Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИИ МАЛЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Н. Г. Бондарь
(Днепропетровск)

1. Уравнение вынужденных затухающих малых колебаний любой стержневой системы (как плоской, так и пространственной), несущей распределенные и сосредоточенные массы и загруженной распределенными и сосредоточенными силами, можно записать в виде

$$y(x, t) + \int_l G(x, s)[\ddot{y}(s, t) + \psi\dot{y}(s, t)]\, d\sigma(s) = \int_l G(x, s)\, dR(s, t) \qquad (1.1)$$

Здесь $y(x, t)$ — динамические перемещения сечений системы, $G(x, s)$ — ядро (функция влияния системы), которое будет положительно определенным, симметричным и непрерывным или, по крайней мере, регулярным, $dR(s, t)$ и $d\sigma(s)$ — соответственно сила и масса, приходящиеся на участок ds системы, ψ — коэффициент сопротивления в предположении пропорциональности сил сопротивления, действующих на участок ds, количеству движения массы $d\sigma(s)$. Интегралы в (1.1) и дальше распространяются по всей протяженности системы и понимаются в смысле Чебышева-Стилтьеса.

Решением интегро-дифференциального уравнения (1.1) будет

$$y(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\psi t}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[A_k \cos p_k t + B_k \sin p_k t +$$

$$+ \frac{1}{p_k}\int_0^t\int_l e^{\frac{1}{2}\psi\tau}\varphi_k(s)\sin p_k(t-\tau)\, d\tau\, dR(s, \tau)\Big]\varphi_k(x) \qquad (1.2)$$

Это выражение представляет собой обобщение одного результата, полученного Ф. Р. Гантмахером и М. Г. Крейном [1]. Произвольные постоянные A_k и B_k определяются из начальных условий

$$y(x, 0) = \eta_1(x), \qquad \dot{y}(x, 0) = \eta_2(x)$$

по формулам

$$A_k = \int_l \eta_1(s)\varphi_k(s)\, d\sigma(s), \qquad B_k = \frac{1}{p_k}\int_l \Big[\frac{\psi}{2}\eta_1(s) + \eta_2(s)\Big]\varphi_k(s)\, d\sigma(s) \qquad (1.3)$$

Частоты свободных затухающих колебаний определяются формулой

$$p_k = \sqrt{\lambda_k - \left(\frac{\psi}{2}\right)^2}, \qquad \lambda_k > \left(\frac{\psi}{2}\right)^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

где λ_k являются характеристическими числами нагруженного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_l G(x, s)\varphi(s)\, d\sigma(s) \qquad (1.4)$$

Так как ядро $G(x, s)$ симметрично, то характеристические числа λ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ все вещественны и последовательности характеристических] чисел можно сопоставить [1] последовательность фундаментальных функций $\{\varphi_k(x)\}$, дающих ортонормированную систему

$$\int_l \varphi_k(s)\,\varphi_i(s)\,d\sigma(s) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.5}$$

В силу положительной определенности ядра [1] все характеристические числа

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k < \ldots \tag{1.6}$$

будут положительными.

Из вышеизложенного ясно, что знание системы фундаментальных функций дает решение задачи о вынужденных колебаниях любой стержневой системы. Это же обстоятельство имеет место и при решении некоторых задач динамической устойчивости стержневых систем [2].

Однако только для узкого круга элементарных задач возможно определить фундаментальные функции системы. Поэтому для сколько-нибудь сложных задач остается путь приближенного решения. Здесь излагаются некоторые общие результаты в этом направлении.

Докажем две теоремы, следствия из которых дают возможность приближенного определения фундаментальных функций любого порядка.

2. *Теорема 1.* Пусть q_k — кратность k-го характеристического числа λ_k и $\varphi_k(x)$ — соответствующая фундаментальная функция нагруженного интегрального уравнения, ядро которого $G(x, s)$ вещественно, симметрично, положительно определенно и регулярно; тогда последовательность функций

$$\lambda_k K(x, x), \quad \lambda_k^2 K_2(x, x), \quad \lambda_k^3 K_3(x, x), \ \ldots, \ \lambda_k^m K_m(x, x), \ \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно сверху к пределу

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_k^m K_m(x, x) = \sum_{i=k}^{k+q_k} \varphi_i^2(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

на всем промежутке изменения x при условии $d\sigma(x) \neq 0$.

Здесь $K_m(x, s)$ есть итерация ядра

$$K(x, s) = G(x, s) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(s)}{\lambda_i} \tag{2.2}$$

определяемая рекуррентными соотношениями

$$K_1(x, s) = K(x, s), \qquad K_m(x, s) = \int_l K_n(x, u)\,K_{m-n}(u, s)\,d\sigma(u) \tag{2.3}$$

где m и n — любые натуральные числа, причем $m > n$.

Доказательство. Как известно [1,3], все результаты теории обыкновенных интегральных уравнений обобщаются на нагруженные интегральные уравнения, если только $\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$ для $x_2 > x_1$, и $d\sigma(x) \neq 0$ на всем промежутке изменения x. Поэтому будем пользоваться этими результатами без специальных оговорок, так как в задачах на колебания функция распределения $\sigma(x)$ является монотонно-возрастающей.

Из теории интегральных уравнений известна теорема [4], что, если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k, \ldots$ есть последовательность всех характеристических чисел ядра $G(x, s)$ и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции, тогда λ_k есть наименьшее характеристическое число ядра (2.2), а $\varphi_k(x)$ — первая собственная функция этого же ядра.

В силу этой теоремы для доказательства теоремы 1 достаточно показать абсолютную и равномерную сходимость сверху последовательности

$$\lambda_1 G(x, x), \quad \lambda_1^2 G_2(x, x), \quad \lambda_1^3 G_3(x, x), \ldots, \lambda_1^m G_m(x, x), \ldots \tag{2.4}$$

к пределу

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_1^m G_m(x, x) = \sum_{i=1}^{q_1} \varphi_i^2(x) \tag{2.5}$$

на всем промежутке изменения x. Из теории интегральных уравнений известно разложение m-й итерации ядра [5]

$$G_m(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^m} \tag{2.6}$$

сходящееся абсолютно и равномерно для непрерывного ядра при $m \geqslant 1$ (теорема Мерсера) и для регулярного ядра при $m \geqslant 2$.

Известно также, что в случае кратности q_1 первого характеристического числа ему соответствует q_1 линейно независимых фундаментальных функций. В этом случае разложение (2.6), полагая в нем $x = s$, можно записать в виде

$$G_m(x, x) = \frac{1}{\lambda_1^m} \sum_{i=1}^{q_1} \varphi_i^2(x) + \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{q_1} \varphi_i^2(x) = \lambda_1^m G_m(x, x) - \lambda_1^m \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} \tag{2.7}$$

Отсюда ясно, что для справедливости предела (2.5) необходимо существование предела

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_1^m \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} = 0 \tag{2.8}$$

Докажем существование этого предела. В силу неравенств (1.6) и вещественности ядра можно записать неравенства

$$\lambda_1^m \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} = \lambda_1^m \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{m-2}} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} < \frac{\lambda_1^m}{\lambda_{q_1+1}^{m-2}} \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} <$$

$$< \lambda_{q_1+1}^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{q_1+1}}\right)^m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \tag{2.9}$$

Применяя к разложению (2.6) при $m=1$ неравенство Бесселя [5] получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leqslant \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s) \tag{2.10}$$

Знак равенства всегда будет иметь место для непрерывного ядра (равенство Парсеваля). Следовательно,

$$\lambda_1^m \sum_{i=q_1+1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} < \lambda_{q_1+1}^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{q_1+1}}\right)^m \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s) \tag{2.11}$$

Так как $\lambda_1 / \lambda_{q_1+1} < 1$, а интеграл в правой части ограничен сверху для регулярного ядра, то, очевидно, существует предел

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_{q_1+1}^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{q_1+1}}\right)^m \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s) = 0 \tag{2.12}$$

Отсюда в силу неравенства (2.11) вытекает справедливость предела (2.8), а значит и существование предела (2.5).

Стремление последовательности функций (2.4) к пределу (2.5) сверху вытекает из равенства (2.7) в силу (1.6) и вещественности ядра $G(x, s)$. На этом же основании справедливо утверждение об абсолютной сходимости последовательности (2.4).

Что касается равномерной сходимости последовательности (2.4), то она вытекает непосредственно из (2.12) и (2.11). Теорема доказана.

3. Укажем на некоторые частные случаи теоремы 1, следствия из которых имеют практическое значение.

Если кратность k-го характеристического числа равна единице, то выражение (2.1) упростится к виду

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_k^m K_m(x, x) = \varphi_k^2(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

откуда как следствия вытекают оценки сверху:

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k^m K_m(x, x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k^{m-1} K_{m-1}(x, x)}\right| \leqslant \cdots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k K(x, x)}\right|$$
$$(m \geqslant 1,\ k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

Здесь и дальше равенство будет иметь место только для опорных точек стержневой системы, так как ядра $G(x, s)$, $K(x, s)$ и фундаментальные функции удовлетворяют одинаковым и притом нулевым граничным условиям. Полагая $k=1$ в (3.1), получим оценки первой фундаментальной функции сверху:

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1^m G_m(x, x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1^{m-1} G_{m-1}(x, x)}\right| \leqslant \cdots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_1 G(x, x)}\right| \tag{3.2}$$

Эти оценки будут справедливы, если известно достаточно точное значение первого характеристического числа λ_1. Однако точное значение λ_1 для сколько-нибудь сложных стержневых систем найти весьма затруднительно. Можно лишь указать на приближенные оценки первого характеристического числа.

Тривиально обобщая известные оценки характеристического числа обыкновенных интегральных уравнений [4] для нагруженных интегральных уравнений, будем иметь

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{A_m}}\right| < \lambda_1 < \left|\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}\right| \qquad (m \geqslant 1) \tag{3.3}$$

Здесь A_m есть m-й след ядра $G(x, s)$, определяемый выражением

$$A_m = \int_l G_m(s, s)\, d\sigma(s) \tag{3.4}$$

Интерпретируя и обобщая результаты С. А. Бернштейна [6] об оценках частоты основного тона свободных колебаний упругих систем, получим другие оценки:

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{A_m}}\right| < \lambda_1 < \left|\frac{\sqrt[m]{2}}{\sqrt[m]{A_m\left(1+\sqrt{2A_{2m}/A_m^2-1}\right)}}\right| \qquad (m \geqslant 1) \tag{3.5}$$

Достаточным условием справедливости этих оценок будет выполнение неравенства $2A_2 \geqslant A_1^2$.

Обобщая и инерпретируя аналогичные результаты П Ф. Папковича[7], А. Ф. Смирнова [8] и Ван-ден-Дунгена [9], будем иметь

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{A_m}}\right| < \lambda_1 < \left|\sqrt[m]{\frac{A_m}{A_{2m}}}\right| \qquad (m \geqslant 1) \tag{3.6}$$

Очевидно, неравенства (3.2) можно сохранить, если вместо точного значения λ_1 подставить оценки сверху по (3.3), (3.5) и (3.6). Учитывая точность этих оценок, получаем неравенства

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \left|\frac{\sqrt{2G_m(x, x)}}{\sqrt{A_m\left(1+\sqrt{2A_{2m}/A_m^2-1}\right)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sqrt[4]{\frac{A_{2m}{}^m G_m{}^2(x, x)}{A_{2m+2}{}^m}}\right| \leqslant \left|\sqrt{\frac{A_m G_m(x, x)}{A_{2m}}}\right| \tag{3.7}$$

Ясно, что точность оценок (3.7) возрастает с увеличением m. В силу положительности квадрата фундаментальных функций неравенства (3.2) и (3.7), очевидно, усиливаются для случая кратности первого характеристического числа.

Заметим, что неравенства (3.1) можно практически использовать, если известны точные значения или оценки сверху k первых характеристических чисел и оценки снизу $k-1$ первых фундаментальных функций. Однако практически не всегда удается определить предыдущие фундаментальные функции с достаточной степенью точности.

4. Укажем прием, при помощи которого можно определить последующие фундаментальные функции без использования предыдущих. Продемонстрируем этот прием на случае определения второй фундаментальной функции (свойства ядра и обозначения предполагаем прежние).

Теорема 2. Если $q_1 = q_2 = 1$, то последовательность функций

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2-\lambda_1}[G(x,x)-\lambda_1 G_2(x,x)]\\
&\frac{\lambda_2^4}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}[G_2(x,x)-\lambda_1^2 G_4(x,x)]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_2^m-\lambda_1^m}[G_m(x,x)-\lambda_1^m G_{2m}(x,x)]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{4.1}$$

сходится абсолютно и равномерно сверху к пределу

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_2^m-\lambda_1^m}[G_m(x,x)-\lambda_1^m G_{2m}(x,x)]=\varphi_2^2(x)\tag{4.2}$$

на всем промежутке изменения x при условии $d\sigma(x)\neq 0$

Доказательство. В силу выражения (2.7) можно записать

$$\varphi_1^2(x)=\lambda_1^m G_m(x,x)-\lambda_1^m\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m}=\lambda_1^{2m}G_{2m}(x,x)-\lambda_1^{2m}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^{2m}}$$

Отсюда после преобразований получаем

$$\lambda_1^m[G_m(x,x)-\lambda_1^m G_{2m}(x,x)]=\sum_{i=2}^{\infty}\varphi_i^2(x)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\right]$$

Последнее выражение можно представить еще так:

$$\begin{gathered}
\lambda_1^m[G_m(x,x)-\lambda_1^m G_{2m}(x,x)]=\\
=\varphi_2^2(x)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m\right]+\sum_{i=3}^{\infty}\varphi_i^2(x)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^m\right]
\end{gathered}\tag{4.3}$$

После преобразований найдем

$$\varphi_2^2(x)=\frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_2^m-\lambda_1^m}[G_m(x,x)-\lambda_1^m G_{2m}(x,x)]-\sum_{i=3}^{\infty}\varphi_i^2(x)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_i}\right)^m\frac{1-(\lambda_1/\lambda_i)^m}{1-(\lambda_1/\lambda_2)^m}$$

Отсюда ясно, что для доказательства теоремы необходимо показать существование предела

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=3}^{\infty}\varphi_i^2(x)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_i}\right)^m\frac{1-(\lambda_1/\lambda_i)^m}{1-(\lambda_1/\lambda_2)^m}=0\tag{4.4}$$

Для этого представим его в виде

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_2^m\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m}}{1-(\lambda_1/\lambda_2)^m}-\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_2^m\lambda_1^m\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^{2m}}}{1-(\lambda_1/\lambda_2)^m}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_2^m\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m}}{\lim\limits_{m\to\infty}[1-(\lambda_1/\lambda_2)^m]}-\frac{\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_2^m\lambda_1^m\sum\limits_{i=3}^{\infty}\frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^{2m}}}{\lim\limits_{m\to\infty}[1-(\lambda_1/\lambda_2)^m]}$$

В силу неравенства $\lambda_1 / \lambda_2 < 1$ и в силу теоремы 1 соответственно имеем

$$\lim_{m \to \infty} \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m\right] = 1, \qquad \lim_{m \to \infty} \lambda_2^m \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} = 0 \tag{4.5}$$

Таким образом, осталось показать существование предела

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_1^m \lambda_2^m \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^{2m}} = 0 \tag{4.6}$$

В силу неравенств (1.6) и вещественности ядра имеем

$$\lambda_1^m \lambda_2^m \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^{2m}} =$$

$$= \lambda_1^m \lambda_2^m \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{2m-2}} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} < \frac{\lambda_1^m \lambda_2^m}{\lambda_3^{2m-2}} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} < \frac{\lambda_1^m \lambda_2^m}{\lambda_3^{2m-2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \tag{4.7}$$

На основании неравенства Бесселя (2.10) имеем

$$\frac{\lambda_1^m \lambda_2^m}{\lambda_3^{2m-2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^2} \leqslant \lambda_3^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^m \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s) \tag{4.8}$$

Так как $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, а интеграл в правой части ограничен сверху для регулярного ядра, то, очевидно, существует предел

$$\lim_{m \to \infty} \lambda_3^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^m \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(x) = 0 \tag{4.9}$$

Отсюда в силу неравенств (4.7) вытекает справедливость предела (4.6), а значит и предела (4.4), что и доказывает существование предела (4.2).

Стремление последовательности функций (4.1) к пределу (4.2) сверху вытекает из равенства (4.3) в силу (1.6) и вещественности ядра. На том же основании справедливо утверждение об абсолютной сходимости последовательности (4.1); равномерная сходимость последовательности (4.1), вытекает непосредственно из (4.9), (4.8) и (4.7). Теорема доказана.

Как следствие теоремы 2 получаем оценку для второй фундаментальной функции:

$$|\varphi_2(x)| \leqslant \left| \sqrt{\frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_2^m - \lambda_1^m} \left[G_m(x, x) - \lambda_1^m G_{2m}(x, x)\right]} \right| \quad (m \geqslant 1) \tag{4.10}$$

Здесь равенство будет иметь место только для опорных точек.

Для случая, когда точные значения λ_1 и λ_2 неизвестны, оценку (4.10) можно сохранить, пользуясь оценками (3.3), (3.5) и (3.6), которые будут справедливы и для λ_2, если вместо следа A_m подставить след $B_m = A_m - \lambda_1^{-m}$ (см. ниже). Так, например, пользуясь оценками (3.6), легко получить усиленное по сравнению с (4.10) неравенство

$$|\varphi_2(x)| \leqslant \frac{A_m^2}{A_{2m}} \left| \sqrt{\frac{A_m (A_m^2 - A_{2m})}{A_{2m}(2A_{2m} - A_m^2)} \left[G_m(x, x) - \frac{G_{2m}(x, x)}{A_m}\right]} \right| \quad (m \geqslant 1) \tag{4.11}$$

которое уже не содержит характеристических чисел.

5. Аналогичным образом можно получить предельные формулы и оценки для фундаментальной функции любого порядка. Однако чем выше порядок функции, тем более громоздки будут эти формулы. Можно указать более простые оценки:

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k^m G_m(x,x)}\right| \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k^{m-1} G_{m-1}(x,x)}\right| \leqslant \cdots \leqslant \left|\sqrt{\lambda_k G(x,x)}\right|$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (5.1)$$

Как известно [5],

$$\varphi_k(x) = \lambda_k^n \int_l G_n(x,s)\, \varphi_k(s)\, d\sigma(s) \qquad (n \geqslant 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Возводя эти выражения в квадрат и применяя к ним неравенство Буняковского-Шварца, получим

$$\varphi_k^2(x) \leqslant \lambda_k^{2n} \int_l G_n^2(x,s)\, d\sigma(s) \int_l \varphi_k^2(s)\, d\sigma(s) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

В силу ортонормированности по отношению к $d\sigma(s)$ системы фундаментальных функций (1.5). будем иметь

$$\varphi_k^2 \leqslant \lambda_k^{2n} \int_l G_n^2(x,s)\, d\sigma(s) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Заметим, что из симметричности ядра $G(x, s)$ и рекуррентных соотношений для итераций ядра вытекает

$$\int_l G_n^2(x,s)\, d\sigma(s) = \int_l G_n(x,s)\, G_n(x,s)\, d\sigma(s) = \int_l G_n(x,s) G_n(s,x)\, d\sigma(s) = G_{2n}(x,x) \qquad (5.2)$$

Полагая $2n = m$ и учтя неравенства (3.1), приходим к неравенствам (5.1). Легко видеть, что оценки (3.2) являются частным случаем оценок (5.1).

Неравенства (5.1), очевидно, сохранятся, если вместо λ_k подставить его оценку сверху по (3.3), (3.5) и (3.6), которые будут справедливы и для λ_k, если вместо следов ядра $G(x, s)$ подставить следы ядра $K(x, s)$, определенного формулой (2.2), так как λ_k является первым характеристическим числом ядра $K(x, s)$. Найдем зависимость между следами ядер $G(x, s)$ и $K(x, s)$. Пользуясь рекуррентными соотношениями (2.3), учтя (1.4) и (2.2), нетрудно получить соотношения между итерациями ядер:

$$K_m(x,s) = G_m(x,s) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i(x)\, \varphi_i(s)}{\lambda_i^m} \qquad (5.3)$$

Принимая во внимание (1.5), находим искомую зависимость:

$$B_m = \int K_m(s,s)\, d\sigma(s) = A_m - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^m}$$

Таким образом, согласно (3.6), например, будем иметь

$$\left|\left(A_m - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^m}\right)^{-1/m}\right| < \lambda_k < \left|\left(A_m - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^m}\right)^{1/m} \left(A_{2m} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\lambda_i^{2m}}\right)^{-1/m}\right|$$

$$(m \geqslant 1)$$

Подобным образом можно использовать и оценки (3.3), (3.5).

Последовательно применяя эти оценки для $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}$, можно найти двусторонние оценки для λ_k через следы ядра $G(x, s)$. Ясно, что точность оценок с увеличением k будет падать. Заметим, что зависимости между следами ядер получены для случая, когда первые $k-1$ характеристические числа некратны.

Сделаем несколько замечаний относительно точности полученных выше оценок для фундаментальных функций.

Из неравенств (3.2) вытекает приближенное равенство, дающее значение квадрата первой фундаментальной функции с избытком

$$\varphi_1^2(x) \approx \lambda_1^m G_m(x, x)$$

Из неравенств (2.11) следует, что абсолютная погрешность такого определения $\varphi_1^2(x)$ не превзойдет величины

$$\lambda_2^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s) = \lambda_2^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^m G_2(x, x)$$

Из неравенства (4.10) вытекает приближенное равенство, дающее значение квадрата второй фундаментальной функции с избытком:

$$\varphi_2^2(x) \approx \frac{\lambda_2^{2m}}{\lambda_2^m - \lambda_1^m} \left[G_m(x, x) - \lambda_1^m G_{2m}(x, x)\right]$$

Из неравенств (4.7) и (4.8) следует, что абсолютная погрешность такого определения $\varphi_2^2(x)$ не превзойдет величины

$$\lambda_3^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^m \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^m G_2(x, x)$$

Учтя (5.3), представим оценки (3.1) в виде

$$|\varphi_k(x)| \leqslant \left|\left(\lambda_k^m \left[G_m(x, x) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m}\right]\right)^{1/2}\right|$$

Так как

$$\lambda_k^m G_m(x, x) > \lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\varphi_i^2(x)}{\lambda_i^m} > 0$$

то отсюда следует, что оценки (3.1) точнее оценок (5.1). Однако практически удобнее пользоваться оценками (5.1), так как в оценках (3.1) приходится иметь дело с разностями близких величин.

Использование полученных выше результатов для простейших систем, фундаментальные функции которых известны, позволяет сделать следующие общие замечания отнсситально точности полученных оценок для фундаментальных функций.

1. Точность оценок улучшается с увеличением абсолютного значения фундаментальной функции. Наилучшая точность наблюдается в областях, окружающих экстремальные точки фундаментальной функции.

2. Точность оценок падает с увеличением порядка аппроксимируемой фундаментальной функции.

3. Точность оценок уменьшается с увеличением жесткости системы.

6. Проиллюстрируем точность некоторых результатов на примере шарнирно опертой на двух опорах балки, несущей равномерно распределенную массу m.

Для этой задачи известны точные значения всех характеристических чисел и ортонормированных фундаментальных функций:

$$\lambda_k = \frac{k^4\pi^4 EI}{l^4 m}, \qquad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}}\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Здесь EI — жесткость балки, l — пролет балки.

Ядро, как известно, имеет вид (начало координат на опоре):

$$G(x, s) = \frac{1}{6lEI}(2l^2sx - ls^3 - 3lsx^2 + sx^3 + s^3x) \qquad (x \geqslant s)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями для итерированных ядер, найдем для $x \geqslant s$

$$G_2(x, s) = \int_0^l G(x,r)G(r, s)\,d(mr) = m\int_0^s G(x \geqslant r)G(r \leqslant s)\,dr +$$

$$+ m\int_s^x G(x \geqslant r)G(r \geqslant s)\,dr + m\int_x^l G(x \leqslant r)G(r \geqslant s)\,dr =$$

$$= \frac{m}{36(lEI)^2}\Big[\frac{2}{35}sx^8 - \frac{1}{5}lsx^7 + \frac{1}{15}sx^6(3l^2 - 2s^2) + \frac{3}{5}ls^3x^5 -$$

$$- l^2s^3x^4 + \frac{1}{15}sx^3(10l^3s^2 + 2s^5 - 3ls^4 - 2l^5) + \frac{1}{5}ls^5x^2(3l - 2s) +$$

$$+ \frac{1}{105}sx(27ls^6 - 6s^7 - 14l^5s^2 + 8l^7 - 42l^3s^4) + \frac{1}{105}ls^6(28l^2 + 6s^2 - 27ls)\Big]$$

В силу симметричности ядер $G(x, s)$ и $G_2(x, s)$ [4] их значения при $s \geqslant x$ легко получить, заменяя x на s, и наоборот. Полагая $x = s$, найдем

$$G(x, x) = \frac{1}{3lEI}(l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)$$

$$G_2(x, x) = \frac{x^2m}{945\,l(EI)^2}(3x^6 - 12lx^5 + 14l^2x^4 - 7l^4x^2 + 2l^6)$$

Вычисляем следы ядер по формуле (3.4):

$$A_1 = \int_0^l G(x, x)\,d(mx) = \frac{l^4m}{90\,EI}$$

$$A_2 = \int_0^l\int_0^l G^2(x, s)\,d(mx)\,d(ms) = m\int_0^l G_2(x, x)\,d(mx) = \frac{l^8m^2}{9450\,(EI)^2}$$

Как видим, следы ядра совпадают со следами соответствующей спектральной функции С. А. Бернштейна [6].

Пользуясь оценками (3.5), найдем приближенные значения первого характеристического числа:

$$\lambda_{1-} = \sqrt{\frac{1}{A_2}} = \frac{97.26\,EI}{l^4m} < \lambda_1 < \frac{97.61\,EI}{l^4m} = \frac{2}{A_1(1 + \sqrt{2A_2/A_1^2 - 1})} = \lambda_{1+}$$

При точном решении

$$\lambda_1 = \frac{\pi^4 EI}{l^4 m} \qquad (\pi^4 = 97.329\ \ldots)$$

Остальные вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

x		$\frac{1}{2}\,l$	$\left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) l$	$\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) l$	$\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) l$	Множитель
$\lvert \varphi_1(x) \rvert$	(1)	1.41	1.31	1.00	0.542	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
$\left\lvert \sqrt{\lambda_{1+} G(x,x)} \right\rvert$	(2)	1.43	1.33	1.07	0.622	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
$\frac{(2)-(1)}{(1)} 100\ \%$	(3)	1.4	1.5	7.0	14.8	1
$\lambda_{1+} \left\lvert \sqrt{G_2(x,x)} \right\rvert$	(4)	1.41	1.31	1.0	0.545	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
$\frac{(4)-(1)}{(1)} 100\ \%$	(5)	0.0	0.0	0.0	0.5	1
$\lvert \varphi_2(x) \rvert$	(6)	0.00	1.00	1.41	1.00	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
ервое приближение $\lvert \varphi_2(x) \rvert$ по оценке (4.11)	(7)	0.22	2.41	2.43	1.80	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
$\frac{(7)-(6)}{(6)} 100\%$	(8)	—	141	72.5	80	1
Первое приближение $\lvert \varphi_2(x) \rvert$ по оценке (4.10)	(9)	0.05	1.15	1.52	1.11	$\frac{1}{\sqrt{ml}}$
$\frac{(9)-(6)}{(6)} 100\%$	(10)	—	15	7.8	11	1

7. Обратимся к вопросу аппроксимации функции динамических перемещений стержневых систем.

Из решения (1.2) можно получить приближенное равенство, если ограничиться конечным числом членов ряда и подставить приближенные значения фундаментальных функций и характеристических чисел по оценкам, указанным выше.

Рассмотрим некоторые случаи, когда оказывается возможным получить оценку погрешности приближенного решения.

Представим функцию динамических перемещений в виде

$$y(x, t) = u(x, t) + v(x, t) \tag{7.1}$$

где

$$u(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\psi t} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos p_k t + B_k \sin p_k t]\, \varphi_k(x) \tag{7.2}$$

является общим решением однородного уравнения

$$u(x, t) + \int_l G(x, s)\, [\ddot{u}(s, t) + \psi \dot{u}(s, t)]\, d\sigma(s) = 0 \tag{7.3}$$

и определяет собой собственные колебания системы.

Подставляя (7.1) в (1.1) и учтя (7.3), выясняем, что $v(x, t)$ представляет собой частное решение неоднородного уравнения

$$v(x, t) + \int_l G(x, s)\,[\ddot{v}(s, t) + \psi\dot{v}(s, t)]\,d\sigma(s) = \int_l G(x, s)\,dR(s, t) \tag{7.4}$$

Для установившегося режима колебаний, когда свободные колебания затухнут, будем иметь

$$y(x, t) = v(x, t)$$

Для сокращения записей введем операторы

$$F[v(s, t)] = \ddot{v}(s, t) + \psi\dot{v}(s, t), \qquad f(x, t) = \int_l G(x, s)\,dR(s, t)$$

Это позволяет уравнение (7.4) записать в виде

$$v(x, t) = f(x, t) - \int_l G(x, s)\,F[v(s, t)]\,d\sigma(s) \tag{7.5}$$

Будем искать частное решение этого уравнения методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем

$$v_0(x, t) = f(x, t)$$

Нулевое приближение подставим в правую часть уравнения (7.5) и полученный результат примем за первое приближение:

$$v_1(x, t) = f(x, t) - \int_l G(x, s)\,F[v_0(s, t)]\,d\sigma(s)$$

Первое приближение опять подставим в правую часть (7.5) и т. д. Вообще если получено n-е приближение $v_n(x, t)$, то за $(n+1)$-е приближение примем результат подстановки $v_n(x, t)$ в правую часть уравнения (7.5). Таким образом, последовательные приближения определяются рекуррентным соотношением

$$v_{n+1}(x, t) = f(x, t) - \int_l G(x, s)\,F[v_n(s, t)]\,d\sigma(s) \tag{7.6}$$

Если удастся показать, что $v_n(x, t)$ сходится равномерно к предельной функции $v(x, t)$, когда n неограниченно возрастает, то формула (7.6) в пределе обратится в уравнение (7.5); предельная функция $v(x, t)$ будет решением уравнения (7.5), а функции $v_n(x, t)$ — последовательными приближениями этого решения.

Изучим детальнее структуру последовательных приближений. Очевидно,

$$v_1(x, t) = f(x, t) - \int_l G(x, s)\,F[f(s, t)]\,d\sigma(s)$$

Далее

$$v_2(x, t) = f(x, t) - \int_l G(x, s)\,F[v_1(s, t)]\,d\sigma(s) = f(x, t) -$$

$$- \int_l G(x, s)\,F[f(s, t)]\,d\sigma(s) + \int_l G(x, u)\,F\left[\int_l G(u, s)\,F[f(s, t)]\,d\sigma(s)\right]d\sigma(u)$$

Применяя формулу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, изменив порядок интегрирования и учтя рекуррентные соотношения для итерированных ядер, получим

$$v_2(x, t) = f(x, t) - \int\limits_l G(x, s) F[f(s, t)] \, d\sigma(s) + \int\limits_l G_2(x, s) F_2[f(s, t)] \, d\sigma(s)$$

где оператор

$$F_2[f(s, t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\ddot{f}(s, t)] + \psi \dot{f}(s, t)] + \psi \frac{\partial}{\partial t}[\ddot{f}(s, t) + \psi \dot{f}(s, t)] =$$

$$= \overset{....}{f}(s, t) + 2\psi \dddot{f}(s, t) + \ddot{\psi}^2 f(s, t)$$

Точно так же найдем

$$v_3(x, t) = f(x, t) - \int\limits_l G(x, s) F[f(s, t)] \, d\sigma(s) + \int\limits_l G_2(x, s) F_2[f(s, t)] \, d\sigma(s) -$$

$$- \int\limits_l G_3(x, s) F_3[f(s, t)] \, d\sigma(s)$$

где оператор

$$F_3[f(s, t)] =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\overset{....}{f}(s, t) + 2\psi \dddot{f}(s, t) + \psi^2 \ddot{f}(s, t)] + \psi \frac{\partial}{\partial t}[\overset{....}{f}(s, t) + 2\dddot{\psi} f(s, t) + \psi^2 \ddot{f}(s, t)] =$$

$$= \frac{\partial^6}{\partial t^6} f(s, t) + 3\psi \frac{\partial^5}{\partial t^5} f(s, t) + 3\psi^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f(s, t) + \psi^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} f(\mathrm{s}, t)$$

и вообще

$$v_n(x, t) = f(x, t) + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \int\limits_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)] \, d\sigma(s) \tag{7.7}$$

Входящие сюда функции определяются рекуррентными соотношениями: итерированные ядра

$$G_1(x, s) = G(x, s), \qquad G_m(x, s) = \int\limits_l G_{m-1}(x, u) G(u, s) \, d\sigma(u) \tag{7.8}$$

операторы

$$\begin{gathered} F_1[f(x, t)] = F[f(x, t)] \\ F_m[f(x, t)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{F_{m-1}[f(x, t)]\} + \psi \frac{\partial}{\partial t}\{F_{m-1}[f(x, t)]\} \end{gathered} \tag{7.9}$$

Допустим, что последовательные приближения сходятся. Тогда, переходя в (7.7) к пределу, получаем частное решение уравнения (7.5) в форме

$$v(x, t) = f(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int\limits_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)] \, d\sigma(s) \tag{7.10}$$

Выясним условия сходимости последовательных приближений. Можно записать очевидное неравенство

$$v(x, t) \leqslant f(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int\limits_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)] \, d\sigma(s) \right| \tag{7.11}$$

В силу регулярности вещественного ядра будем иметь

$$\int\limits_l G_m^2(x, s) \, d\sigma(s) \leqslant K_m = \mathrm{const} \tag{7.12}$$

Найдем оценку величины K_m. Применим к рекуррентной зависимости для итерированных ядер (7.8) неравенство Буняковского-Шварца

$$G_m^2(x, s) \leqslant \int_l G^2(x, u)\, d\sigma(u) \int_l G_{m-1}^2(u, s)\, d\sigma(u)$$

Интегрируя это неравенство по $\sigma(x)$, получим

$$\int_l G_m^2(x, s)\, d\sigma(x) \leqslant \int_l \int_l G^2(x, u)\, d\sigma(u)\, d\sigma(x) \int_l G_{m-1}^2(u, s)\, d\sigma(u)$$

В силу симметричности итерированных ядер, полагая $n = 1$ в (5.2) и учтя (3.4), последнее неравенство можно записать так:

$$\int_l G_m^2(x,s)\, d\sigma(s) \leqslant A_2 \int_l G_{m-1}^2(x, s)\, d\sigma(s) \tag{7.13}$$

Заменяя интегралы верхними гранями, последовательно найдем

$$K_m \leqslant A_2 K_{m-1}, \qquad K_{m-1} \leqslant A_2 K_{m-2}, \qquad K_m \leqslant A_2^2 K_{m-2}$$

Продолжая этот процесс, получим искомую оценку:

$$K_m \leqslant A_2^{m-1} K \tag{7.14}$$

где K является верхней гранью интеграла

$$\int_l G^2(x, s)\, d\sigma(s)$$

Применим к общему члену ряда (7.11) неравенство Буняковского-Шварца

$$\left| \int_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)]\, d\sigma(s) \right|^2 \leqslant \int_l G_m^2(x, s)\, d\sigma(s) \int_l F_m^2[f(s, t)]\, d\sigma(s) \leqslant$$
$$\leqslant K A_2^{m-1} \int_l F_m^2[f(s, t)]\, d\sigma(s)$$

Положим, что вещественная функция $f(x, t)$ такова, что для всех x и для $T_1 \leqslant t < T_2$ имеют место неравенства

$$F_m[f(x, t)] \leqslant F^m[f(x, t)], \qquad 1 \leqslant F[f(x, t)] \leqslant C = \text{const}$$

Интегрируя эти неравенства, возведенные в квадрат, в смысле Чебышева-Стилтьеса и обозначая через M массу системы, найдем

$$\int_l F_m^2[f(s, t)]\, d\sigma(s) \leqslant \int_l F^{2m}[f(s, t)]\, d\sigma(s) \leqslant C^{2m} M$$

Тогда для общего члена ряда (7.11) получаем оценку:

$$\left| \int_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)]\, d\sigma(s) \right| \leqslant |\sqrt{KM}|\, C^m\, |\sqrt{A_2}|^{m-1}$$

Если
$$C < \frac{1}{|\sqrt{A_2}|}$$

то ряд (7.11) сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $C\,|\sqrt{A_2}|$. Из неравенства (7.11) вытекает абсолютная, а в силу признака Веерштрасса и равномерная сходимость по x и t ряда (7.10).

Из приведенных рассуждений следует теорема.

Теорема 3. Если вещественная функция $f(x, t)$ имеет производную по времени любого порядка и, кроме того, имеют место неравенства

$$F_m[f(x, t)] \leqslant F^m[f(x, t)], \qquad 1 \leqslant F[f(x, t)] \leqslant C = \text{const}$$

(где m — любое натуральное число) для всех x и $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$, то последовательные приближения сходятся абсолютно и равномерно для тех регулярных вещественных ядер $G(x, s)$, для которых

$$C < \frac{1}{|\sqrt{A_2}|}, \qquad A_2 = \int_l \int_l G^2(x, s)\, d\sigma(x)\, d\sigma(s)$$

Предел последовательных приближений

$$v(x, t) = f(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_l G_m(x, s)\, F_m[f(s, t)]\, d\sigma(s)$$

и есть частное решение нагруженного интегро-дифференциального уравнения

$$v(x, t) + \int_l G(x, s)\, F[v(s, t)]\, d\sigma(s) = f(x, t)$$

в том же промежутке $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ при условии, что $d\sigma(x) \neq 0$ на всем промежутке изменения x.

Суммируя прогрессию с общим членом $C|\sqrt{KM}||C\sqrt{A_2}|^{m-1}$ и учитывая предыдущие рассуждения, получаем для ряда (7.10) оценку:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \int_l G_m(x, s)\, F_m[f(s, t)]\, d\sigma(s) \leqslant \frac{C|\sqrt{KM}|}{1 - C|\sqrt{A_2}|}$$

Отсюда следует оценка сверху для частного решения уравнения (7.5):

$$v(x, t) \leqslant f(x, t) + \frac{C|\sqrt{KM}|}{1 - C|\sqrt{A_2}|}$$

Если в ряде (7.10) ограничиться конечным числом членов, то получим приближенную формулу

$$v(x, t) \approx f(x, t) + \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \int_l G_m(x, s)\, F_m[f(s, t)]\, d\sigma(s)$$

Ошибка этой формулы, как легко видеть, не превзойдет суммы геометрической прогрессии, начиная с $n+1$ члена, т. е. величины

$$|\sqrt{KM}|\, \frac{C^{n+1}|\sqrt{A_2}|^n}{1 - C|\sqrt{A_2}|}$$

Решение (7.10) интересно тем, что если функция $f(x, t)$ такова, что $F_n[f(x, t)] = 0$, то согласно (7.9) будет $F_{n+k}[f(x, t)] = 0$ для любого натурального $k \geqslant 0$ и в силу (7.7) последовательные приближения, начиная с n — 1-го, совпадают, т. е. $v_{n-1}(x, t) = v_{n+k}(x, t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Очевидно, в этом случае частное решение уравнения (7.5) приобретает замкнутую форму $v(x, t) = v_{n-1}(x, t)$.

Это соображение позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Если правая часть нагруженного интегро-дифференциального уравнения с регулярным ядром

$$v(x, t) + \int_l G(x, s) F[v(s, t)] d\sigma(s) = f(x, t)$$

имеет $2n$ производных по t и удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению $F_n[f(x, t)] = 0$, то частное решение интегро-дифференциального уравнения можно представить в замкнутой форме:

$$v(x, t) = f(x, t) + \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \int_l G_m(x, s) F_m[f(s, t)] d\sigma(s)$$

при условии, что $d\sigma(x) \neq 0$ на всем промежутке изменения x.

В частности, решение в замкнутой форме будет иметь место, если функция $f(x, t)$ представляет собой алгебраический полином по времени.

Таким образом, наряду с теоремой 3 теорема 4 дает условия разрешимости нагруженного интегро-дифференциального уравнения установившегося режима вынужденных колебаний стержневых систем.

8. Рассмотрим случай, который часто встречается в приложениях, — установившийся режим вынужденных незатухающих колебаний системы под влиянием пульсирующих усилий.

Уравнение динамических перемещений в этом случае будет иметь вид:

$$v(x, t) + \int_l G(x, s) \ddot{v}(s, t) d\sigma(s) = f(x) \sin(\omega t + \delta) \tag{8.1}$$

где ω, δ — частота и начальная фаза возмущающей нагрузки,

$$f(x) = \int_l G(x, s) dR(s)$$

Легко видеть, что предельная формула (7.10) для этого случая будет

$$v(x, t) = \left[f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \omega^{2m} \int_l G_m(x, s) f(s) d\sigma(s)\right] \sin(\omega t + \delta) \tag{8.2}$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$v(x, t) = \mu(x) \sin(\omega t + \delta) \tag{8.3}$$

Подставляя (8.3) в (8.1), получим нагруженное интегральное уравнение

$$\mu(x) - \omega^2 \int_l G(x, s) \mu(s) d\sigma(s) = f(x) \tag{8.4}$$

решение которого

$$\mu(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \omega^{2m} \int_l G_m(x, s) f(s) d\sigma(s) \tag{8.5}$$

а значит и частное решение (8.2) уравнения (8.1) в силу первой теоремы Фредгольма [5] будет сходиться абсолютно и равномерно для всех ω^2, не равных характеристическим числам ядра $G(x, s)$, при условии, что $d\sigma(x) \neq 0$ во всем промежутке изменения x.

Если $\omega^2 = \lambda_k$, то на основании третьей теоремы Фредгольма решение (8.2) не существует (резонанс) за исключением того случая, когда

$$\int_l f(s)\,\varphi_k(s)\,d\sigma(s) = 0 \tag{8.6}$$

и имеет место квазирезонанс.

Из (8.2) вытекает приближенное равенство

$$v(x,\ t) \approx \Big[f(x) + \sum_{m=1}^{n} \omega^{2m} \int_l G_m(x,\ s)\,f(s)\,d\sigma(s)\Big] \sin(\omega t + \delta) \tag{8.7}$$

Выясним условия возможности оценки погрешности формулы (8.7).

Введем в рассмотрение величину

$$D = \int_l f^2(s)\,d\sigma(s) = \int_l \Big[\int_l G(s,\ u)\,dR(u)\Big]^2 d\sigma(s)$$

В силу регулярности ядра эта величина будет ограничена.

Применяя к общему члену ряда (8.2) неравенство Буняковского-Шварца и учтя неравенства (7.12)—(7.14), получим

$$\Big|\int_l G_m(x,\ s)\,f(s)\,d\sigma(s)\Big|^2 \leqslant \int_l G^2{}_m(x, s)\,d\sigma(s) \int_l f^2(s)\,d\sigma(s) \leqslant KDA_2^{m-1}$$

Отсюда следует, что общий член ряда (8.2) меньше, чем величина

$$|\sqrt{KD}|\,\omega^{2m}\,|\sqrt{A_2}|^{m-1}$$

так что ряд (8.2) сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $\omega^2|\sqrt{A_2}|$, если только имеет место неравенство

$$\omega^2 < \frac{1}{|\sqrt{A_2}|}$$

и погрешность формулы (8.7), как легко видеть, не превзойдет величины

$$|\sqrt{KD}|\ \frac{\omega^{2n+2}\,|\sqrt{A_2}|^n}{1 - \omega^2\,|\sqrt{A_2}|}\ \sin(\omega t + \delta)$$

Ввиду симметричности ядра $G(x,\ s)$ решение нагруженного интегрального уравнения (8.4) можно представить еще так [4]:

$$\mu(x) = f(x) + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m - \omega^2}\,\varphi_m(x)$$

где

$$f_m = \int_l f(s)\,\varphi_m(s)\,d\sigma(s) = \int_l\int_l G(s,\ u)\,\varphi_m(s)\,dR(u)\,d\sigma(s)$$

Следовательно, на основании (8.3) будем иметь

$$v(x,\ t) = \Big[f(x) + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m - \omega^2}\,\varphi_m(x)\Big] \sin(\omega t + \delta) \tag{8.8}$$

Этот ряд будет сходиться абсолютно и равномерно для всех $\omega^2 \neq \lambda_m$ при условии, что $d\sigma(x) \neq 0$ во всем промежутке изменения x. Если $\omega^2 = \lambda_m$, то, как легко видеть, решение (8.8) не существует (резонанс) за исключением того случая, когда выполняется условие (8.6) и имеет место квазирезонанс.

Используя теорему Мерсера, можно записать

$$f(x)=\int_l G(x,\ s)\,dR(s)=\int_l \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\varphi_m(s)}{\lambda_m}\,dR(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{\lambda_m}\varphi_m(x)$$

где

$$b_m=\int_l \varphi_m(s)\,dR(s)$$

Следовательно,

$$\mu(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{b_m}{\lambda_m}+\omega^2\frac{f_m}{\lambda_m-\omega^2}\right)\varphi_m(x)$$

Меняя порядок интегрирования в выражении для f_m, в силу симметричности ядра и формулы (1.4) получим

$$\lambda_m f_m=b_m \qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Подставляя это выражение в предыдущую формулу для $\mu(x)$, имеем

$$\mu(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{\lambda_m-\omega^2}\varphi_m(x)$$

После чего решение (8.8) можно записать в более простой форме:

$$v(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m}{\lambda_m-\omega^2}\varphi_m(x)\sin(\omega t+\delta) \tag{8.9}$$

Это же выражение получено ранее [1] иным путем.

Заметим, что ряд (8.9) будет сходиться абсолютно и равномерно во всех точках регулярного ядра за исключением линий разрыва при условии, что $d\sigma(x)\neq 0$ во всем промежутке изменения x.

Если $\lambda_m=\omega^2$, то решение (8.9) не существует (резонанс) за исключением случая, когда

$$\int_l \varphi_m(s)\,dR(s)=0$$

и имеет место квазирезонанс.

Если в правой части (8.1) будет стоять косинус, то во всех выкладках следует синус заменить на косинус.

Проиллюстрируем полученные результаты на примере.

9. Рассмотрим установившиеся незатухающие вынужденные колебания балки на двух опорах (см. раздел 6), загруженной пульсирующей силой $P\cos\omega t$ в сечении s. Для этого случая уравнение колебаний (8.1) имеет вид:

$$v(x,\ s,\ t)+\int_0^l G(x,\ u)\,\ddot{v}(u,\ s,\ t)\,d(mu)=PG(x,\ s)\cos\omega t \tag{9.1}$$

Ограничиваясь в (8.2) первым членом ряда, получим в первом приближении:

$$v(x,\ s,\ t)\approx P\left[G(x,\ s)+\omega^2\int_0^l G(x,\ u)\,G(u,\ s)\,d(mu)\right]\cos\omega t$$

Таблица 2

x		$\frac{1}{2}l$	$\left(\frac{3}{5};\frac{5}{8}\right)l$	$\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)l$	$\left(\frac{1}{8};\frac{7}{8}\right)l$	Множитель
Точное значение	(1)	34.0	32.5	25.1	13.3	$\frac{Pl^3}{10^3 EI}\cos\omega t$
Первое приближение по (9.2)	(2)	26,2	24.5	17.1	8.3	$\frac{Pl}{10^3 EI}\cos\omega t$
$\frac{(1)-(2)}{(1)}100\%$	(3)	23.0	25.0	31.9	37.6	1
Первое приближение по (9.3)	(4)	33.3	31.1	25.0	14.5	$\frac{Pl}{10^3 EI}\cos\omega t$
$\frac{(1)-(4)}{(1)}100\%$	(5)	2.05	4.3	0.4	9.0	1
Первое приближение по (9.4)	(6)	32.5	30.2	22.9	12.5	$\frac{Pl}{10^3 PI}\cos\omega t$
$\frac{(1)-(6)}{(1)}100\%$	(7)	4.3	7.1	8.8	3.8	1

Учтя рекуррентные соотношения (7.8) для итерированных ядер, можно записать

$$v(x,\ s,\ t)\approx P\left[G(x,\ s)+\omega^2 G_2(x,\ s)\right]\cos\omega t$$

Выражения для $G(x,\ s)$ и $G_2(x,\ s)$ приведены в разделе 6. Рассмотрим случай, когда пульсирующая сила расположена в середине пролета ($s={}^1/_2 l$), а частота ее равна:

$$\omega=\frac{6}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Тогда функция динамических перемещений в первом приближении будет

$$v(x,\ t)\approx\frac{P}{EI}\left(\frac{1}{35}\frac{x^8}{l^5}-\frac{1}{10}\frac{x^7}{l^4}+\frac{1}{12}\frac{x^6}{l^3}+\frac{3}{40}\frac{x^5}{l^2}-\frac{1}{8}\frac{x^4}{l}+\frac{23}{240}x^3-\right.$$
$$\left.-\frac{19}{80}lx^2+\frac{111}{560}l^2x-\frac{31}{1480}l^3\right)\cos\omega t\qquad({}^1/_2 l\leqslant x\leqslant l)\tag{9.2}$$

Ограничиваясь в (8.9) одним членом ряда и пользуясь оценкой (3.2) первой фундаментальной функции, в первом приближении будем иметь

$$v(x,\ t)\approx\frac{1}{\lambda_{1-}-\omega^2}\left|\sqrt{\lambda_{1+}G\left(\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}l\right)}\right|\ \left|\sqrt{\lambda_{1+}G(x,\ x)}\right|P\cos\omega t$$

Подставляя значения (см. пример в разделе 6) входящих сюда величин, получим другое выражение для первого приближения:

$$v(x,\ t)\approx\frac{0.13Pl}{EI}\left|\sqrt{l^2x^2-2lx^3+x^4}\right|\cos\omega t\qquad({}^1/_2 l\leqslant x\leqslant l)\tag{9.3}$$

Аналогично

$$v(x,\ t)\approx\frac{\lambda_{1+}{}^2}{\lambda_{1-}-\omega^2}\left|\sqrt{G_2\left(\frac{1}{2}l,\ \frac{1}{2}l\right)}\right|\ \left|\sqrt{G_2(x,\ x)}\right|P\cos\omega t\tag{9.4}$$

или

$$v(x,\ t)\approx\frac{0.00733\,x}{lEI}\left|\sqrt{3x^6-12lx^5+14l^2x^4-7l^4x^2+2l^6}\right|P\cos\omega t$$
$$({}^1/_2 l\leqslant x\leqslant l)$$

Для этой задачи Е. С. Сорокин [10] получил замкнутое решение. При принятом значении ω оно имеет вид:

$$v(x,\ t) = -\frac{Pl^3}{58.8\,EI}\left(\frac{\operatorname{sh}(2.45x\,/\,l)}{\operatorname{ch} 1.225} - \frac{\sin(2.45x\,/\,l)}{\cos 1.225}\right)\cos\omega t \qquad (0 \leqslant x \leqslant {}^1\!/_2 l)$$

Дальнейшие вычисления приведены в табл 2.

Из рассмотрения табл. 2 видно, что первое приближение по (9.3) дает вполне приемлемую точность на большей части пролета за исключением областей, примыкающих к опорным точкам. В этих областях приемлемую точность дает первое приближение по (9.4).

Таблица 3

x		$\frac{1}{2}l$	$\left(\frac{3}{8};\frac{5}{8}\right)l$	$\left(\frac{1}{4};\frac{3}{3}\right)l$	$\left(\frac{1}{8};\frac{7}{8}\right)l$	Множитель
Точное значение $v(x,t)$	(1)	20.4	19.3	14.5	7.5	$\frac{Pl^3}{10^3 EI}\cos\omega'$
Первое приближение для $v(x,t)$	(2)	20.6	18.8	14.3	7.8	
$\frac{(1)-(2)}{(1)}100\%$	(3)	1.0	2.6	1.4	4.0	1

Сравнительно низкая точность первого приближения (9.2) объясняется медленной сходимостью ряда (8.2) в рассматриваемом случае, так как частота возмущающей силы близка к частоте основного тона свободных колебаний балки. Положим

$$\omega = \frac{0.6}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

то для первого приближения функции динамических перемещений по (8.2), пренебрегая малыми величинами, получим

$$v(x,\ t) \approx \frac{P}{10^3\,EI}\left(\frac{2003}{24}x^3 - \frac{1999}{8}lx^2 + \frac{5253}{28}l^2x - \frac{437}{21}l^3\right)\cos\omega t$$

Точное значение по Е. С. Сорокину [10] будет $(0 \leqslant x \leqslant {}^1\!/_2 l)$

$$v(x,\ t) = -\frac{Pl^3}{1.86\,EI}\left(\frac{\operatorname{sh} 0.773x\,/\,l}{\operatorname{ch} 0.386} - \frac{\sin 0.773x\,/\,l}{\cos 0.386}\right)\cos\omega t$$

Вычисления по этим формулам сводим в табл. 3.

Поступила 12 XII 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. Дополнение. ОГИЗ. 1941.
2. Болотин В. В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты. Труды МИИТ. 1950. Вып. 74.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ОГИЗ. 1941. Т. IV. Стр. 279.
4. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. ГИТТЛ. 1947.
5. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ. 1935.
6. Бернштейн С. А. Новый метод определения частот колебаний упругпх систем. Издание ВИА РККА. 1939.
7. Папкович П. Ф. Об одном методе разыскания корней характеристического определителя. ПММ. 1933. Т. I. Вып. 2.
8. Смирнов А. Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. Трансжелдориздат. 1947.
9. Van-den-Dungen. ZAMM. 1928. № 8. P. 225.
10. Сорокин Е. С. Замкнутое решение задачи о вынужденных колебаниях стержней с гистерезисом. Сборник. «Исследования по теории сооружений». Стройиздат. 1949.