

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

М. Г. Слободянский

(Москва)

Известно, что при решении некоторых задач методом конечных разностей для вычисления значений производных с нужной степенью точности приходится брать сетку с более мелким шагом, чем для вычисления искомой функции. Это приводит к увеличению вычислительной работы.

Ниже рассматривается способ вычисления значений производной искомой функции с нужной степенью точности при использовании сетки с более крупным шагом. На двух примерах (кручение призматического стержня квадратного сечения и изгиб защемленной квадратной пластины под действием равномерной нагрузки) дано сравнение приближенных решений, полученных излагаемым методом, с имеющимися точными решениями и другими приближенными решениями.

§ 1. Обоснование метода. Пусть имеем систему линейных уравнений от искомых функций w_1, \dots, w_m и их производных по x_1, \dots, x_n :

$$L_j(w_1, \dots, w_m) = P_j(x_1, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, k) \quad (1.1)$$

Здесь L_j — линейный дифференциальный оператор, P_j — заданные функции x_1, \dots, x_n . Пусть на границе S области D в пространстве переменных x_1, \dots, x_n имеем следующие граничные условия:

$$l_\nu(w_1, \dots, w_m) = P_\nu(x_1, \dots, x_n) \quad \text{на } S \quad (\nu = 1, \dots, k_1) \quad (1.2)$$

Здесь l_ν — линейный дифференциальный оператор, P_ν — заданные функции на границе S области D .

В дальнейшем удобнее будет рассматривать только однородные граничные условия, когда $P_\nu(x_1, \dots, x_n) = 0$.

$$l_\nu(w_1, \dots, w_m) = 0 \quad \text{на } S \quad (\nu = 1, \dots, k_1) \quad (1.3)$$

Общий случай можно свести к этому случаю наложением частного вида функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.2), при этом изменятся только правые части уравнений (1.1). Положим, что решения уравнений (1.1) при граничных условиях (1.3) существуют и их можно представить с помощью системы функций Грина $G_{ij}(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ в следующем виде:

$$w_i(x_1, \dots, x_n) = \int \dots \int_D \left\{ \sum_{j=1}^k P_j(\xi_1, \dots, \xi_n) G_{ij}(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n) \right\} d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.4)$$

При этом

$$l_\nu(G_{1j}, G_{2j}, \dots) = 0 \quad \text{на } S \quad (\nu = 1, \dots, k_1) \quad (1.5)$$

$$G_{ij} = g_{ij}^\circ + g_{ij} \quad (1.6)$$

где $g_{ij}(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ — регулярные в области D функции, удовлетворяющие уравнениям (1.1) относительно переменных x_1, \dots, x_n , а $g_{ij}^\circ(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ — функции, удовлетворяющие тем же самым уравнениям (1.1) относительно переменных (x_1, \dots, x_n) во всей области D за исключением точки (ξ_1, \dots, ξ_n) , где они обладают нужными особенностями.

Подставляя (1.6) в (1.4) и беря производную порядка $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ от обеих частей (1.4) по переменным x_1, \dots, x_n , получим

$$\begin{aligned} w_i^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)} = & \int \dots \int_D \left\{ \sum_{j=1}^k P_j g_{ij}^\circ(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \right\} d\xi_1, \dots, d\xi_n + \\ & + \int \dots \int_D \sum_{j=1}^k P_j g_{ij}(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1, \dots, d\xi_n \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и в дальнейшем символ $(\alpha_1 \alpha_2 \dots)$ означает

$$z^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)} = \frac{\partial^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots}$$

Функции Грина G_{ij} , а также функции g_{ij}° и g_{ij} , рассматриваемые как функции переменных ξ_1, \dots, ξ_n , вообще говоря, удовлетворяют дифференциальным уравнениям, отличным от (1.1), однако в приложениях часто встречаются граничные задачи с функциями Грина, симметричными относительно переменных x_1, \dots, x_n и ξ_1, \dots, ξ_n , что является выражением часто встречающегося в физических задачах принципа взаимности, и в этом случае G_{ij} удовлетворяют уравнениям (1.1) также относительно переменных ξ_1, \dots, ξ_n .

Далее из (1.5) и (1.6) следует, что если функции Грина симметричны относительно обеих пар аргументов, то функции $g_{ij}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)}$ удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$L_j' [g_{ij}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)}, \dots] = 0 \quad (j = 1, \dots, k) \quad (1.8)$$

$$l_\nu' [g_{ij}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)}, \dots] = \varphi_\nu(x_1, \dots, x_n) \quad \text{на } S \quad (\nu = 1, \dots, k_1) \quad (1.9)$$

где

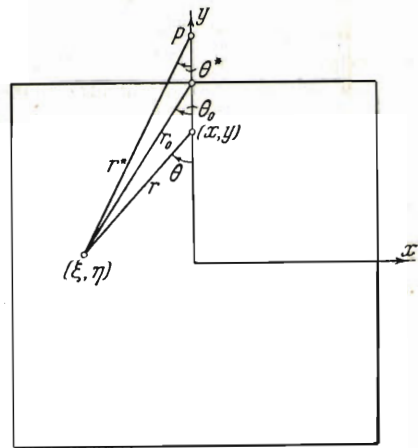
$$\varphi_\nu(x_1, \dots, x_n) = -l_\nu' [g_{ij}^\circ(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)] \quad \text{на } S \quad (1.10)$$

Дифференциальные операторы (1.8), (1.9) такие же, как (1.1) и (1.2), штрихи при L_j и l_ν означают, что производные в (1.8), (1.9), (1.10) взяты по переменным ξ_1, \dots, ξ_n . Если функции g_{ij}° известны, то для нахождения производных искомым функциям из (1.7) необходимо определить функции $g_{ij}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)}$ из уравнений (1.8) и (1.9). Эта задача эквивалентна определению функции w из уравнений (1.1) и (1.3).

Если функции g_{ij}° подобраны таким образом, что в правых частях (1.9) мы имеем достаточно гладкие функции, то погрешность при определении функций $g_{ij}^{(\alpha_1 \alpha_2 \dots)}$ из (1.8) и (1.9) методом конечных разностей (или другими методами) будет того же порядка, что и при определении функции w из (1.1) и (1.3). Так как, кроме того, для определения произ-

водных w_i по формуле (1.7) нам нужны не сами значения $g_{ij}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)}$, а интеграл по области D от функции $P_j g_{ij}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)}$, то следует ожидать, что погрешность при определении производных от w будет даже меньше, чем при определении самих функций $g_{ij}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)}$

или чем при определении искомых функций w_i . Это позволяет брать сетку с более крупным шагом при определении производных искомых функций методом конечных разностей. Заметим, что изложенный способ может быть также применен и для определения самих функций w_i с большей точностью. Вышеизложенное, очевидно, применимо не только в случае решения задачи методом конечных разностей, но также и при использовании других приближенных методов. Вопрос о построении функций g_{ij}° должен быть рассмотрен отдельно. Примеры построения функций g_{ij}° в случае кручения призматического стержня и в случае изгиба заземленной пластины даны ниже.



Фиг. 1

§ 2. Кручение призматического стержня. Рассмотрим задачу об определении напряжений при кручении призматического стержня квадратного сечения (фиг. 1). Для этой задачи имеется точное решение, что дает возможность сравнить приближенное решение с точным. Обозначим функцию напряжений через φ ; как известно,

$$\nabla^2 \varphi = -2, \quad \varphi_{x=\pm 1, y=\pm 1} = 0, \quad \tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -G\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

где ϑ — угол поворота на единицу длины, G — модуль сдвига. Введем функции

$$G(x, y; \xi, \eta) = g_0(x, y; \xi, \eta) + g(x, y; \xi, \eta), \quad g_0(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{r}{r^*} \quad (2.1)$$

где r — расстояние от точки (ξ, η) до точки (x, y) , r^* — расстояние от точки (ξ, η) до точки P , сопряженной с точкой (x, y) относительно прямой $y = +1$. Имеем

$$\begin{aligned} 2\pi\varphi(x, y) &= - \iint_D 2G(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= -2 \iint_D g_0(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta - 2 \iint_D g(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дифференцируя (2.2) по y , найдем

$$2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2 \iint_D \left(\frac{\cos \theta}{r} + \frac{\cos \theta^*}{r^*} \right) d\xi d\eta - 2 \iint_D \frac{\partial}{\partial y} g(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

где θ — угол между радиусом-вектором r и осью y , θ^* — угол между радиусом-вектором r^* и осью y . Далее имеем

$$\nabla_{\xi\eta}^2 \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right]_{\xi=\pm 1, \eta=\pm 1} = - \left[\frac{\cos \theta}{r} + \frac{\cos \theta^*}{r^*} \right]_{\xi=\pm 1, \eta=\pm 1} \quad (2.4)$$

Заметим, что отсюда следует $(\partial g / \partial y)_{\eta=\pm 1} = 0$. Если точка (x, y) совпадает с точкой A , то из (2.4) имеем

$$\left[\frac{\partial g(0, 1; \xi, \eta)}{\partial y} \right]_{\xi=\pm 1, \eta=\pm 1} = - \left[2 \frac{\cos \theta_0}{r_0} \right]_{\xi=\pm 1, \eta=\pm 1} \quad (2.5)$$

Аналогичным образом можно найти производную $\partial \varphi / \partial v$ по v — внешней нормали к контуру в точках A' , A'' , A''' . Так как в силу симметрии задачи производная $\partial \varphi / \partial v$ принимает одинаковые значения в точках A , A' , A'' , A''' , то, обозначая

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial v} [g(0, 1; \xi, \eta) + g(0, -1; \xi, \eta) + g(1, 0; \xi, \eta) + g(-1, 0; \xi, \eta)] \quad (2.6)$$

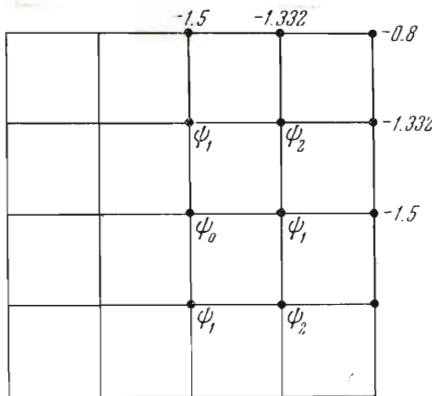
найдем из (2.3)

$$4\pi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x=0, y=1} = -4 \iint_D \frac{2 \cos \theta_0}{r_0} d\xi d\eta - \iint_D \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.7)$$

причем

$$\nabla^2 \psi(\xi, \eta) = 0$$

Для определения функций $\psi(\xi, \eta)$ применим метод конечных разностей. Возьмем сетку с крупным шагом $h = 0.5$ и найдем из (2.5) с учетом (2.6) граничные значения для $\psi(\xi, \eta)$ в соответствующих точках контура (фиг. 2).



Фиг. 2

Учитывая симметрию функций $\psi(\xi, \eta)$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 4\psi_0 - 4\psi_1 &= 0, & 3\psi_1 - 2\psi_2 &= -1.5 \\ 4\psi_2 - 2\psi_1 &= -2.664 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\psi_0 = \psi_1 = -1.416, \quad \psi_2 = -1.374$$

Далее имеем

$$\iint_D \frac{2 \cos \theta_0}{r_0} d\xi d\eta = 3.4640$$

Вычисляя второй интеграл в (2.7) по формуле Симпсона, пользуясь найденными значениями ψ в узлах сетки, найдем

$$\iint_D \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta = -1.366 \times 4$$

Окончательно по (2.7) получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x=0, y=1} = - \frac{3.464 - 1.366}{\pi} = -0.668$$

Точное значение $(\partial \varphi / \partial y)_{x=0, y=1} = -0.675$ отличается от полученного результата на 0.007, т. е. погрешность будет около 1%.

Если для определения функции ψ при той же сетке (фиг. 2) составить более точные девятичленные уравнения [1], то получим систему:

$$\begin{aligned} \psi_0 - 0.8\psi_1 - 0.2\psi_2 &= 0, & \psi_0 - 4.5\psi_1 + 2\psi_2 &= 2.1661 \\ \psi_0 + 8\psi_1 - 20\psi_2 &= 14.4576 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\psi_2 = -1.3461, \quad \psi_1 = -1.3858, \quad \psi_0 = -1.3777$$

Вычисляя второй интеграл в (2.7) по формуле Симпсона, получим

$$\iint_D \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta = -1.3461 \times 4$$

Окончательно из (2.7) получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x=0, y=1} = -\frac{3.4640 - 1.3461}{\pi} = -0.6741$$

Это значение отличается от точного на 0.0012, т. е. погрешность будет 0.2%. Любопытно отметить, что если возьмем сетку с шагом $h = 1$ и составим девяти-членное уравнение в конечных разностях, то получим

$$20\psi_0 + 4 \times 4 \times 1.5 + 4 \times 0.8 = 0, \quad \psi_0 = -1.360$$

Если воспользоваться попержнему формулой Симпсона, то из (2.7) найдем

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{x=0, y=1} = -\frac{3.464 - 1.360}{\pi} = -0.670$$

Погрешность найденного значения равна 0.005, что составляет 0.7% от точного значения. Для получения значения $\partial \varphi / \partial y$ с той же степенью точности при помощи разностного метода Маркус [2] решает десять уравнений при шаге $h = 0.25$. Получающаяся при этом погрешность составляет 0.3% от точного значения.

§ 3. Изгиб заземленной пластины. Рассмотрим задачу об изгибе заземленной квадратной пластины под действием равномерной [нагрузки P . В этом случае, как известно, имеем

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{P}{B}, \quad [w]_{x=\pm 1, y=\pm 1} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]_{x=\pm 1, y=\pm 1} = 0$$

Здесь w — прогиб пластины, B — жесткость пластины, ν — внешняя нормаль к контуру пластины. Найдем сумму изгибающих моментов в точке A , для чего надо найти значение $\nabla^2 w(x, y)$ в точке A (фиг. 1). Введем функции

$$G(x, y; \xi, \eta) = g_0(x, y; \xi, \eta) + g(x, y; \xi, \eta),$$

$$g_0(x, y; \xi, \eta) = r^2 \ln \frac{r}{r^*} + \frac{1}{2}(r^{*2} - r^2) \quad (3.1)$$

где r и r^* имеют те же значения (фиг. 1), что и в § 2. Имеем

$$8\pi w(x, y) = \frac{1}{B} \iint_D P g_0(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{B} \iint_D P g(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) в (3.2) и беря оператор ∇_{xy}^2 от обеих частей (3.1), найдем, переходя к пределу при $x = 0, y \rightarrow 1$:

$$8\pi \nabla^2 w(x, y) = \frac{P}{B} \iint_D 4(1 + \cos 2\theta_0) d\xi d\eta + \frac{P}{B} \iint_D \nabla_{xy}^2 g(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.3)$$

Далее имеем

$$\nabla_{\xi\eta}^4 \nabla_{xy}^2 g = 0, \quad \nabla_{xy}^2 g = -4(1 + \cos 2\theta_0) \quad (\xi = \pm 1) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \nabla_{xy}^2 g = -\frac{\partial}{\partial \nu} 4(1 + \cos 2\theta_0) = \frac{\sin 2\theta_0}{r_0} \sin \theta_0 \quad (\eta = \pm 1) \quad (3.5)$$

где θ_0 — угол между радиусом-вектором r_0 и внешней нормалью ν .

В силу симметрии задачи выражение $\nabla_{xy}^2 w$ принимает одинаковые значения в точках A, A', A'', A''' (фиг. 1). Обозначим

$$\psi(\xi, \eta) = \nabla_{xy}^2 [g(0, 1; \xi, \eta) + g(0, -1; \xi, \eta) + g(1, 0; \xi, \eta) + g(-1, 0; \xi, \eta)] \quad (3.6)$$

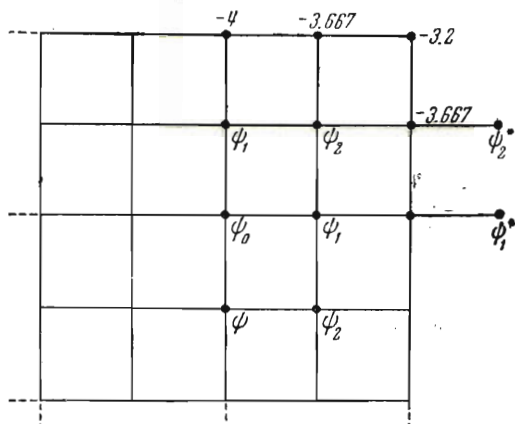
Из (3.3) найдем

$$8\pi^4 \nabla_{xy}^2 w_{x=0, y=1} = 4 \iint_D \frac{P}{B} 4(1 + \cos 2\theta_0) d\xi d\eta + \iint_D \frac{P}{B} \psi(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.7)$$

При этом

$$\nabla^4 \psi(\xi, \eta) = 0$$

Для определения значений функции $\psi(\xi, \eta)$ применим метод конечных разностей. Возьмем сетку с крупным шагом $h = 0.5$ и найдем из (3.4) и (3.5) с учетом (3.6) значения ψ и $\partial\psi/\partial\nu$ в соответствующих точках контура (фиг. 3).



Фиг. 3

Законтурные значения функции ψ вычисляем, как обычно, пользуясь экстраполяцией и известными значениями $\partial\psi/\partial\nu$ на контуре области. Так, на фиг. 3 значения

$$\psi_2^* = \psi_2 - 2h \partial\psi/\partial\nu = \psi_2 + 1.2706$$

$$\psi_1^* = \psi_1 - 2h \partial\psi/\partial\nu = \psi_1 + 2$$

Учитывая симметрию задачи, получим систему уравнений:

$$\psi_0 - 1.6\psi_1 + 0.4\psi_2 = +0.8$$

$$-\psi_0 + 3.25\psi_1 - 2\psi_2 = -1.5$$

$$\psi_0 - 8\psi_1 + 12\psi_2 = -19.4$$

Откуда найдем $\psi_0 = -4.7714$, $\psi_1 = -4.5450$, $\psi_2 = -4.2495$. Далее имеем

$$\iint_D \frac{P}{B} (1 + \cos 2\theta_0) d\xi d\eta = \iint_D \frac{P}{B} (1 + \cos 2\theta_0) r dr d\theta = 5.4949 \frac{P}{B}$$

Вычисляя затем второй интеграл в (3.7) при помощи приближенной формулы Симпсона, пользуясь значениями $\psi(\xi, \eta)$ в узлах сетки, окончательно найдем

$$[\nabla_{xy}^2 w]_{x=0, y=0} = \frac{5.4949 - 1.3377}{2\pi} \frac{P}{B} = 0.204 \frac{P}{B}$$

Так как $[\partial^2 w / \partial x^2]_{x=0, y=1} = 0$, то для изгибающего момента в середине стороны квадратной пластины получим

$$M_1 = \left[B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=0, y=1} = 0.204 P$$

Это значение момента отличается от найденного другими авторами на 0.5-1%. Так согласно Г. Генки^[3] $M_1 = 0.205P$, согласно Б. Галеркину^[4] $M_1 = 0.206P$.

Решая эту задачу методом конечных разностей, Г. Маркус^[2] при шаге сетки $h = 0.25$ решает десять уравнений и получает $M_1 = 0.18947P$.

Последнее значение M_1 отличается от найденного выше, а также от значений, найденных другими авторами, на 7.5-8.5%.

Поступила 24 X 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ГТИ. 1949.
2. Маркус Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий. ДНТВУ. 1936.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
4. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат. 1933.