции, будучи формами относительно $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, являются, очевидно, периодическими периода 2π. Следовательно, речь идет о нахождении периодического решения системы (9). Так как все корни уравнения (2) имеют отри-

[1] Если задача устойчивости для системы (5) решается членами не выше m-го порядка, то этот порядок m, как известно, всегда нечетный.

цательные вещественные части, то система (9) допускает одно и только одно периодическое решение. Для его нахождения выразим функцию $u_s^{(k)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ через синусы и косинусы кратных углов. Очевидно, имеем

$$u_s^{(k)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = \sum_{\alpha=0}^{k} M_{s\alpha} \cos\alpha\vartheta + N_{s\alpha} \sin\alpha\vartheta)$$

Тогда функции $v_s^{(k)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ могут быть представлены в виде

$$v_s^{(k)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta) = z_{s0} + z_{s1} + \cdots + z_{sk} \tag{10}$$

где $z_{s\alpha}$ — периодическое решение уравнений

$$\lambda \frac{dz_{s\alpha}}{d\vartheta} = p_{s1} z_{1\alpha} + \cdots + p_{sn} z_{n\alpha} + M_{s\alpha} \cos\alpha\vartheta + N_{s\alpha} \sin\alpha\vartheta \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

Полагая

$$z_{s\alpha} = P_{s\alpha} \cos\alpha\vartheta + Q_{s\alpha} \sin\alpha\vartheta \tag{12}$$

и подставляя эти величины в (11), получим для определения коэффициентов $P_{s\alpha}$ и $Q_{s\alpha}$ линейные алгебраические уравнения

$$\begin{aligned} \alpha\lambda Q_{s\alpha} &= p_{s1} P_{1\alpha} + \cdots + p_{sn} P_{n\alpha} \\ -\alpha\lambda P_{s\alpha} &= p_{s1} Q_{1\alpha} + \cdots + p_{sn} Q_{n\alpha} \end{aligned} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Эти уравнения имеют такую же форму, как и уравнения (7). Поэтому

$$P_{s\alpha} = A_s(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha}), \qquad Q_{s\alpha} = B_s(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha})$$

и, следовательно, на основании (8) и (12)

$$z_{s\alpha} = v_s^{(1)}(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha}, \cos\alpha\vartheta, \sin\alpha\vartheta)$$

Отсюда на основании (10) окончательно получаем

$$\begin{aligned} v_s^{(k)}(x, y) &= r^k \sum_{\alpha=0}^{k} v_s^{(1)}(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha}, \cos\alpha\vartheta, \sin\alpha\vartheta) = \\ &= r^k \sum_{\alpha=0}^{n} \{A_s(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha}) \cos\alpha\vartheta + B_s(\alpha\lambda, M_{s\alpha}, N_{s\alpha}) \sin\alpha\vartheta\} \end{aligned} \tag{13}$$

Мы получили формы $v_s^{(k)}$, выраженные в переменных r и ϑ. Для получения их выражения через x и y достаточно будет в правых частях (13) перейти от синусов и косинусов кратных углов к степеням величин $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, после чего заменить $r\cos\vartheta$ и $r\sin\vartheta$ через x и y. Заметим, что если мы будем решать затем задачу устойчивости для системы второго порядка (5) практически наиболее удобным приемом, сводящимся к замене этой системы одним уравнением при помощи подстановки $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, то в преобразовании функций $v_s^{(k)}$ к переменным x и y не будет необходимости и их выражение (13) будет окончательным.

Таким образом, задача определения всех форм $v_s^{(k)}$ требует решения лишь одной системы уравнений (7), содержащей $2n$ неизвестных. Решение этой последней системы может быть также упрощено путем введения новых неизвестных $C_s = A_s + iB_s$.

Действительно, умножая первую группу уравнений (7) на i и вычитая из нее вторую группу, получим систему

$$i\lambda C_s = p_{s1} C_1 + \cdots + p_{sn} C_n + p_s + iq_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

состоящую только из n уравнений. Решая эту систему, мы найдем A_s и B_s путем выделения из C_s вещественной и мнимой частей.

Поступила 9 XII 1950

Уральский государственный университет