Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

О СОБСТВЕННО НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. В нашей работе [1] был предложен способ построения достаточных критериев устойчивости режима движения регулируемой системы, когда задание характеристики сервомотора, т. е. функции $f(\sigma)$, определяющей скорость $\dot{\xi}$ перемещения регулирующего органа в зависимости от координаты σ пускового органа, ограничивалось единственным требованием $\sigma f(\sigma) > 0$. Поэтому условие устойчивости системы в разомкнутом состоянии, т. е. при выключенном сервомоторе, было существенной предпосылкой решения, вытекающей из самой постановки задачи, так как была бы безнадежна попытка получить устойчивые режимы движения замкнутой системы при сколь угодно медленно действующем сервомоторе, если разомкнутая система неустойчива.

Распространение метода на неустойчивые в разомкнутом состоянии системы должно в соответствии со сказанным основываться на рассмотрении класса характеристик $f(\sigma)$ с наперед заданными свойствами; именно, естественно, следуя А. М. Летову [2], принять, что $f(\sigma)$ может быть представлена в виде

$$f(\sigma) = c\sigma + \varphi(\sigma)$$

где $c > 0$ и для $\sigma \neq 0$ в некоторой конечной области значений аргумента

$$\sigma\varphi(\sigma) > 0 \qquad (-\sigma_1 < \sigma < \sigma_2) \tag{1.1}$$

Уравнения движения регулируемой системы мы напишем теперь в форме

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi, \quad \dot{\xi} = c\sigma + \varphi(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha - r\xi \quad (k=1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

При выключенном сервомоторе (для разомкнутой системы) уравнения движения будут

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \ldots b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

назовем оператором системы в разомкнутом состоянии. Это полином n-й степени относительно $(-\lambda)$

$$D(\lambda) = (-\lambda)^n + f_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + f_n \tag{1.5}$$

Введем еще в рассмотрение замкнутую линейную систему; ее дифференциальные уравнения движения будут

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi, \qquad \dot{\xi} = c\sigma = c\left(\sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\eta_\alpha - r\xi\right) \tag{1.6}$$

Соответствующий ей полином степени $n+1$ относительно $(-\lambda)$ — оператор линейной системы в замкнутом состоянии — будет

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \ldots b_{1n} & n_1 \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \ldots b_{2n} & n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots b_{nn}-\lambda & n_n \\ cj_1 & cj_2 & \ldots cj_n & -(cr+\lambda) \end{vmatrix} = \Delta(\lambda) \tag{1.7}$$

Очевидно, что связь между полиномами $\Delta(\lambda)$ и $D(\lambda)$ имеет форму

$$\Delta(\lambda) = -D(\lambda)\,(cr+\lambda) + cM(\lambda) \tag{1.8}$$

где степень полинома $M(\lambda)$ не превышает $n-1$; он может ыть найден по формуле

$$M(\lambda) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} j_k n_i D_{ik}(\lambda) \tag{1.9}$$

где $D_{ik}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента i строки и k столбца определителя (1.4).

В дальнейшем через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ будем обозначать корни полинома $D(\lambda)$, через $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ — полинома $\Delta(\lambda)$. Фактического определения этих корней для исследования устойчивости, как мы увидим ниже, не потребуется.

Существенным является требование устойчивости линейной системы в замкнутом состоянии

$$\operatorname{Re}\mu_t < 0 \qquad (t = 1, \ldots, n+1) \tag{1.10}$$

иными словами, коэффициенты полинома $\Delta(\mu)$ должны удовлетворять критериям Раута-Гурвица.

Поведение нелинейной системы, когда замкнутая линейная находится на границе устойчивости, т. е. полином $\Delta(\mu)$ имеет пару чисто мнимых корней, было рассмотрено в работе [3]. Заметим еще, что корни μ_t далее считаются простыми, но это ограничение делается для упрощения вывода и не влияет на результат исследования, поскольку он будет выражен через коэффициенты, а не через корни полинома $\Delta(\mu)$.

2. Уравнения движения (1.2) нелинейной системы мы будем рассматривать в канонической форме

$$\dot{z}_t = \mu_t z_t + \varphi(\sigma), \qquad \sigma = -\frac{1}{c}\sum_{t=1}^{n+1}\frac{\mu_t D(\mu_t)}{\Delta'(\mu_t)} z_t \tag{2.1}$$

где $t = 1, \ldots, n+1$. При этом выражения исходных переменных через канонические $z_1, \ldots, z_{n+1}$ будут

$$\eta_k = \sum_{t=1}^{n+1}\frac{N_k(\mu_t)}{\Delta'(\mu_t)} z_t, \qquad \xi = -\sum_{t=1}^{n+1}\frac{D(\mu_t)}{\Delta'(\mu_t)} z_t \tag{2.2}$$

где введены полиномы $N_k(\mu)$ не выше степени $n-1$, определяемые соотношениями

$$N_k(\mu) = \sum_{i=1}^{n} n_i D_{ik}(\mu) \tag{2.3}$$

Заметим еще, что по (1.9)

$$M(\mu) = -\sum_{k=1}^{n} j_k N_k(\mu) \tag{2.4}$$

Проверку сказанного можно осуществить непосредственной подстановкой выражений (2.2) в уравнения (1.2); при этом надо воспользоваться (2.1), (1.8), (1.9), применить легко выводимое по (2.3) соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha} N_\alpha(\mu) = n_k D(\mu) + \mu N_k(\mu) \tag{2.5}$$

и известные формулы [4] для вычисления сумм вида

$$s_k = \sum_{t=1}^{n+1} \frac{\mu_t^k}{\Delta'(\mu_t)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

3. Переходим к построению функции Ляпунова для системы уравнений возмущенного движения (2.1). Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — вещественны, а пары $\mu_{s+1}, \mu_{s+2}, \ldots, \mu_n, \mu_{n+1}$ — комплексные сопряженные. Тогда соответствующие переменные $z_1, \ldots, z_s$ также вещественны, а пары $z_{s+1}, z_{s+2}, \ldots, z_n, z_{n+1}$ можно считать комплексными сопряженными; через A обозначим отрицательное число, которое можно считать сколь угодно малым по модулю. Тогда квадратичная форма

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = A(z_1^2 + \cdots + z_s^2 + z_{s+1}z_{s+2} + \cdots z_n z_{n+1}) \tag{3.1}$$

будет определенной отрицательной. Такой же, как показано в работе[1], будет при условии (1.10) и форма

$$F(a_1 z_1, \ldots, a_{n+1} z_{n+1}) = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\rho=1}^{n+1} \frac{a_\alpha a_\rho z_\alpha z_\rho}{\mu_\alpha + \mu_\rho} \tag{3.2}$$

в предположении, что числа $a_1, \ldots, a_s$ — вещественные, а $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_n$ a_{n+1} — попарно сопряженные, комплексные.

За функцию Ляпунова примем сумму этих квадратичных форм:

$$V = \Phi(z_1, \ldots, z_{n+1}) + F(a_1 z_1, \ldots, a_{n+1} z_{n+1}) \tag{3.3}$$

Она — определенная отрицательная. Ее производная по времени, составленная в силу уравнений (2.1), будет

$$\dot V = \left(\sum_{\rho=1}^{n+1} a_\rho z_\rho\right)^2 + A[\mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_s z_s^2 + (\mu_{s+1} + \mu_{s+2}) z_{s+1} z_{s+2} +$$

$$+ \cdots + (\mu_n + \mu_{n+1}) z_n z_{n+1}] + \varphi(\sigma) \sum_{\rho=1}^{n} \left[A + 2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{a_\alpha}{\mu_\alpha + \mu_\rho}\right] z_\rho \tag{3.4}$$

К правой части этого выражения добавим положительное по предположению (1.1) слагаемое $\sigma\varphi(\sigma)$ и отнимем такое же слагаемое

$$\sigma\varphi(\sigma) = -\frac{1}{c}\varphi(\sigma) \sum_{\rho=1}^{n+1} \frac{\mu_\rho D(\mu_\rho)}{\Delta'(\mu_\rho)} z_\rho$$

Тогда, приравняв в (3.4) нулю коэффициенты при каждом из произведений $z_\rho \varphi(\sigma)$, получим систему квадратных уравнений

$$2a_\rho \sum_{\alpha=1}^{n+1} \frac{a_\alpha}{\mu_\alpha + \mu_\rho} + \frac{1}{c} \frac{D(\mu_\rho)\mu_\rho}{\Delta'(\mu_\rho)} = -A \qquad (\rho = 1, \ldots, n+1) \tag{3.5}$$

Выражение $\dot{V}$ примет вид:

$$\dot{V} = \Big(\sum_{\rho=1}^{n+1} a_\rho z_\rho\Big)^2 + \sigma\varphi(\sigma) + A\,[\mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_s z_s^2 + \\ + (\mu_{s+1} + \mu_{s+2})\, z_{s+1} z_{s+2} + \cdots + (\mu_n + \mu_{n+1})\, z_n z_{n+1}] \tag{3.6}$$

Оно будет знакоопределенным положительным, если окажется, что числа a_ρ удовлетворяют поставленным выше требованиям, т. е. если таковы корни системы квадратных уравнений (3.5). Заметим, что в последней можно принять $A = 0$; эта постоянная была введена для получения знакоопределенной, а не знакопостоянной производной; поэтому можно считать ее сколь угодно численно малой, а при решении системы (3.5) вовсе откинуть.

О решении уравнений (3.5) см. работу [5], в которой дан прием преобразования этой системы уравнений к более простому для исследования характера корней виду, названному там разрешающей системой.

Для записи разрешающей системы нужно знать лишь коэффициенты полинома $\Delta(\mu)$, а отнюдь не его корни. Поэтому критерии наличия в системе (3.5) корней a_ρ с указанными выше свойствами выражаются в форме неравенств через эти коэффициенты (в работе [5] дано явное выражение этих неравенств для $n = 4$; для $n = 2$ и 3 они получаются еще проще) и определяют в их пространстве некоторую область R. Областью R_0 в этом пространстве назовем ту, в которой выполняются неравенства Раута-Гурвица.

Итак, если коэффициенты оператора замкнутой линейной системы $\Delta(\mu)$ будут находиться в области, общей к R и R_0, то можно утверждать наличие асимптотической устойчивости режима «движения»

$$\eta_k = 0, \qquad \xi = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

рассматриваемой регулируемой системы. Это будет устойчивость в «большом», т. е. для конечных значений переменных η_k и ξ, если они остаются в области, определяемой приведенными выше неравенствами (1.1) для σ.

Поступила 2 X 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
2. Летов А. М. Собственно неустойчивые регулируемые системы. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 2.
3. Лурье А. И. О характере границ области устойчивости регулируемых систем. ПММ. 1950. Т. XIV, Вып. 4.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. ГТТИ. 1950. § 12 и 33.
5. Лурье А. И. К задаче об устойчивости регулируемых систем. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.