Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ ОТЫСКАНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К НЕКОТОРЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ

С. А. Жевакин

(Горький)

Метод малого параметра позволяет разыскать периодические решения нелинейной системы дифференциальных уравнений, если известно периодическое решение (или семейство периодических решений) некоторой другой системы, близкой к данной.

Для систем, близких к линейным системам, которые допускают периодические решения, подобное применение метода малого параметра хорошо известно и используется при рассмотрении различных прикладных задач [1].

Для системы с одной степенью свободы, близкой к нелинейной гамильтоновой системе, такие рассмотрения также известны и при помощи их изучены некоторые автоколебательные задачи [2, 3, 4].

Недавно И. Г. Малкин[5] рассмотрел задачу отыскания периодических решений в системах, близких к системам Ляпунова. По терминологии И. Г. Малкина системы Ляпунова — это системы, удовлетворяющие трем известным признакам, указанным А. М. Ляпуновым и обеспечивающим у рассматриваемой системы дифференциальных уравнений наличие семейства периодических решений в окрестности начала координат. Исследования И. Г. Малкина кладут в основу периодические решения порождающей системы, представленные в виде рядов по начальным условиям. Так как эти ряды, вообще говоря, сходятся лишь в непосредственной окрестности начала координат, то для многих прикладных задач, требующих отыскания периодических решений не в малой окрестности начала, исследование И. Г. Малкина недостаточно.

В настоящей заметке метод малого параметра применяется к автоколебательной автономной системе, описываемой n дифференциальными уравнениями первого порядка и близкой к аналогичной динамической системе, но обладающей $n-1$ известными однозначными аналитическими интегралами; в отличие от случая гамильтоновых уравнений n может быть и нечетным. При этом используется введенная Понтрягиным криволинейная система координат.

Изложение ведется для случая $n = 3$, имеющего интерес для теории автоколебаний дискретной модели звезды; способ рассмотрения и результаты непосредственно переносятся на общий случай n уравнений.

Лемма I. Пусть

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = r(\rho, z, \varphi, \mu), \qquad \frac{dz}{d\varphi} = m(\rho, z, \varphi, \mu) \tag{1}$$

есть система дифференциальных уравнений, записанная в цилиндрических координатах ρ, z, φ; пусть далее $r(\rho, z, \varphi, 0) = m(\rho, z, \varphi, 0) = 0$ и функции r и m периодичны по φ (период 2π) и аналитичны в области, определенной неравенствами $|\rho - \rho_0| < \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$, $|\mu| < \varepsilon$. (2)

Обозначим

$$R(\rho, z, \mu) = \int_0^{2\pi} r(\rho, z, \varphi, \mu)\, d\varphi, \qquad M(\rho, z, \mu) = \int_0^{2\pi} m(\rho, z, \varphi, \mu)\, d\varphi$$

Если

$$\frac{\partial R(\rho_0, 0, 0)}{\partial \mu} = \frac{\partial M(\rho_0, 0, 0)}{\partial \mu} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 R(\rho_0, 0, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu} & \dfrac{\partial^2 R(\rho_0, 0, 0)}{\partial z\, \partial \mu} \\ \dfrac{\partial^2 M(\rho_0, 0, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu} & \dfrac{\partial^2 M(\rho_0, 0, 0)}{\partial z\, \partial \mu} \end{vmatrix} = l' \neq 0$$

то существует единственный предельный цикл непрерывно зависящий от μ и при $\mu \to 0$ переходящий в цикл $\rho = \rho_0$, $z = 0$. Этот предельный цикл устойчив, если

$$l' > 0, \qquad \mu\left(\frac{\partial^2 R(\rho_0, 0, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu} + \frac{\partial^2 M(\rho_0, 0, 0)}{\partial z\, \partial \mu}\right) = K' < 0$$

и неустойчив, если $l' < 0$ или $K' > 0$.

Доказательство. Применяя метод малого параметра, ищем решение системы (1) в виде рядов

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 z_1 + \alpha_3 \mu + \alpha_4 \mu \rho_1 + \alpha_5 \mu z_1 + \cdots \\ z(\varphi) &= 0 + \beta_1 \rho_1 + \beta_2 z_1 + \beta_3 \mu + \beta_4 \mu \rho_1 + \beta_5 \mu z_1 + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

где α_i, β_i — функции φ и $\rho_1 = \rho(0) - \rho_0$, $z_1 = z(0)$.

Согласно предположению

$$r(\rho, z, \varphi, 0) = m(\rho, z, \varphi, 0) = 0$$

Поэтому при $\mu = 0$ в силу (1) должно быть $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $z = z_1$, т. е. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$. Подставляя ряды (3) в уравнения (1), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, ρ_1, z_1 и замечая, что $\alpha_3(0) = \alpha_4(0) = \cdots = \beta_3(0) = \beta_4(0) = \cdots = 0$, найдем

$$\alpha_3 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial r(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial \mu}\, d\varphi, \quad \alpha_4 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 r(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu}\, d\varphi, \quad \alpha_5 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 r(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial z\, \partial \mu}\, d\varphi$$

$$\beta_3 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial m(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial \mu}\, d\varphi, \quad \beta_4 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 m(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu}\, d\varphi, \quad \beta_5 = \int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 m(\rho_0, 0, \varphi, 0)}{\partial z\, \partial \mu}\, d\varphi$$

Используя (2), для $\rho(2\pi)$ и $z(2\pi)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \rho(2\pi) &= \rho_0 + \rho_1 + \frac{\partial^2 R(\rho_0, 0, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu} \mu \rho_1 + \frac{\partial^2 R(\rho_0, 0, 0)}{\partial z\, \partial \mu} \mu z_1 + \cdots \\ z(2\pi) &= \qquad z_1 + \frac{\partial^2 M(\rho_0, 0, 0)}{\partial \rho\, \partial \mu} \mu \rho_1 + \frac{\partial^2 M(\rho_0, 0, 0)}{\partial z\, \partial \mu} \mu z_1 + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Для существования периодического решения при $\mu \neq 0$ необходимо выполнение условий

$$\rho(2\pi) - (\rho_0 + \rho_1) = \mu f_1(\rho_1, z_1, \mu) = 0, \quad z(2\pi) - z_1 = \mu f_2(\rho_1, z_1, \mu) = 0 \tag{5}$$

где f_1 и f_2 определяются согласно (4). Легко проверить, что в силу (2) условия теоремы существования неявных функций выполнены, так что существует единственная система функций $\rho_1(\mu)$, $z_1(\mu)$, удовлетворяющая (5); тем самым существование цикла установлено.

Равенство (4) устанавливает точечное преобразование $\rho_0 + \rho_1 \to \rho(2\pi)$, $z_1 \to z(2\pi)$ плоскости $\varphi = 0$ в плоскость $\varphi = 2\pi$. Инвариантная точка этого преобразования отвечает предельному циклу; устойчивость (или неустойчивость) инвариантной точки означает устойчивость (или неустойчивость) предельного цикла. Известно, что процесс

$$x_{i+1} = F_1(x_i, y_i), \qquad y_{i+1} = F_2(x_i, y_i) \tag{6}$$

сходится (т. е. $\lim x_i = 0$, $\lim y_i = 0$ при $i \to \infty$), если сходится соответствующий линеаризированный процесс

$$x_{i+1} = a_{11}x_i + a_{12}y_i, \quad y_{i+1} = a_{21}x_i + a_{22}y_i \qquad \left(a_{nm} = \frac{\partial Fn\,(0,0)}{\partial x_m}\right)$$

т. е. если

$$|q| < 1, \quad |p+q| < 1 \qquad \left(q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ p = -(a_{11} + a_{22})\right) \tag{7}$$

и расходится, если хотя бы одно из этих неравенств выполняется с обратным знаком. Последовательное применение точечного преобразования плоскости $\varphi = 0$ в плоскость $\varphi = 2\pi$, последней в плоскость $\varphi = 4\pi$ и т. д. есть процесс вида (6); для точечного преобразования (4) с точностью до членов лервого поряка по μ будем иметь

$$a_{11} = \frac{\partial\rho\,(2\pi)}{\partial\rho_1} = 1 + \frac{\partial^2 R}{\partial\rho\,\partial\mu}\mu, \qquad a_{12} = \frac{\partial\rho\,(2\pi)}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial\mu}\mu$$

$$a_{21} = \frac{\partial z\,(2\pi)}{\partial\rho_1} = \frac{\partial^2 M}{\partial\rho\,\partial\mu}\mu, \qquad a_{22} = \frac{\partial z\,(2\pi)}{\partial z_1} = 1 + \frac{\partial^2 M}{\partial z\,\partial\mu}\mu$$

Отсюда

$$q = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho\,\partial\mu}\mu & \dfrac{\partial^2 R}{\partial z\,\partial\mu}\mu \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial\rho\partial\mu}\mu & 1 + \dfrac{\partial^2 M}{\partial z\partial\mu}\mu \end{vmatrix} = 1 + \mu\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\rho\partial\mu}\,\frac{\partial^2 M}{\partial z\partial\mu}\right)$$

$$p + q = -1 + \mu^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 R}{\partial z\partial\mu} \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial\rho\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 M}{\partial z\partial\mu} \end{vmatrix}$$

Для устойчивости цикла согласно (7) достаточно выполнение условий

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 R}{\partial\rho\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 R}{\partial z\partial\mu} \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial\rho\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 M}{\partial z\,\partial\mu} \end{vmatrix} = l' > 0, \qquad \mu\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\rho\,\partial\mu} + \frac{\partial^2 M}{\partial z\partial\mu}\right) = K' < 0$$

и лемма доказана

Лемма II. Если система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

обладает однозначными аналитическими интегралами

$$H_i(x_1, x_2, x_3) = C_i \qquad (i = 1, 2) \tag{9}$$

определяющими при $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$ замкнутую траекторию системы (8), причем хотя бы один из якобианов $D(H_1, H_2) / D(x_i, x_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ не обращается в нуль хотя бы в одной точке этой траектории[1], то при достаточно малых $|C_i - C_{10}|$ $(i = 1, 2)$ уравнения (9) определяют двупараметрическое семейство замкнутых кривых.

Доказательство. Пусть (x_{10}, x_{20}, x_{30}) есть точка на кривой $L(C_{10}C_{20})$, в которой один из якобианов $D(H_1, H_2)/D(x_i, x_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ не обращается в нуль; для определенности будем считать

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_2} & \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_3} & \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Окружим эту точку сферой достаточно малого радиуса, внутри которой $\Delta \neq 0$. Покажем, что выходящая из любой точки (x_1, x_2, x_3) внутри этой сферы интегральная кривая системы (8) должна снова вернуться в эту точку. Предположим обратное, именно, что она возвращается в точку $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 + \varepsilon$, $x_3' = x_3 + \delta$, где $\varepsilon \neq 0$, $\delta \neq 0$. Так как $X_i(x_1, x_2, x_3)$ не обращаются в нуль одновременно, то в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий, если только точка (x_1, x_2, x_3) достаточно близка к точке (x_{10}, x_{20}, x_{30}), количества ε и δ сколь угодно малы и точка (x_1', x_2', x_3') лежит внутри рассматриваемой сферы.

Тогда $\Delta \neq 0$ и систему (9) можно разрешить относительно x_2, x_3; $x_2 = x_2(x_1, C_1, C_2)$, $x_3 = x_3(x_1, C_1, C_2)$, где x_2 и x_3 — однозначные функции переменных C_1, C_2. Так как C_1, C_2 постоянны вдоль траектории, то при $x_1' = x_1$ должно быть $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$, т. е. $\varepsilon = \delta = 0$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3) + p_i(x_1, x_2, x_3, \mu) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

где $p_i(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$, есть система уравнений, переходящая при $\mu = 0$ в систему (8), обладающую однозначными аналитическими интегралами (9).

Пусть (9) при $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}$ определяет замкнутую кривую $L(C_{10}C_{20})$ и условия леммы II относительно (8) и (9) выполнены. Обозначим

$$K_i(C_1, C_2) = \int_0^T \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} dt \qquad (i = 1, 2)$$

где интеграл берется вдоль кривой $L(C_1C_2)$, принадлежащей существующему согласно лемме II для достаточно малых $|C_i - C_{i0}|$ $(i = 1,2)$ двупараметрическому семейству замкнутых кривых, и $T = T(C_1, C_2)$ означает период движения в порождающей системе (8). Если

$$K_i(C_1, C_2) = 0 \quad (i = 1, 2), \qquad l = \begin{vmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial C_1} & \frac{\partial K_2}{\partial C_1} \\ \frac{\partial K_1}{\partial C_2} & \frac{\partial K_2}{\partial C_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{11}$$

то система (10) имеет один и только один предельный цикл, непрерывно зависящий от параметра μ и при $\mu \to 0$ переходящий в кривую $L(C_{10}C_{20})$.

---

[1] Напомним, что в силу определения траектории на ней не лежит ни одно состояние равновесия.

Цикл устойчив, если

$$l > 0, \qquad K = \mu\left(\frac{\partial K_1}{\partial C_1} + \frac{\partial K_2}{\partial C_2}\right) < 0 \tag{12}$$

и неустойчив, если

$$l < 0 \text{ или } \quad K > 0 \tag{13}$$

Доказательство. Введем на кривой $L(C_{10}C_{20})$ циклическую переменную φ так, что $x_i = x_i(\varphi)$ $(i = 1, 2, 3)$ есть параметрическое уравнение кривой $L(C_{10}C_{20})$ и функции $x_i(\varphi)$ периодичны по φ с периодом 2π; переменная φ возрастает, если t растет. Проведем через точку $(x_1(\varphi),\ x_2(\varphi),\ x_3(\varphi))$ элемент поверхности, ортогональной к кривым $L(C_1C_2)$; пусть уравнение этой поверхности есть $n(x_1, x_2, x_3, \varphi) = 0$. Введем с помощью уравнений

$$H_i(x_1, x_2, x_3) = C_i \quad (i = 1, 2), \qquad n(x_1, x_2, x_3, \varphi) = 0$$

в окрестности кривой $L(C_{10}C_{20})$ новую координатную систему C_1, C_2, φ. Вблизи кривой $L(C_{10}C_{20})$ система (10) примет в новых координатах вид:

$$\frac{dC_i}{dt} = J_i(C_1, C_2, \varphi, \mu) \quad (i = 1, 2), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = s(C_1, C_2, \varphi, \mu) \tag{14}$$

Так как при $\mu = 0$ система (14) должна переходить в систему (8) и так как (9) есть интегралы системы (8), то

$$J_i(C_1, C_2, \varphi, 0) = 0 \qquad (i = 1,2)$$

По исключении времени t система (14) примет вид:

$$\frac{dC_i}{d\varphi} = \frac{J_i(C_1, C_2, \varphi, \mu)}{s(C_1, C_2, \varphi, \mu)} \qquad (i = 1, 2) \tag{15}$$

Легко видеть, что:

в силу (9) и (14)

$$J_i(C_1, C_2, \varphi, \mu) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}\,\frac{dx_j}{dt}$$

в силу (10)

$$\frac{\partial J_i(C_1, C_2, \varphi, \mu)}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial p_j(x_1, x_2, x_3, \mu)}{\partial \mu}$$

в силу (11) и (14)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mu}\,\frac{J_i(C_1, C_2, \varphi, 0)}{s(C_1, C_2, \varphi, 0)}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{s(C_1, C_2, \varphi, 0)}\,\frac{\partial J_i(C_1, C_2, \varphi, 0)}{\partial \mu}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{s(C_1, C_2, \varphi, 0)} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial p_j}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} d\varphi = 0$$

Таким образом, условия леммы I в отношении системы (15) выполнены и теорема доказана. Аналогичные рассуждения могут быть повторены и для системы n дифференциальных уравнений.

Теорема. Если дана система дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) + p_i(x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16}$$

переходящая при $\mu = 0$ в удовлетворяющую условиям леммы II систему

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots x_n) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{17}$$

с известными $n-1$ однозначными аналитическими интегралами

$$H_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

то периодические движения системы (16) порождаются теми замкнутыми интегральными траекториями системы (17), определяемыми константами $C_1, \ldots, C_{n-1}$, для которых

$$K_i(C_1, \ldots, C_{n-1}) = \int\limits_0^T \sum_{j=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{18}$$

причем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial K_1}{\partial C_1} & \dfrac{\partial K_2}{\partial C_1} & \ldots & \dfrac{\partial K_{n-1}}{\partial C_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial K_1}{\partial C_{n-1}} & \dfrac{\partial K_2}{\partial C_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial K_{n-1}}{\partial C_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Исследование устойчивости этих периодических движений может быть сведено к исследованию устойчивости состояний равновесия $C_1, \ldots C_{n-1}$ системы

$$\frac{dC_i}{d\varphi} = \mu K_i(C_1, \ldots, C_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Последнее можно выполнить с помощью условий Рауза-Гурвица. Действительно, разлагая правую часть эквивалентной (16) системы [ср. (15)]

$$\frac{dC_i}{d\varphi} = \frac{J_i(C_1, \ldots, C_{n-1}, \varphi, \mu)}{s(C_1, \ldots, C_{n-1}, \varphi, \mu)} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

в ряд по μ, в силу $J_i(C_1 \ldots C_{n-1}, \varphi, 0) = 0$ получим

$$\frac{dC_i}{d\varphi} = \frac{\mu}{s(C_1, \ldots, C_{n-1}, \varphi, 0)} \frac{\partial J_i(C_1 \ldots C_{n-1}, \varphi, 0)}{\partial \mu}$$

Соответствующая «укороченная» система уравнений будет иметь вид:

$$\frac{dC_i}{d\varphi} = \mu \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{s(C_1, \ldots, C_{n-1}, \varphi, 0)} \frac{\partial}{\partial \mu} J_i(C_1, \ldots, C_{n-1}, \varphi, 0)\, d\varphi =$$

$$= \mu \oint \sum_{j=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p_j}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} dt = \mu K_i(C_1, \ldots, C_{n-1})$$

Устойчивость состояния равновесия укороченной системы будет означать устойчивость соответствующего периодического движения системы.

Отметим, что рассмотренная в настоящей заметке теория легко может быть перенесена и на динамические системы типа (16), близкие к допускающим разделение переменных гамильтоновым, квазипериоды которых соизмеримы.

Оценивая значение изложенной теории для приложений, заметим, что эффективность ее применения к конкретным задачам определяется существованием у порождающей консервативной системы (17) полной системы $n-1$ однозначных интегралов.

При $n=2$ для обычных механических или физических автоколебательных задач такая полная система всегда существует — она представляет собой интеграл энергии. При $n=3$ наличие такой системы также не представляет собой очень редкий случай.

В качестве примера на применение теории при $n=3$ рассмотрим нелинейную систему уравнений, встретившуюся при изучении автоколебаний дискретной модели звезды [6]:

$$\frac{dx}{dt}=z, \qquad \frac{dy}{dt}=-a\frac{yz}{x}-\mu Q(x, y), \qquad \frac{dz}{dt}=-\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x} \tag{19}$$

где μ — малый параметр и член

$$\mu Q(x, y)=\mu\left(x^{-3\alpha}e^{-b(y^{1/3}-1)}-x^{3m+4}x^{4+s}\right) \qquad (b, \alpha, m, s>0, a>1)$$

мал в сравнении с другими.

Линеаризируя уравнения (19) и применяя условия Рауза-Гурвица, найдем, что единственное состояние равновесия $x=1$, $y=1$, $z=0$ системы (19) неустойчиво, если

$$A=\frac{1}{3}b+3\alpha+3m-s<0 \quad \text{или} \quad B=\frac{1}{3}a\left(4+s-\frac{1}{3}b\right)-m-\alpha-\frac{4}{3}<0$$

причем выполнение первого неравенства означает положительность действительного корня характеристического уравнения линеаризированной системы, выполнение же второго означает, что действительная часть комплексно-сопряженных корней положительна.

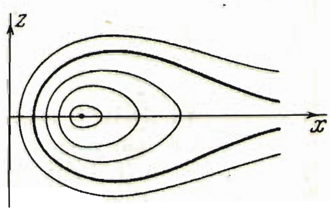
Пусть имеет место последнее, т. е. $B<0$, тогда как $A>0$; в этом случае изображающая точка (x, y, z) будет в силу системы (19) уходить от состояния равновесия осцилляторно.

Для решения вопроса о том, связано ли нарушение устойчивости состояния равновесия с неограниченным нарастанием колебаний или же с установлением автоколебаний, найдем интегралы консервативной системы

$$\frac{dx}{dt}=z, \quad \frac{\partial y}{dt}=-a\frac{yz}{x}, \quad \frac{\partial z}{dt}=-\frac{1}{x^2}+\frac{y}{x} \tag{20}$$

получающейся из (19) при $\mu=0$. Это будут

$$x^a y=C_1, \quad \frac{1}{2}z^2+\frac{1}{a}y-\frac{1}{x}=C_2 \tag{21}$$



Фиг. 1

Исключая из (21) переменную y и изображая получающуюся в результате этого зависимость между x и z на плоскости xz, находим фазовый портрет системы (20). Все фазовые траектории, изображенные на фиг. 1, отвечают некоторому фиксированному значению постоянной C_1 и различным значениям постоянной C_2. Жирная траектория соответствует значению $C_2 = 0$; внутренние по отношению к ней траектории соответствуют значениям постоянной $C_2 < 0$ и описывают периодические движения консервативной системы в пространстве x, y, z; внешние траектории соответствуют значениям $C_2 > 0$, они отвечают движениям, при которых координата x не является ограниченной. Для «порождающих» предельный цикл значений C_1, C_2 будем согласно (18) иметь

$$K_1(C_1, C_2) = \oint_0^T \frac{\partial (x^a y)}{\partial y} Q(x, y)\, dt = 0$$

$$K_2(C_1, C_2) = \oint_0^T \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{a} y \right) Q(x, y)\, dt = 0$$

или после упрощения и замены $dt = z^{-1} dx$ (22)

$$K_1(C_1, C_2) = \oint \frac{x^a}{z} Q(x, y)\, dx = 0, \qquad K_2(C_1, C_2) = \oint \frac{Q(x, y)}{z}\, dx = 0$$

где x, y, z связаны соотношениями (21).

Выражая здесь y и z с помощью (21) через x, C_1, C_2 и задаваясь физически интересными численными значениями постоянных $b = 6$, $\alpha = 1$, $m = 2$, $s = 3$, $a = 2$, находим, что для них $A > 0$, тогда как $B < 0$, т. е. состояние равновесия системы неустойчиво и уход от него осуществляется осцилляторно. В результате численного расчета убеждаемся, что для вышеуказанных значений b, α, m, s, a найдется система значений C_{10}, C_{20}, удовлетворяющая уравнениям (22). Задаваясь другими численными значениями коэффициентов, найдем новые C_{10}, C_{20}.

Таким образом, в описываемой уравнениями (19) динамической системе возникают автоколебания; уравнения траектории, соответствующей предельному циклу в нулевом приближении, будут

$$x^a y = C_{10}, \qquad \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{a} y - \frac{1}{x} = C_{20}$$

Отметим, что при $b = 0$ система (22) несовместна и предельного цикла нет — при возникновении неустойчивости состояния равновесия колебания в этом случае будут неограниченно нарастать.

Поступила 9 X 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О применении метода Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 4.
2. Понтрягин Л. С. Об автоколебательных системах, близких к гамильтоновым. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1934. Т. IV. № 9.
3. Власов Н. П. Автоколебания синхронного мотора. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1939. Т. IX. № 10.
4. Андронов А. А. и Горелик Г. С. О резонансных явлениях в циклотроне. ДАН СССР. 1945. Т. 49. № 9.
5. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат. 1949.
6. Жевакин С. А. Об автоколебаниях одной модели цефеид. ДАН СССР. 1947. Т. 58. № 3.