Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Н. П. Еругин
(Ленинград)

§ 1. Винтнером доказаны следующие теоремы[1].

Теорема I. Дана система

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где функции $X_k(x_1, \ldots, x_n, t)$ определены и непрерывны в области $-\infty < t < \infty$, $-\infty < x_k < \infty$. Если функции $X_k(x_1, \ldots, x_n, t)$ обладают свойством

$$X_k(x_1, \ldots, x_n, t) = O(|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

$$\text{при } |x_1| + \cdots + |x_n| \to \infty \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

то все решения системы (1.1) определены на всем промежутке $-\infty < t < \infty$.

Теорема II. Если существует непрерывная на промежутке $0 \leqslant r < \infty$ функция $L(r) > 0$ такая, что

$$\int_0^\infty \frac{dr}{L(r)} = \infty \tag{1.2}$$

$$|X_k(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqslant L(r) \qquad (r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) \tag{1.3}$$

то все решения системы (1.1) могут быть продолжены на весь промежуток $-\infty < t < \infty$.

Мы докажем эти теоремы следующим образом.

Замечая, что $|x_1| + \cdots + |x_n| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, легко получаем из системы (1.1)

$$2r\left|\frac{dr}{dt}\right| \leqslant (|x_1| + \cdots + |x_n|)\, L(r) \leqslant \sqrt{n}\, rL(r)$$

Для промежутка $t - t_0 > 0$ имеем

$$\frac{dr}{L(r)} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\, dt$$

так как $dt > 0$. Следовательно,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{L(r)} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}(t - t_0) \tag{1.4}$$

Отсюда видим на основании (1.2), что $t - t_0 \to \infty$ при $r \to \infty$, т. е. решения продолжимы при $t \to +\infty$.

Для $t - t_0 < 0$ также получаем

$$\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{L(r)} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}(t_0 - t) \tag{1.5}$$

Отсюда заключаем, что $t_0 - t \to \infty$ при $r \to \infty$, т. е. $t \to -\infty$.

Теорема I есть частный случай теоремы II, так как, очевидно,

$$|O(|x_1| + \cdots + |x_n|)| \leqslant (|x_1| + \cdots + |x_n|) M \leqslant \sqrt{n} rM$$

где постоянное $M > 0$.

Исходя из общей идеи этого доказательства, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если в системе (1.1) правые части удовлетворяют условию

$$rL(r) \leqslant |x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n| \qquad \text{при } r > r_0$$

где

$$L(r) > 0 \qquad \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{L(r)} \ \text{ограничено при } r \to \infty$$

то или решение системы (1.1) не продолжимо вне конечного промежутка $|t - t_0| \leqslant M$, или оно ограничено при $-\infty < t < \infty$.

Доказательство. Из системы (1.1) имеем

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{2\,rdr}{x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n}$$

Отсюда в силу условия теоремы

$$|t - t_0| \leqslant \int_{r_0}^{r} \frac{2\,rdr}{|x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n|} \leqslant \int_{r_0}^{r} \frac{2dr}{L(r)} < M = \text{const}$$

Отсюда на основании нашей теоремы[2] и следует утверждение.

Следовательно, в рассматриваемом случае точка $M(t)$ всякого движения, определяемого системой (1.1), может уходить в бесконечность только при t, стремящемся к конечному значению (или решения ограничены).

Пусть, в частности, имеем систему двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1.6}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы степени $\geqslant 2$.

Предположим, что, полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, получим

$$xP(x, y) + yQ(x, y) = r^{n+1}(N(\cos\theta, \sin\theta) + \varepsilon(r, \theta)) \qquad (n \geqslant 2)$$

где $N(\cos\theta, \sin\theta)$ представляет собой однородную форму степени $n + 1$ и $\varepsilon(r, \theta) \to 0$ при $r \to \infty$.

Если теперь $N(\cos\theta, \sin\theta) > 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, то условия теоремы выполнены и точка $M(t)$ движения либо уходит в бесконечность при $t \to T$ (конечное), либо остается в ограниченной части плоскости при $t \to \infty$.

Следствие. Если

$$N(\cos\theta, \sin\theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_1, \ldots, \theta_k \qquad (|\theta_l| < 2\pi)$$

то точка $M(t)$ движения может уходить в бесконечность только либо при $t \to T$ (конечное), либо заходя в как угодно малые окрестности направлений $\theta = \theta_m (m = 1, \ldots, k)$ (может быть, просто $M(t) \to \infty$, приближаясь асимптотически к одному из направлений $\theta = \theta_m$).

Все эти рассуждения наводят на предположение о том, что вообще продолжение всех решений системы (1.6) для $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, определенных и непрерывных на всей плоскости, на промежуток $-\infty < t < \infty$, повидимому, возможно только в случае, когда выполнены условия теоремы Винтнера или когда все решения ограничены при $-\infty < t < \infty$.

§ 2. Теперь мы будем рассматривать систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{2.1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, определенные и непрерывные на всей плоскости и удовлетворяющие условию Липшица во всякой конечной части плоскости.

Теорема 2. Предположим, что:

1) начало координат $(0, 0)$ — единственная точка равновесия;
2) движение $x = 0$, $y = 0$ устойчиво в смысле Ляпунова при $t \to +\infty$;
3) существует решение, ограниченное при $t \to -\infty$.

Тогда существует предельный цикл.

Теорема следует из нашей теоремы, приведенной в работе [3].

Теорема 3. Предположим, что

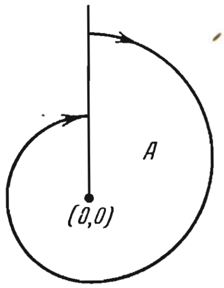
1) начало $(0, 0)$ — единственная точка равновесия;
2) невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво, т. е. $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to +\infty$, если $x^2(t_0) + y^2(t_0) \leqslant \varepsilon$;
3) прямая $L(0, \infty)$, уходящая в бесконечность из точки $(0, 0)$, пересекается движениями в одном направлении при $t \to +\infty$;
4) существует движение, пересекающее прямую $L(0, \infty)$ два раза и не обладающее свойством $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to +\infty$.

Тогда существует предельный цикл.

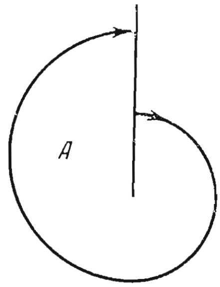
Доказательство. Пусть движение, упомянутое в условии 4 теоремы, проходит при $t \to \infty$ так, как указано на фиг. 1.

Так как в силу условий 3 и 4 точка $M(t)$ не может выйти из области (A), ограниченной рассматриваемой интегральной кривой и прямой $L(0, \infty)$, и не может входить в точку $(0, 0)$ при $t \to \infty$, то по теореме 4 Бендиксона предельный цикл есть.

Предположим теперь, движение проходит так, как указано на фиг. 2. Рассматривая теперь полутраекторию при $t \to -\infty$, мы по теореме 1.1 работы [3] заключаем, что эта полутраектория не входит в точку $(0, 0)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

А тогда, повторяя предыдущие рассуждения, мы снова обнаруживаем существование предельного цикла.

§ 3. Пусть $M(c, t)$ обозначает движение и $M(c, t_0) = c$, где c— точка того пространства, в котором происходит движение, соответствующая $t = t_0$.

Теорема 4. Предположим, что:

1) множество точек A открытое, определенное свойством $M(c, t) \subset A$ при $t(c, t_0) < t < \infty$, если $c \in A$, t_0 произвольное и движение $M(c, t)$ не продолжимо при $t < t(c, t_0)$;
2) движение $M(c, t) \to \infty$ при $t \to t(c, t_0)$ (тем самым $t(c, t_0) = -\infty$, если множество A ограниченное), когда $c \in \bar{A}$ (замыкание A) [1];
3) Движение $M(c, t)$ непрерывное по c и t для всех конечных $c \in \bar{A}$ и $t(c, t_0) < t < \infty$.

Тогда граница $A = \bar{A} - A$ состоит из движений

$$M(c, t) \subset \bar{A} - A$$

где

$$c \in \bar{A} - A$$

Доказательство. Пусть $c \in \bar{A} - A$, т. е. точка c принадлежит границе области A. По непрерывности $M(c, t)$ имеем

$$M(c_n, t) \to M(c, t) \qquad \text{при} \quad A \ni c_n \to c \quad (n \to \infty) \quad \text{и} \quad t(c, t_0) < t < \infty$$

Так как $M(c_n, t) \subset A \subset \bar{A}$, то и $M(c, t) \subset \bar{A}$.

Но $M(c, t)$ не принадлежит области A при любом t из промежутка $t(c, t_0) < t < \infty$, т. е. ни одна точка траектории $M(c, t)$ не принадлежит области A, если c взято на границе области A.

---

[1] Это предположение и следующее выполнено, если $\bar{A}$ погружено в область D, где правые части системы дифференциальных уравнений (1.1) непрерывны при всех t и удовлетворяют условиям непрерывности решений от начальных значений [2]. И само собой всегда это выполнено, если $X_k(x_1, \dots, x_n, t)$ удовлетворяют этим условиям во всем пространстве $(x_1, \dots, x_n, t)$.

Действительно, A открытое множество и $M(c, t) \subset A$ при всех t из промежутка $t(c, t_0) < t < \infty$, когда $c \in A$. Поэтому[1], если бы $M(c, t^*) \in A$, когда $c \in \bar{A} - A$, то и $c = M(c, t_0) \in A$, что противоречит выбору $c \in \bar{A} - A$. Следовательно, $M(c, t) \subset \bar{A} - A$ и теорема доказана.

Теорема 5. Предположим A все множество точек, определенное свойствами:

1) движение $M(c, t) \subset A$ при[2] $t(c, t_0) < t < \infty$, если $c \in A$;
2) для всякого движения $M(c, t)$, где $c \in A$, имеется $t^*, t(c, t_0) < t^* < \infty$ такое, что $M(c, t^*) \in g \subset A$, где g открытое множество, составляющее правильную часть множества A;
3) движение $M(c, t) \to \infty$ при[3] $t \to t(c, t_0)$, когда $c \in \bar{A}$;
4) движения $M(c, t)$ определены и непрерывны по c и t для всех конечных c из области $R \supset \bar{A}$ и $t(c, t_0) < t < \infty$.

Тогда граница области A состоит из траекторий, т. е. $M(c, t) \subset \bar{A} - A$, если $c \in \bar{A} - A$.

Доказательство. Если $c \in A$, то

$$M(c, t^*) \in g \subset A, \qquad t(c, t_0) < t^* < \infty$$

Но тогда по непрерывности $M(c, t)$ имеем

$$M(c^*, t^*) \in g \subset A$$

если $\rho(c, c^*) < \delta$, где $\rho(c, c^*)$ — расстояние между точками c и c^*. Отсюда следует, что если c принадлежит множеству A, то и некоторая окрестность c принадлежит A, т. е, множество A открытое.

Теорема 5 теперь следует из теоремы 4.

Следствие 1. Пусть дана система

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где X_k — непрерывные функции от $x_1, \ldots, x_n$ при всех конечных значениях этих аргументов и удовлетворяют условиям непрерывности решений от начальных значений.

Пусть теперь $M(c, t)$ — некоторое движение, определенное в промежутке $t_c < t < \infty$.

Точка $M(c, t)$ движется по траектории в одном направлении при $t \to \infty$, так как при конечных значениях t функции X_k не могут одновременно изменить знак. Обозначим через $M_1(c, t)$ полутраекторию движения $M(c, t)$ при $t > t_1$. Принимая за область A все множество точек

[1] Значение t_0 не может совпадать с $t(c, t_0)$ для рассматриваемого движения, так как если A ограниченное множество, то $t(c, t_0) = -\infty$, а t_0 конечное (тот момент, в который начинается движение в точке $c \in \bar{A} - A$); если же A неограниченное множество, то при $t \to t(c, t_0)$ должно быть $M(c, t) \to \infty$, а здесь при $t \to t_0$ имеем $M(c, t) \to c$ (граничная точка на конечном расстоянии).

[2] Это предположение выполнено само собой в силу условия 2, если рассматриваем систему уравнений $dx_k / dt = X_k(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. справа нет t.

[3] См. примечание к теореме 4 в сноске стр. 230.

траектории $M(c, t)$ и $M_1(c, t)$ за область g в теореме 5, получим, что предельное множество траектории $M(c, t)$ при $t \to \infty$ состоит из траекторий (может быть, конечно, это предельное множество есть просто точка равновесия или бесконечно удаленные точки, если нет предельных точек на конечном расстоянии).

Мы получили известный результат.

Следствие 2. Предположим, что невозмущенное движение $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ системы (3.1) положительно асимптотически устойчивое.

Тогда область, в которой начинаются движения, обладающие свойством $x_1 \to 0, \dots, x_n \to 0$ при $t \to \infty$, ограничена множеством, состоящим из движений.

Действительно, это получаем на основании теоремы 5, принимая за область g внутренность сферы достаточно малого радиуса, окружающей начало координат.

Следствие 3. Пусть в системе (3.1) система первого приближения имеет только характеристические числа с отрицательной вещественной частью за исключением одного, равного нулю. X_k предполагаем целыми функциями от $x_1, \dots, x_n$.

Тогда согласно теореме Ляпунова имеются три возможности.

1. Решение $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ неустойчивое.

2. Решение $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ положительно асимптотически устойчивое.

3. Имеется кривая L, проходящая через начало координат и состоящая из точек равновесия. И наряду с этим существует семейство B интегральных поверхностей $c = x_1 + F(x_1, \dots, x_n)$, зависящих от одного произвольного постоянного c, пересекающихся с кривой L.

Всякое движение, начинающееся в окрестности начала координат, не сходя с интегральной поверхности B, стремится к точке пересечения B и L при $t \to \infty$.

В случае 1 по теореме 5 имеется множество, состоящее из движений, ограничивающее область неустойчивости (устойчивости при $t \to -\infty$), или все пространство есть область уходящих от начала координат точек.

В случае 2 имеется множество, состоящее из движений, ограничивающее область асимптотической устойчивости, или все решения обладают свойством $x_1 \to 0, \dots, x_n \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим случай 3. Пусть интегральная поверхность B распространяется в бесконечность[1]. Тогда или все движения, начинающиеся на поверхности B, стремятся к точке пересечения B с кривой L при $t \to \infty$, или область таких решений ограничена некоторой совокупностью интегральных кривых, заполняющих многообразие $n - 2$ измерений.

Следствие 4. Если для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{3.2}$$

[1] Повидимому, для целых функций $X_k(x_1, \dots, x_n)$ и кривая L и поверхности B уходят в бесконечность.

невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ положительно асимптотически устойчивое в смысле Ляпунова, то область A, из которой исходят движения, обладающие свойством $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to \infty$, ограничена интегральной кривой[1].

Здесь предполагается, что граничные точки области A расположены внутри той области, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны.

Следствие 5. Область, окружающая предельный цикл системы (3.2) извне или внутри (т. е. область, где начинаются движения, наматывающиеся на цикл), ограничена интегральной кривой (может быть и уходящей в бесконечность, как и в случае асимптотической устойчивости точки (0,0)).

За область g в теореме 5 здесь нужно взять кольцо, прилегающее к циклу, в которое и заходят движения $M(c, t)$.

§ 4. *Теорема 6.* Предположим, что движения, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

заполняют замкнутые вокруг начала координат непересекающиеся поверхности, так что каждая из траекторий $M(c, t)$ расположена на одной из этих поверхностей.

Наоборот, эти поверхности состоят из этих траекторий.

Пусть A означает всю область вокруг начала координат, заполненную этими поверхностями и содержащуюся вместе с $\bar{A}$ в области, где выполнены условия теоремы единственности и непрерывной зависимости от начальных значений.

Тогда граница области A состоит из траекторий.

Доказательство. Так же, как в теореме 4, докажется, что $\bar{A}$ — замыкание области A — состоит из траекторий[2]. Таким образом, $M(c, t) \subset \bar{A}$, если $c \in \bar{A} - A$. Но траектория $M(c, t)$, если $c \in \bar{A} - A$, не может войти в область A, так как при этом она пересекала бы одну из замкнутых поверхностей, а следовательно, и бесконечное множество их и пересекала бы множество различных траекторий $M(c^*, t)$, где $c^* \in A$, что невозможно в силу теоремы единственности.

Поэтому $M(c, t) \subset \bar{A} - A$, если $c \in \bar{A} - A$, т. е. граница области A состоит из траекторий.

Эта граница $\bar{A} - A$ может, конечно, уходить и в бесконечность.

Замечание. Если предположить, что вокруг начала координат имеется область, заполненная поверхностями, покрытыми интегральными кривыми и не являющимися замкнутыми вокруг начала координат, то такая область также ограничена поверхностями, заполненными интегральными кривыми.

---

[1] Быть может, состоящей из множества ветвей.

[2] Очевидно, здесь A — так называемое инвариантное множество [1], поэтому таким же будет и $\bar{A}$, откуда и следует, что $\bar{A}$ состоит из траекторий.

Следствие. Область центра системы (3.2) ограничена интегральной кривой, если эта область вместе с A погружена в область, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных значений.

Предположим теперь, что в системе (4.1) функции $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ суть целые и первое приближение имеет два чисто мнимых характеристических числа, а вещественные части остальных отрицательные. Тогда, как показал Ляпунов, возможны три случая[1].

1. Невозмущенное движение, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ неустойчивое, т. е. устойчивое асимптотически при $t \to -\infty$, и, следовательно, область неустойчивости вокруг начала координат ограничена множеством, состоящим из интегральных кривых.

2. Невозмущенное движение $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ положительно асимптотически устойчиво, и, следовательно, область начальных значений, при которых $x_1 \to 0, \ldots, x_n \to 0$ при $t \to \infty$, ограничена множеством, состоящим из движений.

3. Имеется семейство периодических решений

$$x_k = x_k(c, t) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{A}$$

с периодом $\omega(c)$ и семейство интегральных поверхностей

$$c = x_1^2 + x_2^2 + F(x_1, \ldots, x_n) \tag{B}$$

где $F(x_1, \ldots, x_n)$ — голоморфная функция от $x_1, \ldots, x_n$.

Каждое из периодических решений (A) расположено на одной из интегральных поверхностей (B).

Всякое другое движение $M(c, t)$, не сходя с фиксированной интегральной поверхности семейства (B), описывает траекторию, приближающуюся к траектории единственного периодического решения из семейства (A), лежащего на этой поверхности.

По теореме 6 эта область неасимптотической устойчивости ограничена множеством, состоящим из движений.

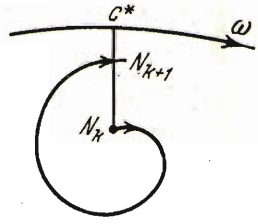
Пусть в системе (4.1) $n = 3$. Тогда на каждой фиксированной поверхности (B) или все решения наматываются на периодическое решение из семейства (A), или имеется интегральная кривая на поверхности (B), ограничивающая область, заполненную такими решениями. Это следует из теоремы 5.

§ 5. В этом параграфе будем рассматривать систему (2.1), предполагая $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ удовлетворяющими условию теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных значений во всякой конечной области.

Лемма. Если движение $M(c, t)$ не остается в ограниченной части плоскости и не стремится к бесконечности при $t \to +\infty$, то полутраектория $\overline{M}(c, t)$ (соответствующая $t \to -\infty$) остается в ограниченной части плоскости.

[1] Ляпунов предлагал $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ только голоморфными.

Доказательство. Движение $M(c, t)$ с указанным свойством имеет ω предельную точку c^* на конечном расстоянии.



Фиг. 3

Рассмотрим ω предельную траекторию $M(c^*, t)$, проходящую через точку c^* (фиг. 3).

Так как нормаль (c^*, N) к траектории $M(c^*, t)$ пересекается в точках $N_1, N_2, \ldots \to c^*$ последовательно траекторией[1] $M(c, t)$, то полутраектория $\overline{M}(c, t)$ не выходит из области, ограниченной дугой траектории $M(c, t)$, соответствующей промежутку $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, и отрезком нормали (N_k, N_{k+1}), где N_k и N_{k+1} соответствуют $t = t_k$ и $t = t_{k+1}$ и расположены достаточно близко к точке c^*. Таким образом, лемма доказана.

Теорема 7. Предположим, что:

1) начало координат $(0, 0)$ есть единственная точка равновесия;
2) движение $x = 0$, $y = 0$ есть положительно асимптотически устойчивое невозмущенное движение в смысле Ляпунова.

Тогда границей области асимптотической устойчивости будет либо предельный цикл, либо движение $M(c, t) \to \infty$ как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Доказательство. Пусть c — граничная точка области асимптотической устойчивости A.

Проведем через c интегральную кривую $M(c, t)$, которая и будет входить в границу области A. Если $M(c, t)$ остается в ограниченной части плоскости при $t \to \infty$, то так как $M(c, t)$ не входит в точку $(0, 0)$ при $t \to \infty$ (иначе бы c не была граничной точкой области A), то $M(c, t)$ либо замкнутая, либо накручивается на замкнутую кривую. Но если она накручивается, как спираль, на замкнутую кривую изнутри, то при $t \to -\infty$ она должна войти в точку $(0, 0)$, чего быть не может согласно условию 2 теоремы и на основании теоремы 1.1 работы [3]. Если она накручивается на замкнутую интегральную кривую извне, то точка c не может быть предельной, так как между областью асимптотической устойчивости и точкой c лежит предельный цикл.

Если $M(c, t)$ не остается в ограниченной части плоскости, т. е. если $M(c, t)$ не цикл, то на основании нашей теоремы [2] и леммы $M(c, t) \to \infty$, как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Теорема 8. Предположим, что:

1) начало координат $(0, 0)$ есть единственная точка равновесия и $x = 0$, $y = 0$ — асимптотически устойчивое невозмущенное движение;
2) нет движений, уходящих в бесконечность при $t \to \infty$;
3) нет предельного цикла.

---

[1] Предполагая, что существует замкнутая вокруг конечной области $g \ni M(c, t_k)$ $(t_1, t_2, \ldots \to \infty)$ кривая L, не содержащая точек равновесия, можем $c^* \in L$ считать не точкой равновесия.

Тогда область асимптотической устойчивости есть вся плоскость xy.

Теорема следует из теоремы 7.

Теорема 9. Предположим, что:

1) Движение $x = 0, y = 0$ — асимптотически положительно устойчивое невозмущенное движение;
2) нет предельного цикла, окружающего область асимптотической устойчивости;
3) область асимптотической устойчивости конечная.

Тогда, кроме (0,0), имеются еще точки равновесия на конечном расстоянии.

Доказательство. Пусть $M(c, t)$ — интегральная кривая — граница области асимптотической устойчивости вокруг точки (0,0). Движение $M(c, t)$ по условию 3 теоремы остается в ограниченной части плоскости. Но если нет точек равновесия, кроме (0,0), то $M(c, t)$ не может оставаться в конечной части плоскости, так как движение $M(c, t)$ не может по условию 2 быть периодическим или наматываться на периодическое решение, а также входить обоими концами в точку (0,0) согласно нашей теореме (1.1) работы [3].

Теорема доказана.

Поступила 27 XI 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ. 1949.
2. Еругин Н. П. О продолжении решений дифференциальных уравнений. ПММ. 1951. Т. XV. Вып. 1.
3. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 5.