Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XV, 1951

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

Явление потери устойчивости плоской формы изгиба идеально упругих полос было изучено в работах Прандтля, Майчела, Тимошенко и других авторов. В современных конструкциях нередко допускают при изгибе пластические деформации; строительные конструкции рассчитываются по предельным нагрузкам, т. е. по условиям работы в пластической стадии.

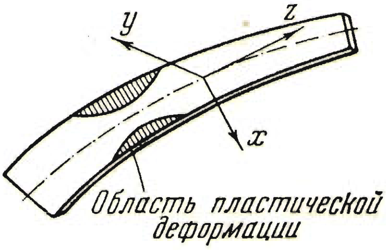
В связи с этим большое практическое значение приобретает вопрос об устойчивости плоской формы изгиба при упруго-пластических деформациях.

Этот вопрос подробно обсуждается в книге С. П. Тимошенко [1], который рекомендует пользоваться модулем Кармана вместо модуля упругости. Этот прием, как устанавливается ниже, является неудовлетворительным. Заметим, что несостоятельность подобного приема в задачах устойчивости пластин и оболочек за пределом упругости показана А. А. Ильюшиным [2].

В настоящей работе рассматривается вопрос об устойчивости плоской формы изгиба за пределом упругости, исходя из теории малых упруго-пластических деформаций.

1. Постановка задачи. Рассмотрим криволинейную полосу, ось которой до потери устойчивости является плоской кривой. Полоса изгибается в

	x	y	z
x_0	1	$-\gamma$	β
y_0	γ	1	$-\alpha$
z_0	$-\beta$	α	1



Фиг. 1

своей плоскости силами и моментами, причем возникают области пластической деформации (фиг. 1).

Пусть x, y, z — триэдр подвижных осей. Одну из главных осей инерции поперечного сечения мы считаем лежащей в плоскости полосы; тогда оси x, z лежат в этой же плоскости.

Триэдр осей, отнесенный к недеформированной полосе, отличаем нулевым индексом (x_0, y_0, z_0).

Косинусы углов между осями обоих триэдров определяются таблицей, представленной здесь выше.

В дальнейшем будем пользоваться уравнениями Кирхгофа-Клебша, что представляет известные удобства.

Уравнения Кирхгофа при указанном выборе осей координат записываются в форме

$$
\begin{aligned}
&\frac{dV_x}{ds} + qV_z - rV_y + F_x = 0, \qquad && \frac{dL_x}{ds} + qL_z - rL_y - V_y = 0 \\
&\frac{dV_y}{ds} + rV_x - pV_z + F_y = 0, \qquad && \frac{dL_y}{ds} + rL_x - pL_z + V_x = 0 \\
&\frac{dV_z}{ds} + pV_y - qV_x + F_z = 0, \qquad && \frac{dL_z}{ds} + pL_y - qL_x = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где (V_x, V_y, V_z), (L_x, L_y, L_z) — соответственно векторы усилия и момента, (F_x, F_y, F_z) — вектор внешней нагрузки на единицу длины оси полосы, p, q, r — кривизны и кручение оси. Величины V_y, L_x, L_z, F_y, p, r считаем малыми, рассматривая их как «возмущения».

Уравнения Клебша имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \quad q_0 w + \frac{du}{ds}, \qquad & p &= \quad \gamma q_0 + \frac{d\alpha}{ds} \\
-\alpha &= \quad \frac{dv}{ds}, \qquad & q - q_0 &= \quad \frac{d\beta}{ds} \\
0 &= -q_0 u + \frac{dw}{ds}, \qquad & r &= -\alpha q_0 + \frac{d\gamma}{ds}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где $p_0 = 0$, q_0, $r_0 = 0$ — начальные кривизны и кручение, (u, v, w) — проекции вектора смещения на оси x_0, y_0, z_0. Уравнения Кирхгофа-Клебша связывают 15 неизвестных величин. Для упругих стержней-полос дополнительными уравнениями служат соотношения Кирхгофа

$$
L_x = A_0 p, \qquad L_y = B_0 (q - q_0), \qquad L_z = C_0 r \tag{1.3}
$$

где A_0, B_0 — жесткости при изгибе, а C_0 — жесткость при кручении.

В нашу задачу входит установление аналогичных соотношений в случае упруго-пластической деформации. При этом, имея в виду решение задач устойчивости, мы ограничимся рассмотрением бесконечно малых возмущений изгиба и кручения, накладывающихся на основное состояние упруго-пластического изгиба полосы в своей плоскости.

Рассмотрим случай прямой полосы ($p_0 = q_0 = r_0 = 0$). Примем, что до потери плоской формы изгиба $V_{z0} = 0$; тогда V_z — малая величина. Пусть после выпучивания внешние силы сохраняют прежние величину и направление. Тогда F_x отличается от F_{x0} на величины второго порядка малости (см. таблицу косинусов).

Из первого уравнения левой группы (1.1) вытекает, что V_x может отличаться от V_{x0} лишь на величины второго порядка малости. Но тогда из второго уравнения правой группы (1.1) следует, что L_y отличается от L_{y0} также лишь величинами второго порядка малости. Заметим, что так как L_y — конечная величина, то L_x и L_z имеют первый порядок малости.

2. Исходные положения. До потери плоской формы равновесия в полосе имеются лишь напряжения изгиба σ_z. Сечение полосы примем в виде вытянутого прямоугольника (фиг. 2), так что

$$\frac{h}{b} \equiv \Lambda \gg 1 \qquad (2.1)$$

Будем считать, что материал полосы следует теории малых упруго-пластических деформаций, причем за пределом упругости выполняется условие пластичности Мизеса (фиг. 3)

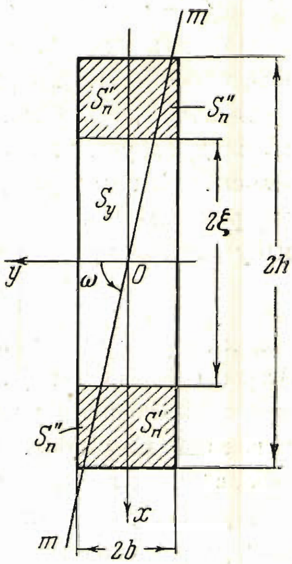
$$T^2 = \mathrm{const} = \tau_s^2 \qquad (2.2)$$

где T — интенсивность касательных напряжений, а τ_s — предел текучести при сдвиге

$$\tau_s \sqrt{3} = \sigma_s$$

Тогда при $|x| < \xi$ мы имеем упругое ядро, а при $|x| > \xi$ — пластические зоны, причем

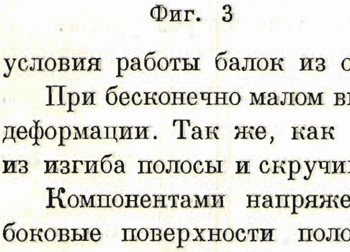
$$\frac{\xi}{h} \equiv \zeta = \sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{|L_y|}{M_s}} \qquad (0 \leqslant \zeta \leqslant 1) \qquad (2.3)$$



Фиг. 2

где L_y — изгибающий момент, а $M_s = \sigma_s b h^2$ — предельный изгибающий момент. По гипотезе плоских сечений $\varepsilon_z = \pm \rho x$, где ρ — кривизна. В упругом ядре $\sigma_z = E\varepsilon_z$; так как $\sigma_z = \sigma_s$ при $x = \xi$, то

$$\rho = \frac{\sigma_s}{E}\frac{1}{\xi}$$



Фиг. 3

Нетрудно видеть, что сравнительно небольшим деформациям ($\varepsilon_{z,\,\max} \sim 1 \div 2\%$) отвечают изгибающие моменты, близкие к предельному M_s. Поэтому принятая схема идеальной пластичности хорошо охватывает условия работы балок из обычных сталей с четкой площадкой текучести.

При бесконечно малом выпучивании полоса испытывает дополнительные деформации. Так же, как и в упругом случае, эти деформации состоят из изгиба полосы и скручивания ее.

Компонентами напряжения σ_y, τ_{yz}, τ_{xy} можно пренебречь, так как боковые поверхности полосы свободны от напряжений, а толщина полосы мала; напряжением σ_x также пренебрегаем, поскольку давление волокон друг на друга отсутствует при изгибе и при кручении.

При пластическом деформировании компоненты напряжения и деформации связаны уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций (см., например, [3])

$$\sigma_x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{2\tau_s}{\Gamma}\right)\varepsilon + \frac{2\tau_s}{\Gamma}\varepsilon_x, \qquad \tau_{xy} = \frac{\tau_s}{\Gamma}\gamma_{xy} \quad \text{и т. д.} \qquad (2.4)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $k = (1-2\nu)/E$ (ν — число Пуассона), а интенсивность

$$\Gamma = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\tfrac{3}{2}(\gamma_{xy}{}^2+\gamma_{yz}{}^2+\gamma_{zx}{}^2)}$$

Напряжения, представляемые формулами (2.4), удовлетворяют условию пластичности (2.2). При упругом деформировании выполняется закон Гука.

В силу приведенных соотношений и пренебрежения напряжениями τ_{xy}, τ_{yz} следует учитывать лишь сдвиг γ_{xz}, характеризующий скручивание полосы. Как при упругом, так и при пластическом изгибе и кручении деформации носят одинаковый характер, поэтому мы принимаем, что при выпучивании приращения деформаций равны:

$$\delta\varepsilon_z = \varkappa_2 x + \varkappa_1 y, \qquad \delta\gamma_{xz} = -2\varkappa_3 y \tag{2.5}$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — изменения кривизн, а $\varkappa_3$ — кручение на единицу длины. Второе соотношение (2.5) заимствовано из задачи о пластическом скручивании узкого прямоугольника. Принятые положения в общем аналогичны гипотезам Кирхгофа, которые обычно лежат в основе теории упругого и пластического изгиба пластин и оболочек (см. [2]).

При выпучивании часть сечения будет испытывать нагрузку, часть — разгрузку соответственно знаку $\delta\Gamma$ или, что то же, соответственно знаку работы деформации $T\delta\Gamma$. Нетрудно видеть, что в нашем случае

$$T\delta\Gamma = \sigma_z\delta\varepsilon_z + \text{величина второго порядка малости}$$

Следовательно, нагрузка и разгрузка различаются по знаку $\delta\varepsilon_z$; граница определяется уравнением $\delta\varepsilon_z = 0$, т. е.

$$\varkappa_2 x + \varkappa_1 y = 0 \tag{2.6}$$

Эту прямую (Om на фиг. 2) условимся называть линией раздела. Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \tag{2.7}$$

При $-\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$, где $\operatorname{tg}\omega_1 = \xi/b$, линия раздела лежит в сечении $S_у$ упругого ядра и тогда области пластической деформации полностью находятся либо в состоянии нагрузки, либо в состоянии разгрузки.

При $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \pi - \omega_1$ линия раздела пересекает зоны пластической деформации (фиг. 2); при этом в $S_п'$ происходит нагрузка (разгрузка), а в $S_п''$ — разгрузка (нагрузка). Подсчитаем изменения моментов L_x, $L_y - L_{y0}$, L_z, обусловленные бесконечно малым выпучиванием полосы; прежде всего найдем вариации напряжений $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{xz}$.

В упругой области S_y и зонах разгрузки справедлив закон Гука (E — модуль Юнга, G — модуль сдвига)

$$\delta\sigma_z = E\delta\varepsilon_z, \qquad \delta\tau_{xz} = G\delta\gamma_{xz} \tag{2.8}$$

В зонах нагружения ($S_п'$ или $S_п''$) должно выполняться условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_z + \delta\sigma_z)^2 + 3(\delta\tau_{xz})^2 = \sigma_в{}^2$$

Отбрасывая малые второго порядка, получаем

$$\delta\sigma_z = 0 \tag{2.9}$$

В силу соотношений (2.4)

$$\delta\tau_{xz} = \frac{\tau_s}{\Gamma}\,\delta\gamma_{xz}$$

Найдем Г. В состоянии плоского изгиба $\varepsilon_y = \varepsilon_x$, $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, $\sigma_z = \sigma_s$; следовательно,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2\nu}{E}\,\sigma_z - \varepsilon_z\right), \qquad \Gamma = \sqrt{3}\left(|\,\varepsilon_z\,| - \frac{1-2\nu}{3E}\,\sigma_s\right) \quad (2.10)$$

Так как $\varepsilon_z = \pm\,\rho x$, то при $\nu = \frac{1}{3}$

$$\delta\tau_{xz} = -\,6E\varkappa_3\,\frac{y}{9\,|\,x\,|\,/\,\xi - 1} \quad (2.11)$$

Перейдем к вычислению приращений моментов (нетрудно видеть, что приращения усилий V_x, V_y, V_z равны нулю вследствие нечетности $\delta\tau_{xz}$, $\delta\sigma_z$ и расположения областей $S_п'$, $S_п''$). Очевидно, что

$$L_x = \iint \delta\sigma_z\,y\,dx\,dy, \qquad L_y - L_{y0} = \iint \delta\sigma_z\,x\,dx\,dy \quad (2.12)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь поперечного сечения. Скручивающий момент

$$L_z = -\,2\iint \delta\tau_{xz}\,y\,dx\,dy \quad (2.13)$$

Заметим здесь следующее. Вообще говоря, скручивающий момент

$$M_{кр} = \iint (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,dx\,dy$$

причем в задаче кручения

$$M_{кр} = 2\iint x\tau_{yz}\,dx\,dy = -\,2\iint y\tau_{xz}\,dx\,dy$$

Пренебрегая в приближенном решении касательными напряжениями τ_{yz}, нельзя пренебречь моментом, ими вызываемым. Так как в задаче кручения (как упругого, так и пластического)

$$M = -\,2\iint y\tau_{xz}\,dx\,dy$$

то вполне возможно применить это соотношение и в нашей задаче, где имеется состояние осложненного кручения.

Соотношения (2.12) и (2.13) связывают вариации моментов L_x, $L_y - L_{y0}$, L_z с вариациями напряжений. Ранее было установлено, что с точностью до малых второго порядка $L_y = L_{y0}$; следовательно, мы имеем уравнение

$$\iint \delta\sigma_z\,x\,dx\,dy = 0 \quad (2.14)$$

связывающее параметры $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

Нетрудно видеть, что при $-\,\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$ $L_y - L_{y0} = \frac{4}{3}\,Eb\xi^3\varkappa_2$ при нагрузке, $L_y - L_{y0} = \frac{4}{3}\,Ebh^3\varkappa_2$ при разгрузке. Но тогда $\varkappa_2 = 0$; следовательно, $\operatorname{tg}\omega = \pm\,\infty$ и мы впадаем в противоречие. Таким образом, линия раздела всегда пересекает область пластической деформации.

3. Положение линии раздела. Предполагая для определенности, что нагрузка происходит в $S_п'$, а разгрузка в $S_п''$, находим развернутую форму уравнения (2.14):

$$\left(\frac{2}{3}\, b\xi^3 + I_{xx}\right) \varkappa_2 + \varkappa_1 I_{xy} = 0 \tag{3.1}$$

где I_{xx} — момент инерции одной из площадей $S_п''$ (например, при $x > 0$) относительно оси y, а I_{xy} — центробежный момент инерции той же площади. Нетрудно найти значения моментов инерции:

$$I_{xx} = \begin{cases} \frac{1}{12}\, b^4 \Lambda^3 (3\zeta\Psi - 4 + \zeta^{-3}\Psi^{-3})\, \zeta^3 & (\ \ 1 \leqslant \Psi \leqslant \zeta^{-1}) \\ \frac{1}{12}\, b^4 \Lambda^3 [4(1+\zeta+\zeta^2) - 3\Psi(1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3)](1-\zeta) & (-1 \leqslant \Psi \leqslant 1\ ) \end{cases}$$

$$I_{yy} = \begin{cases} \frac{1}{12}\, b^4 \Lambda (3\zeta^{-1}\Psi^{-1} - 4 + \zeta^3\Psi^3)\, \zeta & (\ \ 1 \leqslant \Psi \leqslant \zeta^{-1}) \\ \frac{1}{12}\, b^4 \Lambda [4(1-\zeta) - \Psi^3(1-\zeta^4)] & (-1 \leqslant \Psi \leqslant 1\ ) \end{cases}$$

$$I_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{8}\, b^4 \Lambda^2 (\Psi^2\zeta^2 - 2 + \zeta^{-2}\Psi^{-2})\, \zeta^2 & (\ \ 1 \leqslant \Psi \leqslant \zeta^{-1}) \\ \frac{1}{8}\, b^4 \Lambda^2 [2 - \Psi^2(1+\zeta^2)](1-\zeta^2) & (-1 \leqslant \Psi \leqslant 1\ ) \end{cases}$$

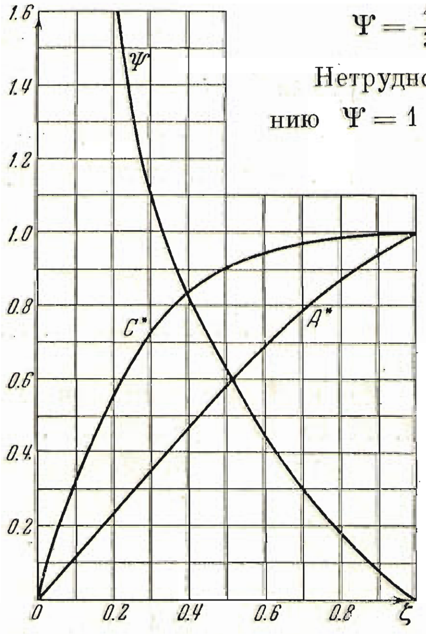
Здесь введено обозначение $\Psi = \Lambda \operatorname{ctg} \omega$. Внося I_{xx}, I_{xy} в (3.1), получаем

$$3\zeta^4\Psi^4 + 8\zeta^3\Psi^3 + 6\zeta^2\Psi^2 - 1 = 0 \qquad (1 \leqslant \Psi \leqslant \xi^{-1}) \tag{3.2}$$

$$-3\Psi^2(1-\zeta^4) + 8(1+\zeta^3)\Psi - 6(1-\zeta^2) = 0 \qquad (-1 \leqslant \Psi \leqslant 1) \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.3) можно представить в следующем виде:

$$\Psi = \frac{4}{3}\,\frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^4} - \sqrt{\left(\frac{4}{3}\,\frac{1+\zeta^3}{1-\zeta^4}\right)^2 - \frac{2}{1+\zeta^2}} \tag{3.4}$$



Фиг. 4

Нетрудно видеть, что $\Psi \geqslant 0$; при этом значению $\Psi = 1$ отвечает $\zeta = \frac{1}{3}$. Формула (3.4) дает значения $0 \leqslant \Psi \leqslant 1$, соответствующие $1 \geqslant \zeta \geqslant \frac{1}{3}$. Так как $\zeta\Psi = \frac{1}{3}$ является корнем и уравнения (3.2), то

$$\Psi = \frac{1}{3\zeta} \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{1}{3} \tag{3.5}$$

Заметим, что Ψ и $d\Psi / d\zeta$ непрерывны при $\zeta = \frac{1}{3}$. В табл. 1 даны значения, а на фиг. 4 график функции Ψ в зависимости от параметра ζ.

Таким образом, Ψ — однозначная функция ζ, причем $\Psi \geqslant 0$. Область нагрузки всегда больше области разгрузки (при упруго-пластическом изгибе). При упругом изгибе линия раздела совпадает с осью x, при упруго-пластическом она наклонена, причем с уменьшением ζ линия раздела все более приближается к горизонтальной оси.

Таблица 1

ζ	0.05	0.10	0.15	0,20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
Ψ	6.67	3.33	2.22	1.67	1.33	1.11	0.947	0.826	0.714	0.622
A^*	0.0593	0.118	0.178	0.237	0.296	0.356	0.417	0.474	0.533	0.590
C^*	0.203	0.334	0.462	0.563	0.653	0.733	0.800	0.843	0.880	0.906
ζ	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
Ψ	0.532	0.454	0.37	0.31	0.24	0.18	0.13	0.08	0.04	0.00
A^*	0.644	0.696	0.747	0.792	0.836	0.875	0.911	0.944	0.973	1.00
C^*	0.932	0.948	0.962	0.972	0.978	0.985	0.990	0.995	0.998	1.00

4. Основные соотношения. Рассмотрим первое из соотношений (2.12); в развернутой форме оно таково:

$$L_x = 2E\left[\frac{2}{3}\xi b^3 + I_{yy} - I_{xy}\operatorname{ctg}\omega\right]\varkappa_1$$

Это соотношение в силу связи между Ψ и ζ можно представить в виде

$$L_x = A(\zeta)\varkappa_1 \tag{4.1}$$

где

$$A(\zeta) = A_0A^*(\zeta); \qquad A_0 = \frac{4}{3}Eb^4\Lambda, \qquad A^*(1) = 1$$

Используя (3.3), (3.5), находим

$$A^*(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{32}{27}\zeta & \text{при } \zeta \leqslant \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2}\left[(1+\zeta) - (1-\zeta^2)\Psi + \dfrac{1}{3}(1+\zeta^3)\Psi^2\right] & \text{при } \zeta \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{4.2}$$

где в интервале $\frac{1}{3} \leqslant \zeta \leqslant 1$ следует брать Ψ по (3.4). Заметим, что $A^*(\zeta)$ и $dA^*/d\zeta$ непрерывны при $\zeta = \frac{1}{3}$; на границе упругого и упруго-пластического отрезков полосы (т. е. при $\zeta = 1$) производная $dA^*/d\zeta$ терпит разрыв:

$$\left[\frac{dA^*}{d\zeta}\right]_{\zeta=1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{в упруго-пластическом отрезке} \\ 0 & \text{в упругом отрезке} \end{cases}$$

В табл. 1 приведены значения функции $A^*(\zeta)$, а на фиг. 4 показан график $A^*(\zeta)$.

Рассмотрим теперь соотношение (2.13). В упругом ядре $S_у$ и зоне разгрузки $S_п''$ имеем $\delta\tau_{xz} = \frac{3}{4}Ey\varkappa_3$ (принято $\nu = \frac{1}{3}$), в области нагрузки $S_п$ справедливо (2.11). Проведя несложные, но несколько громоздкие вычисления, получаем

$$L_z = C(\zeta)\varkappa_3 \tag{4.3}$$

где

$$C(\zeta) = C_0C^*(\zeta) \qquad C_0 = 2Eb^4\Lambda, \qquad C^*(1) = 1$$

Функция $C^*(\zeta)$ имеет вид:

$$C^*(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{4}{27}\left[11 - \dfrac{1}{9}\Phi\left(\dfrac{13}{4}\right)\right]\zeta + \dfrac{8}{9}\zeta\ln\zeta & \text{при } \zeta \leqslant \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2}(1+\zeta) - \dfrac{1}{8}(1-\zeta^4)\Psi^3 + \\ \quad + \dfrac{4}{9}\left[(1+\Psi^3)\ln\overline{\zeta} - \zeta^3\Psi^3\Phi(\overline{\zeta})\right]\zeta & \text{при } \zeta \geqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} \tag{4.4}$$

где

$$\bar{\zeta} = \frac{9-\zeta}{8\zeta}, \quad \Phi(u) = \frac{512}{243}\left[\frac{109}{576} - \left(\frac{u^3}{9} + \frac{u^2}{16} + \frac{u}{64}\right) + \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{8} + \frac{u}{64}\right)\ln u\right]$$

Легко видеть, что $\Phi(1) = 0$, а $C^*(0) = 0$. Заметим далее, что $C^*(\zeta)$ и $dC^* / d\zeta$ непрерывны при $\zeta = \frac{1}{3}$ и $\zeta = 1$ (т. е. на границе упругого и упруго-пластического отрезков полосы). Значения функции $C^*(\zeta)$ даны в табл. 1, график показан на фиг. 4.

Итак, для рассматриваемых задач устойчивости плоской формы изгиба полосы вместо первого и третьего уравнений Кирхгофа (1.3) имеем соотношения

$$L_x = A(\zeta)\,p; \qquad L_z = C(\zeta)\,r \tag{4.5}$$

где от обозначений $\varkappa_1$, $\varkappa_3$ мы вернулись к прежним обозначениям p, r. Соотношения (4.5), как и в теории Кирхгофа, строго говоря, справедливы для состояний чистого изгиба и кручения. Однако, следуя общей схеме построения теории тонких стержней, хорошо подтверждаемой опытами, можно распространить соотношения (4.5) и на более сложные случаи, рассматривая (4,5) как дифференциальные соотношения. При этом коэффициенты $A(\zeta)$, $C(\zeta)$ будут известными функциями s; используя уравнения Кирхгофа-Клебша, мы придем к обыкновенным однородным линейным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами и однородными краевыми условиями. Критическая нагрузка будет соответствовать одному из собственных значений задачи.

Так как $A(\zeta)$ и $C(\zeta)$ будут довольно сложными функциями s, то разыскание собственных значений путем использования интегралов дифференциального уравнения связано с значительными трудностями, хотя и можно указать различные приемы упрощения вычислений.

5. Энергетический метод. Простота вычислений может быть достигнута при помощи энергетического метода, вполне аналогичного известному методу С. П. Тимошенко. В самом деле, соотношения (4.5) можно рассматривать как соотношения задачи об устойчивости плоской формы изгиба упругой полосы переменного сечения; тогда энергетическое уравнение Тимошенко полностью сохраняет свой вид. Мы получим это уравнение, приравнивая энергию бокового изгиба и кручения при бесконечно малом выпучивании работе внешних сил при выпучивании. Уместно отметить, что в нашей задаче кривизна в плоскости основного изгиба несколько изменяется ($\varkappa_2 \neq 0$) в отличие от упругого случая, когда $\varkappa_2 = 0$. На это изменение можно не обращать внимания, так как соответствующее приращение энергии

$$\int_0^l L_y \frac{d^2u}{ds^2}\, ds$$

равно, как в этом нетрудно убедиться, в силу уравнений Кирхгофа и условий закрепления работе внешних сил на тех же смещениях u, поэтому можно без всякого ущерба исключить эти слагаемые из энергетического уравнения.

Приращение энергии деформации вследствие выпучивания равно (l — длина полосы):

$$\Pi = \int\limits_0^l \frac{L_x^2 ds}{2A(\zeta)} + \frac{1}{2}\int\limits_0^l C(\zeta)\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 ds \tag{5.1}$$

так как для прямой полосы $L_z = C(\zeta)\, d\gamma / ds$.

Заметим, что согласно первому из уравнений второй группы (1.1) L_x выражается через L_{y0} и γ. При интегрировании нужно различать упругие и упруго-пластические участки балки.

Приращение энергии Π равно работе R внешних сил на смещениях от выпучивания:

$$\Pi = R \tag{5.2}$$

Если перейти к безразмерным величинам, положив

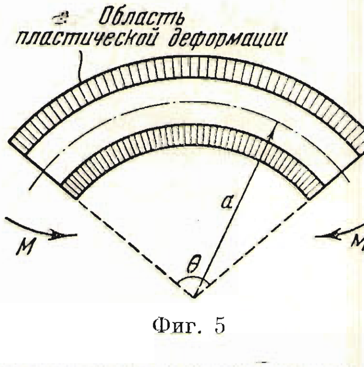
$$s = lt, \qquad A(\zeta) = A_0 A^*(\zeta), \qquad C(\zeta) = C_0 C^*(\zeta)$$

то уравнение (5.2) будет содержать два безразмерных параметра:

$$\mu = \frac{|L_y|_{\max}}{M_s}, \qquad \lambda = \frac{M_s l}{\sqrt{A_0 C_0}} \tag{5.3}$$

где $|L_y|_{\max}$ — максимальный изгибающий момент. Параметр μ (параметр нагрузки, $\mu \leqslant 1$) входит весьма сложным образом как в подинтегральные выражения, так и в пределы интегрирования (границы участков). Параметр λ (гибкость полосы) входит в уравнение очень просто в виде множителя λ^2 при одном из слагаемых. Разыскание минимума λ^2 при данном μ приводится по методу Ритца к решению системы линейных алгебраических уравнений и по сравнению с упругой задачей лишь несколько сложнее (в смысле вычисления квадратур).

6. Устойчивость плоской формы изгиба круговой полосы, изгибаемой парами. Полоса с круговой осью радиуса a и центральным углом θ изгибается парами M, приложенными по концам и действующими в плоскости полосы (фиг. 5). В этой задаче $L_y = \text{const} = M$, $\zeta = \text{const}$; следовательно, $A(\zeta)$ и $C(\zeta)$ постоянны. Поэтому решение задачи не отличается от решения соответствующей упругой задачи; достаточно в решении упругой задачи заменить A_0, C_0 величинами $A(\zeta)$, $C(\zeta)$. При условиях закрепления



Фиг. 5

$$s = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad s = a\theta, \qquad \gamma = 0$$

критический момент (верхний знак соответствует направлению моментов, показанному на фиг. 5, нижний — обратному)

$$M = \frac{A(\zeta) + C(\zeta)}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{A(\zeta) + C(\zeta)}{2a}\right]^2 - \frac{A(\zeta)\, C(\zeta)}{a^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{\theta^2}\right)}$$

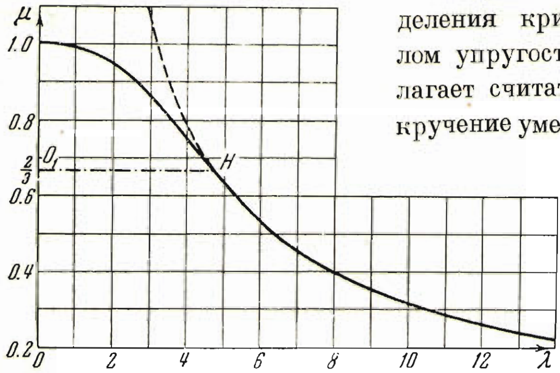
При $a \to \infty$, $a\theta \to l$ получим критический момент для прямой полосы

$$M = \frac{\pi}{l} \sqrt{A(\zeta)\, C(\zeta)}$$

или

$$\lambda = \frac{\pi}{\mu} \sqrt{A^*(\zeta)\, C^*(\zeta)}, \qquad \mu = \frac{|M|}{M_s}, \qquad \zeta = \sqrt{3(1-\mu)} \tag{6.1}$$

Эта кривая показана на фиг. 6; пунктиром нанесена кривая $\lambda\mu = \pi$ для идеально упругой полосы. Для определения критической нагрузки за пределом упругости С. П. Тимошенко [1] предлагает считать, что жесткости на изгиб и кручение уменьшаются в отношении E_r / E, где E_r — модуль Кармана, подсчитанный по максимальному напряжению изгиба. Этот необоснованный прием искажает картину, так как для материала с площадкой текучести $E_r = 0$ и, следовательно, полоса теряет несущую способность (по Тимошенко следует провести линию O_1H, фиг. 6).



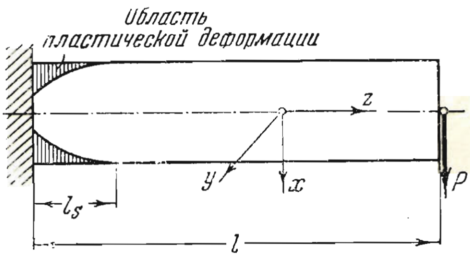
Фиг. 6

7. Изгиб консоли. Рассмотрим задачу об устойчивости плоской формы изгиба консоли силой P, приложенной в центре тяжести концевого сечения $s = l$ (фиг. 7). Изгибающий момент $L_y = Pl(1-t)$, где, как и ранее, $s = lt$. Пластические деформации при изгибе возникнут, если

$$\mu = \frac{Pl}{M_s} > \frac{2}{3}$$

При этом

$$\zeta = \sqrt{3}\, \sqrt{1 - \mu(1-t)}$$
$$\frac{l_s}{l} = 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{\mu} \leqslant \frac{1}{3} \tag{7.1}$$



Фиг. 7

До потери устойчивости имеем $V_{x_0} = P$, $V_{y_0} = V_{z_0} = 0$. Для бесконечно близкой отклоненной формы $V_x = P$, $V_y = -\gamma P$, $V_z = \beta P$ и первое из уравнений второй группы (1.1) принимает вид:

$$\frac{dL_x}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} L_y + Pl\gamma = 0$$

Отсюда вытекает, что

$$L_x = Pl(1-t)\gamma \tag{7.2}$$

Третье из уравнений второй группы (1.1) после отбрасывания малых второго порядка приводится с помощью (4.5) к виду

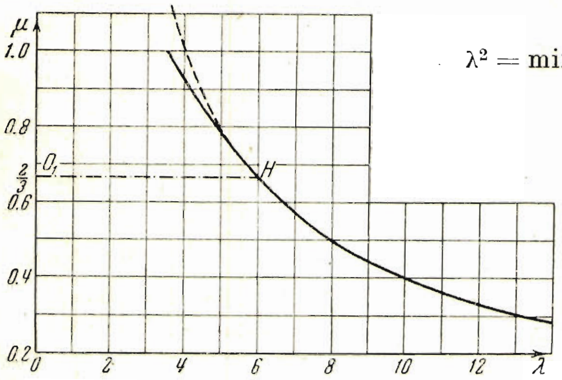
$$\frac{d}{dt}\left[C^*(\zeta)\frac{d\gamma}{dt}\right] + \lambda^2\mu^2 \frac{(1-t)^2}{A^*(\zeta)}\gamma = 0 \tag{7.3}$$

Краевые условия таковы:

$$\gamma = 0 \quad \text{при } t = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 1 \tag{7.4}$$

Этой задаче эквивалентна задача о минимуме

$$\lambda^2 = \min \frac{1}{\mu^2} \frac{\int_0^1 C^*(\zeta)\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 dt}{\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{A^*(\zeta)} \gamma^2 dt} \tag{7.5}$$



Фиг. 8

к которой нетрудно притти и непосредственно, если в уравнение (5.2) внести (7.2) и работу

$$R = Pl^2 \int_0^1 p(1-t)\dot{\gamma}\, dt$$

Следуя методу Ритца, полагаем

$$\gamma = t\,(t-2) + c\left(t - \frac{3}{2}\right) t^2$$

где c—подлежащая определению постоянная. Если сохранить здесь только первое слагаемсе ($c = 0$) и рассмотреть случай упругой полосы ($A^* = C^* = 1$), то легко найдем $\lambda\mu = 4.18$, что уже близко к точному значению $\lambda\mu = 4.012$; если удержать c, то получим $\lambda\mu = 4{,}021$, что отличается от точного значения менее чем на 0.25%. При решении упруго-пластической задачи удобно (7.5) представить в виде ($l' = l_s / l$)

$$\lambda^2 = \min \frac{1}{\mu^2} \frac{\int_0^1 \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 dt - \int_0^{l'} [1 - C^*(\zeta)] \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 dt}{\int_0^1 (1-t)^2 \gamma^2 dt + \int_0^{l'} \left[\frac{1}{A^*(\zeta)} - 1\right](1-t)^2 \gamma^2 dt}$$

Интегралы в пределах (0,1) легко вычисляются, интегралы в пределах (0, l') находим численно при фиксированных μ. Как и в упругом случае, первое приближение близко к второму. Граница устойчивости показана на фиг. 8; она мало отходит от упругой (пунктир), что объясняется незначительным распространением пластических зон и тем, что максимальные пластические деформации локализуются вблизи заделки. Линия O_1H проведена по Тимошенко.

8. Изгиб полосы с опертыми концами равномерной нагрузкой. Рассмотрим задачу о выпучивании полосы с свободно опертыми концами, изгибаемой нагрузкой, равномерно распределенной вдоль оси (фиг. 9). Обозначим длину полосы через $2l$, всю нагрузку — через $2Q$; будем s отсчитывать от середины ($s = lt$). Тогда

$$F_x = \frac{Q}{l}, \qquad V_x = -Qt, \qquad L_y = -\frac{1}{2} Ql(1-t^2)$$

$$\zeta = \sqrt{3}\sqrt{1-\mu(1-t^2)}, \qquad \mu = \frac{1}{2}\frac{Ql}{M_s}, \qquad l' = \sqrt{1-\frac{2}{3\mu}} \tag{8.1}$$

С помощью уравнений Кирхгофа нетрудно получить

$$F_y = -\frac{Q}{l}\gamma, \quad V_y = Qt\gamma, \quad L_x = L_y\gamma \tag{8.2}$$

Используя третье из уравнений второй группы (1.1) и соотношения (4.5), находим дифференциальное уравнение задачи:

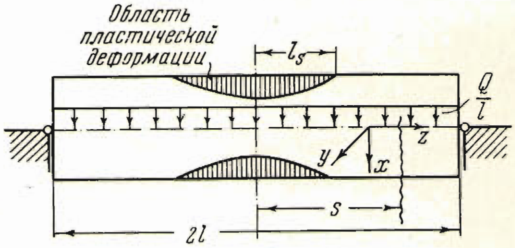
$$\frac{d}{dt}\left[C^*(\zeta)\frac{d\gamma}{dt}\right] + \lambda^2\mu^2\frac{(1-t^2)^2}{A^*(\zeta)}\gamma = 0 \tag{8.3}$$

Граничные условия в рассматриваемом случае будут

$$\gamma = 0 \text{ при } t = \pm 1 \tag{8.4}$$

Эквивалентная минимальная задача (8.5)

$$\lambda^2 = \min\frac{1}{\mu^2}\frac{\int_0^1 C^*(\zeta)\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 dt}{\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{A^*(\zeta)}\gamma^2 dt}$$



Фиг. 9

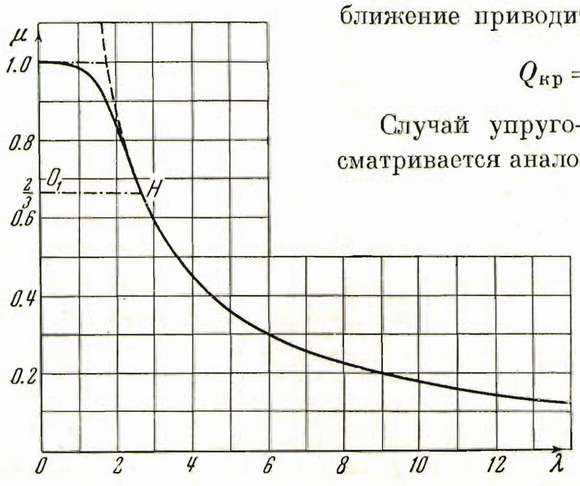
Заметим, что при $\mu = 1$ интеграл в знаменателе (8.5) расходится ($\zeta = \sqrt{3}\,t$ при $\mu = 1$ и $A^*(\zeta) = \frac{32}{27}\sqrt{3\,t}$ при $\zeta \leqslant \frac{1}{3}$) в отличие от предыдущей задачи, где $A^* = \frac{32}{27}\sqrt{3t}$ при $\zeta \leqslant \frac{1}{3}$ $\mu = 1$. Следуя методу Ритца, полагаем

$$\gamma = (1-t^2) + c(1-t^2)^2$$

Для упругого случая ($A^* = C^* = 1$) первое приближение ($c = 0$) дает значение $Q_{\text{кр}}$, превышающее результат Тимошенко на $2.26^0/_0$; второе приближение приводит к результату Тимошенко

$$Q_{\text{кр}} = 3.54\frac{\sqrt{A_0C_0}}{l^2}$$

Случай упруго-пластического изгиба рассматривается аналогично тому, как это сделано в § 7; отметим, что второе приближение мало отличается от первого. Вычисленная граница устойчивости (фиг. 10) существенно отклоняется от «упругой» границы (пунктир). Как и ранее, линия O_1H проведена по Тимошенко.



Фиг. 10

В заключение заметим, что при других граничных условиях мы придем к уравнению относительно $v = v(s)$.

Поступила 12 IX 1950

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат. 1946
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.
3. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.